ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

<u>Λύση</u>

α) Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\alpha)<n<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-n$, $x\in[\alpha,\beta]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$ οπότε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

<u>Λύση</u>

i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση gof δύο συναρτήσεων f,g με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της gof;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

<u>Λύση</u>

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $gof : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

<u>Λύση</u>

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

iii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

<u>Λύση</u>

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

<u>Λύση</u>

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

Άσκηση 8

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>Λύση</u>

i. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $|\eta\mu x|\le|x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu {x_0}^\nu+\alpha_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=P(x_0)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

<u>Λύση</u>

Είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

<u>Λύση</u>

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\beta))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

   Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

   Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

   Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

   Επομένως,

   - αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ **(2)**

   - αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$,

     οπότε θα έχουμε $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ **(3)**

   Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

   Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathbf{N}-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-{x_0}^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)={x_0}^{\nu-1}+{x_0}^{\nu-1}+\ldots+{x_0}^{\nu-1}=\nu {x_0}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$.

<u>Λύση</u>

Αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

<u>Λύση</u>

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

Λύση

i. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha \ln x$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha \ln x}\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}=\alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ για κάθε } x\in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'(x)=\alpha^x \cdot \ln\alpha$.

<u>Λύση</u>

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u \cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\cdot\ln\alpha .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0\text{, για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

<u>Λύση</u>

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=$$

$$\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\mathbf{R}_1=\left\{x\in\mathbf{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\right\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\left(0,+\infty\right)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}_1$ έχουμε:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{\left(\eta\mu x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

i. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$

ii. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$;

<u>Λύση</u>

i. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. Αν $c>0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση β-α και ύψος c.

Άσκηση 2

i. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g, και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε
$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$

Άσκηση 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$;

Λύση

Η σχέση είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.

Άσκηση 4

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Λύση

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. $E=\int_a^\beta |f(x)-g(x)|dx$.

Άσκηση 5

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω.

- αν $f(x)\geq 0$
- αν $f(x)\leq 0$
- αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

Λύση

- Αν $f(x)\geq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.
- Αν $f(x)\leq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (-f(x))dx$.
- Αν η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left[\alpha,\beta\right]$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta \left|f(x)\right|dx$.

Άσκηση 6

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

<u>Λύση</u>

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την **(1)**, για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = x_0$».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Ψ

2) Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

Δηλαδή η κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* f *στο* $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ *μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της* f ».

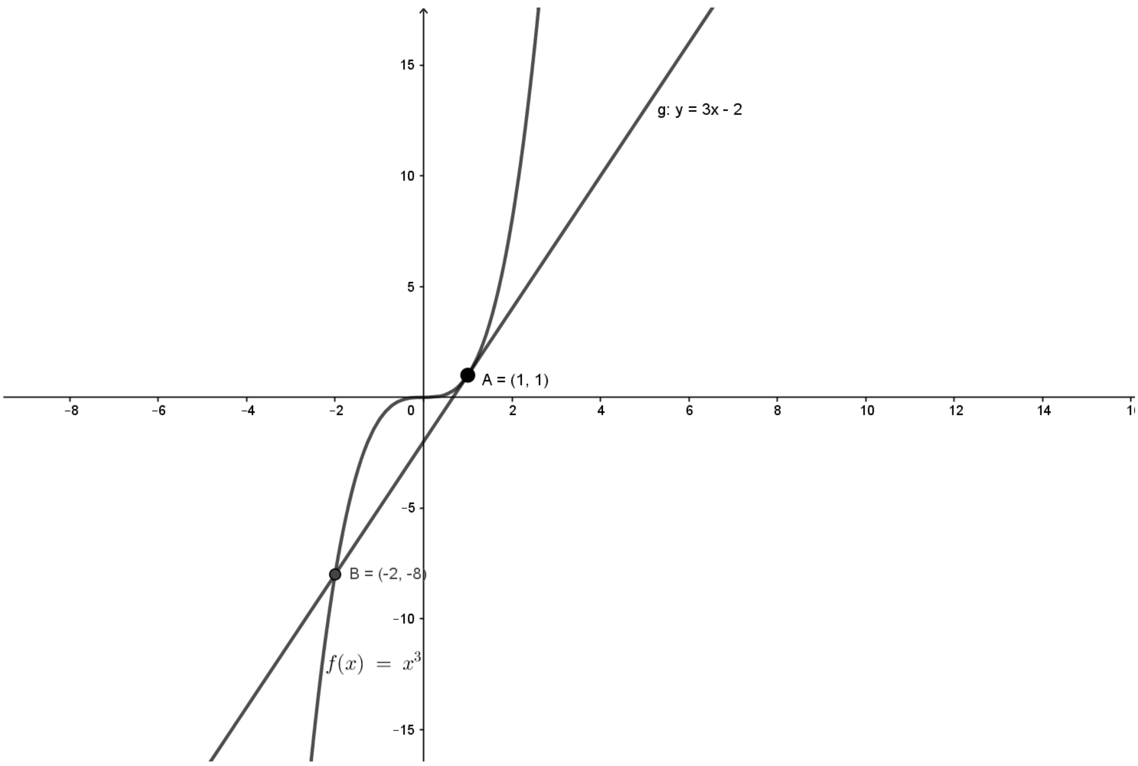
1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{f(x) = x^3}$ και την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A(1,1)}$ την $\mathrm{y = 3x - 2}$ η οποία τέμνει την $\mathrm{C_f}$ και στο σημείο $\mathrm{B(-2,-8)}$ όπως βλέπουμε και στο σχήμα.



