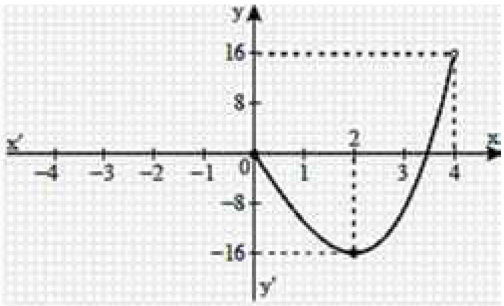
Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
Επαναληπτικά θέματα ΟΕΦΕ 2003-2018 α φάση

Συναρτήσεις

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+\kappa x$, με $x\in(-4,4)$ και $\kappa\in\mathbb{R}^*$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2,-16)$ και τμήμα της γραφικής της παράστασης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι $\kappa=12$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο $(-4,4)$.

γ) Να μεταφέρετε το σχήμα στο γραπτό σας, συμπληρώνοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

δ) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρείτε τα ακρότατα αυτής, καθώς και τις θέσεις τους.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+16,\ x\in(-4,4)$.

Τριγωνομετρία

2. **α)** Αν $A=\dfrac{1-\eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)^2}$. Να δείξετε ότι Α=1.

β) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $x\in[0,\pi]$ για τους οποίους:

$$2\eta\mu^3 x-4\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2 x=0$$

3. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}$

β) Θεωρούμε τους θετικούς πραγματικούς $x_\kappa=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3}$, κ=1,2,3...

i. Να δείξετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά της.

ii. Να βρείτε το κ ώστε ο αριθμός $\dfrac{6017\pi}{3}$ να είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu 4x+2\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x}$ με $x\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=8\eta\mu x-8\eta\mu^3 x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=16\eta\mu x$.

γ) Να αποδείξετε ότι, οι αριθμοί $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right), f(0), f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(2x)+3f(x)+2=0$

β) Αν $x=\frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $L=\left[1+f(x)+f^2(x)+...+f^{10}(x)\right]2^{10}-38$.

6. Α. α) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=0$ (1).

β) Να αποδείξετε ότι οι λύσεις της (1) στο διάστημα $[0,\pi]$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}=\varepsilon\varphi^4\alpha$ για όλες τις τιμές του α που ορίζεται η ισότητα.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta x}{2}\right)$ όπου $\beta<0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,\beta+5)$, και $B\left(\frac{4\pi}{\beta},4\beta^2\right)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=4$ στο διάστημα $[0,12\pi]$.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της.

δ) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A=f(4\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $B=3f(0)\frac{f(0)^{2010}-1}{f(0)-1}+4$.

8. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}\eta\mu(\pi+\theta)x+\sigma\upsilon\nu(-\theta)y=1\\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)x+\sigma\upsilon\nu(\theta-\pi)y=1\end{cases}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(10^\alpha-3)\sigma\upsilon\nu x-4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3.

ii. Για α = 1, να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $xy=f(\theta)$ όπου (x, y) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\beta x\right)$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $0<\beta\le 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(0,-2), $B(\pi,-1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Αν $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$

β) Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f και την περίοδό της.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0,6π] και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο ίδιο διάστημα.

δ) Δίνεται το γραμμικό σύστημα: (Σ) $\begin{cases}\lambda f(0)x+f(2014\pi)y=4\lambda\\ \lambda f(-\pi)x+\lambda f(2\pi)y=0\end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις καθώς και τη μορφή των απείρων λύσεων.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν2x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή, η ελάχιστη τιμή και η περίοδος της συνάρτησης f(x).

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x στο [0, 2π].

γ) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{12}\right)f\left(\frac{5\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

11.α) Δείξτε ότι $A(x)=\dfrac{2}{εφ\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+εφ(\pi+x)}=ημ2x$.

β) Δείξτε ότι η $B(x)=\dfrac{(ημx+συνx)^2-ημ2x}{2}=\dfrac{1}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=B(x)$

δ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$. Βρείτε τη μέγιστη τιμή Μ, την ελάχιστη τιμή ε και την περίοδο της συνάρτησης $f(x)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ\dfrac{x}{2},\ x\in\mathbb{R}$ και η παράσταση

$$A=\frac{-συν(\pi+\theta)\cdot συν\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\cdot σφ(\pi-\theta)\cdot σφ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{συν(\pi-\theta)\cdot ημ(\pi+\theta)\cdot εφ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot εφ(2\pi+\theta)}.$$

α) Να δείξετε ότι $A=1$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. Στη συνέχεια, να βρείτε την περίοδο της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

γ) Να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(x)=A$, όπου A η τιμή της παράστασης του α ερωτήματος.

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ και $f\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

13.α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύουν συγχρόνως $ημω=1$ και $συνω=1$.

β) Θεωρούμε γωνία α rad για την οποία ισχύουν:

- $ημα=x_0$
- $συνα=y_0$

όπου (x_0,y_0) μία από τις λύσεις του συστήματος $\begin{cases}10y^2=9x+1\\ 9x-2y=7\end{cases}$.

i. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

ii. Να αποδείξετε ότι $ημα=\dfrac{3}{5}$, $συνα=-\dfrac{4}{5}$, $εφα=-\dfrac{3}{4}$ και $σφα=-\dfrac{4}{3}$.

iii. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$A=ημ\left(α-\frac{\pi}{2}\right)\cdot συν(-α)-\frac{3}{5}\cdot συν\left(\frac{3\pi}{2}+α\right)+ημ^2\left(\frac{\pi}{2}-α\right)+συν^2\left(\frac{3\pi}{2}+α\right)$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=β\cdot ημ(αx)$ με $x\in\mathbb{R}$ και α η τιμή που προκύπτει από τον υπολογισμό της παράστασης $α=ημ^2(40°-ω)+εφ(25°-ω)\cdot εφ(65°+ω)+ημ^2(ω+50°)+1$.

α) Να αποδείξετε ότι $α=3$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{71\pi}{9},-\sqrt{3}\right)$, να αποδείξετε ότι $\beta=2$.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, καθώς και την περίοδό της. Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Πολυώνυμα

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3+(\lambda^2-2\lambda)x-\lambda+2$

α) Να βρείτε τον βαθμό του P(x) για τις διάφορες τιμές του λ.

β) Για λ=1 να βρεθεί το P(x) και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης P διέρχεται από το σημείο (1,-3).

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<-3$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-20$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x+2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x+1$ είναι το -16 να αποδείξετε ότι α = 12 και β = 6.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>0$.

17. Δίνεται ότι το πολυώνυμο: $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει παράγοντες τους $x+1,\ x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και β = 0

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε

i) Τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η C τέμνει τον άξονα y΄y.

ii) Τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x'x.

18. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-5x^2+16x-12$ και $F(x)=x^2+5x-6$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=F(x)$ (1)

β) Να βρείτε το διάστημα, που ανήκει το x, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x), να βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

γ) Έστω (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ μία γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης και λόγο λ τη μεσαία ρίζα της (1), τότε:

i. Να υπολογίσετε την τάξη του όρου της γεωμετρικής προόδου α_ν, που ισούται με 192.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\alpha_{2008}}{\alpha_{2007}}\cdot\frac{\alpha_{2005}}{\alpha_{2006}}$.

19. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\alpha+3)x^2+(2\beta+1)x-2\alpha$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) δια του $x+1$ είναι -18, να βρεθούν τα α και β.

β) Για α=2 και $\beta=\frac{7}{2}$

i) Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0 .

ii) Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια του πολυωνύμου x+1 και να γραφεί το P(x) με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\geq 7x+1$.

20.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-x+\beta$ με α, $\beta\in\mathbb{R}$ και το πολυώνυμο $Q(x)=x^2+x-1$.

α) Να βρεθούν α ,$\beta\in\mathbb{R}$ αν η αριθμητική τιμή του P(x) για x = -3 είναι -8 και έχει παράγοντα το x + 2 .

β) Αν α = 2 και β = -2, να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(x) δια του Q(x) και να γράψετε το P(x) με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=Q(x)-1$.

21.Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3-7x^2+\beta x+2$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του P (x) δια x - 1 δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για x = - 2 είναι 10, τότε:

α) Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta\in\mathbb{R}$.

β) Για τις τιμές α = -5 και β = 10.

i. Να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(X) δια του $Q(x)=x^3+x^2-2x$ και να γράψετε το P(x) με την βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=\upsilon(x)$ όπου υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια Q(x).

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης Q(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

22.Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις $\eta\mu x=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x=\beta$ όπου α η διπλή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η άλλη ρίζα της ίδιας εξίσωσης.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f, να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $f(-x):(x^2+1)$.

23.Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β $\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το x+1 να είναι παράγοντας του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x - 2) να ισούται με -9.

β) Για α = -7 και β = 2:

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

ii. Να κάνετε τη διαίρεση P(x) :(x^2 -1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

iii. Αν υ(x) το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση $\frac{\upsilon(x)}{P(x)}\ge 0$.