Άσκηση 3

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση* $f:\Delta \to \mathbb{R}$ *αντιστρέφεται και η* f^{-1} *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(\Delta)$ *με* $f'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in \Delta$ *, τότε* $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$, $x \in f(\Delta)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Πράγματι: Για κάθε $x \in f(\Delta)$ ισχύει

$$f\left((f^{-1})(x)\right) = x \Rightarrow \left[f\left((f^{-1})(x)\right)\right]' = (x)' \Rightarrow f'\left((f^{-1})(x)\right)(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left((f^{-1})(x)\right)},\ x \in f(\Delta).$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *« Μπορεί δύο συναρτήσεις f, g να μην είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και η συνάρτηση $f+g$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$.

Όμως η συνάρτηση $f+g$ έχει τύπο $(f+g)(x) = x$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και γνησίως αύξουσα τότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle»*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$. άρα $f(\alpha) \neq f(\beta)$ οπότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα* $[\alpha, \beta]$ *να ισχύουν το Θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano»*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ισχύει το θεώρημα του Bolzano έχουμε $f(\alpha)f(\beta)<0,(1)$ και αν ισχύει το θεώρημα του Rolle έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε η (1) γίνεται $f^2(\alpha)<0$ άτοπο.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση* $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $[\alpha,\beta]$ *με* $f(\alpha)=f(\beta)$ *τότε και η συνάρτηση* $g(x)=(fof)(x)$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *»*.

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α
2) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , οπότε και η σύνθεση $(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επίσης ισχύει $\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta)$ και επειδή
$\mathrm{f}(\alpha),\mathrm{f}(\beta)\in[\alpha,\beta]\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{f}(\alpha))=\mathrm{f}(\mathrm{f}(\beta))\Rightarrow(\mathrm{fof})(\alpha)=(\mathrm{fof})(\beta)$. Άρα η συνάρτηση $\mathrm{g}(\mathrm{x})=(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν ισχύει $f'(x)<0$ και $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε πάντα οι γραφικές παραστάσεις των f,g θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο »*.

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Ψ
2) Οι συναρτήσεις $f(x)=-e^x, g(x)=e^x$, προφανώς δεν έχουν κοινό σημείο αλλά $f'(x)=-e^x<0,\ \ g'(x)=e^x>0$.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε*

$f'(x_1) < f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f'(x_2)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Έχουμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $\mathrm{x}_1 < \frac{\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2}{2} < \mathrm{x}_2 \Rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x}_1) < \mathrm{f}'\left(\frac{\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2}{2}\right) < \mathrm{f}'(\mathrm{x}_2)$.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη έχει τρία σημεία συνευθειακά τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ τα τρία συνευθειακά σημεία.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$, οπότε υπάρχουν τουλάχιστον, δύο σημεία $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$, $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ έτσι ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $M(\xi_1, f(\xi_1)), N(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι παράλληλες στην ευθείας (ε).
Άρα έχουμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \lambda_\varepsilon$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq \Delta$,έτσι ώστε $f''(x_0) = 0$.

Άσκηση 11

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύουν ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Δικαιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε θα είχαμε

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < 0$ αντίστοιχα που είναι άτοπο αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$.

Άσκηση 12

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν* f *συνεχής συνάρτηση στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *για την οποία ισχύει ότι* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$

τότε κατά ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ *για κάθε* $x \in [\alpha,\beta]$ *»*.

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Ψ

2) Παράδειγμα: $f(x)=\eta\mu x\ :\ [0,2\pi]$

$\int_0^{2\pi} \eta\mu x\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} - \sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 0$ αλλά δεν είναι $\eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$.