24.Έστω $P(x)=x^3+2\alpha x^2-\alpha^2x+2$ πολυώνυμο, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρεθεί με το x -1, δίνει υπόλοιπο 3α +1.

α) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού α.

β) Για α = 1 και πολυώνυμο Q(x) = x^2 + x +1:

i. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το Q(x) είναι x + 1 και -3x +1 αντίστοιχα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)+x-2}{Q(x)}\ge 1$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\pi(x)=\sqrt{Q(x)}$.

25.Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της $f(x)$ δια x +2 είναι 24.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο Α(0,8).
- Η $f(x)$ έχει παράγοντα το x - 1.

α) Να δείξετε ότι: α = 1, β = -10 και γ = 8.

β) i. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

ii. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+4}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$.

26. Έστω πολυώνυμο $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+(\lambda+6)x^2+7x+\mu$ για το οποίο ισχύουν:

i) Το x είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 3.

α) Δείξτε ότι λ = 2 και μ = 0.

β) Για λ = 2 και μ = 0,

i) Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το (x^2-2).

ii) Να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση του $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $y=x+4$.

γ) Έστω το πολυώνυμο: $Q(x)=2x^5+(2\alpha+\beta)x^4-7x^3+(-3\alpha+2\beta)x^2+(\kappa+6)x+(\kappa-1)$.

Βρείτε τους αριθμούς α,β και κ ώστε $P(x)=Q(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4-(\lambda-1)x^3+\lambda x^2-7x+\lambda^2+5,\ \lambda\in\mathbb{R}$ το οποίο είναι 3ου βαθμού.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

Για $\lambda=-1$

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ τέμνει τον άξονα $x\,x'$.

γ) Έστω επίσης το πολυώνυμο $Q(x)=x^{23}-(\mu+1)x^2+(\mu-1)x+2,\ \mu\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$.

i. Να δείξετε ότι $\mu=2$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $Q(x)$ δια του $x+3$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x^2-6x+9}{Q(x)+55}+\dfrac{2x^2+x-6}{P(x)}<0$.

Εκθετική – Λογαριθμική συνάρτηση

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=5^{\log x},\ g(x)=x^{1085},\ x\in(0,+\infty)$

Α. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(x)=g(x)$ **2.** $f(xy)=f(x)f(y)$

3. $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ **4.** $f(x^\nu)=[f(x)]^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)=5+4g(x)$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x)>f(x^2-4)$

29. Έστω x, y θετικοί αριθμοί, με $x\neq1$.

α) Δείξτε ότι ισχύει: $\ln y\cdot\log x=\log y\cdot\ln x$

β) Αν ισχύει η ισότητα $\left(\dfrac{\ln y}{\ln x}\right)^2-4\dfrac{\log y}{\log x}+4=0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y.

γ) Αν είναι $y=x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1}=(2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y.

δ) Αν για το πολυώνυμο $P(x)=x^2-4x+4$ ισχύει $P(\ln x)\le1$, να δείξετε ότι $y\in[e^2,e^6]$.

30. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln\left(2e^{2x+1}+e^{x+1}\right)$

α) Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού της και να δειχθεί ότι το γράφημά της τέμνει τον yy' στο σημείο $A\left(0,1+\ln 3\right)$

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=1$

γ) Να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=1$.

31. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x>0$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(2-\eta\mu x)-f(\sigma\upsilon\nu 2x)=f(3)$ αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

β) Αν $\alpha>0$ και $f(\alpha)+f(\alpha^2)+...+f(\alpha^{100})=5050$ να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

γ) Έστω $\alpha,\beta,\gamma>0$. Να αποδείξετε ότι: αν οι $f(\alpha),f(\beta),f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\sqrt{f(x)}+f(x)-12>0$.

32. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x)=\ln 7+f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν: $\left(e^{\beta}-2\right)^2=\left(e^{\alpha}-2\right)\left(e^{\gamma}-2\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι: $e^{f(1)}+e^{f(2)}+...+e^{f(100)}=\dfrac{e^{101}-201e+200}{e-1}$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\alpha-\beta)$,όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

A. Αν $\ln 6+f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\ln 5=\ln\pi$,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(e^{f(x)}\right)\sigma\upsilon\nu\left(e^{f(x)}\right)=\frac{1}{2}$.

B. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(1,0), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha-\beta=0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $16\cdot 2^{f(x)}<2^{\ln\left(2e^4\right)}$

34. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=(1-2\alpha)^x,\ x\in\mathbb{R}$

α) Για ποιες πραγματικές τιμές του α ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση g και είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Για $\alpha=-1$ να λυθεί η εξίσωση $g\left(\eta\mu^2 x\right)+g\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=2\sqrt{3}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x'x.

β) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$ και $x\neq e^{\frac{1}{2}},x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$ για κάθε $x>0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$A=\ln f\left(e^{1000}\right)+\ln f\left(e^{1001}\right)+\ln f\left(e^{1002}\right)+\ln f\left(e^{1003}\right)+\ln f\left(e^{1004}\right)$

36.Α. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$, για $x>1$.

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $L=\varphi(2)\cdot\varphi(3)\cdot\varphi(4)\cdot\ldots\cdot\varphi(63)+2004$

ii. Να λυθεί η ανίσωση $\varphi(x)>\varphi(x^2)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-(e+1)e^{x}+e\right)$.

i. Για ποιες τιμές του x με $x > 0$ ορίζεται η συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x)=\ln(x-1)$ για κάθε $x>e$

37.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x}{4+x}\right)$

α) Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-x)<-2\ln 3$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

38.Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$ και $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(2^{x}-3\right)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να συγκρίνετε τους αριθμούς $g(3)$, 2.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Αν $\kappa>4$ να λύσετε την ανίσωση $f(\log_2 \kappa)<\dfrac{1}{2}$.

δ) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(-x^3-7x^2+6\right):(x+1)$ είναι το πολυώνυμο

$\upsilon(x)=\left(f(\beta)-1\right)x+g(\alpha)+g\left(\alpha^2\right)+g\left(\alpha^3\right)+\ldots+g\left(\alpha^{20}\right)-\dfrac{210}{\ln 2}$, να δείξετε ότι $\alpha+3=e^{\beta\ln 2}$ όπου α ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και β ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

39.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left[\ln\left(e^{x}-e^{2}\right)\right]^{2}-3}{\ln\left(e^{x}-e^{2}\right)-2}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\left(2e^{2}\right)$, $\ln\left(e^{3}+e^{2}\right)$, 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{y^2-3}{y-2}\geq 6$

γ) Έστω $x_0=\ln\left(e^{3}+e^{2}\right)$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x_0)=6$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\left(\ln\left(2e^{2}\right),+\infty\right)$. Είναι το $f(x_0)$ ελάχιστο της συνάρτησης;

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}\right)$.

α) Να αποδείξετε ορισμού της f είναι το διάστημα Α = (-2,2).
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να βρείτε (αν υπάρχει) την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=x\ln 2-\ln 3$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $-\ln^2\left(e^2\right)\cdot f(x)>4f(-x)+\ln^2|x|-\ln x^2-3$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ με $x\in\mathbb{R}$ και

$$h(x)=\ln\frac{3}{x}+\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$ με x > 0.

α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln(f(\ln x))$.
i. Να υπολογίσετε το $f(\ln x)$.
ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln(f(\ln x))$.
β) Να δείξετε ότι $h(x)=\ln\frac{3}{2}$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση g(x) = h(x) με x >1.
δ) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ και να ισχύει $\eta\mu\theta=\frac{f(1)\ln^2 x-2f(2)\ln x}{6f(1)}$.

42. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-(e+1)e^x+e}{e^{x+1}-e}\right)$ και $g(x)=e^{2x-1}-4e^{x-1}+3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.
β) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=e^{\ln\frac{5+3e}{e}}$.
γ) Βρείτε τις τιμές του x ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)}\geq g(x)+\frac{6-4e}{e}$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(1-\frac{1}{\ln\alpha}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Για ποιές από αυτές τις τιμές η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;
β) Να αποδείξετε ότι $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, αν $0<\alpha<1$, να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^x\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)>1$.
γ) Δίνεται ότι η τιμή της παραμέτρου α είναι ίση με $\alpha=\frac{1}{2}\log_3 81+\log_3 15-\log_3 5-e^{\frac{1}{2}\ln 9}+e^{-\frac{\ln 2}{\ln 4}}$.
i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e^{-\frac{1}{2}}$ και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2+\ln(f(2x))<x\ln 2+\ln\left(2^x+f(x)\right)$.
iii. Αφού αποδείξετε ότι $\left(2+\sqrt{f(1)}\right)\left(2-\sqrt{f(1)}\right)=1$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left(2+\sqrt{f(1)}\right)^{x}+\left(2-\sqrt{f(1)}\right)^{x}=4$$