ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = -\infty$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1,5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1,5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f(3)}{g(2)}\cdot x \right) = -\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow x_1^4<x_2^4\Rightarrow 2x_1^4<2x_2^4$ και

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1<3\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1+1<3\ln x_2+1$

άρα $2x_1^4+3\ln x_1+1<2x_2^4+3\ln x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+1)=0-\infty+1=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+1)=(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty$

Επομένως είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^4+1=3(\ln 1-\ln\lambda)\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+1=-3\ln\lambda\Leftrightarrow 2\lambda^4+3\ln\lambda+1=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$. Αυτό ισχύει αφού $0\in f((0,+\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. $2f^3(x)-3=2x-3f(x)\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0+3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{2\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3}$$

Αφού $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3\neq 0,$ διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta=4f^2(x_0)-4\cdot 2(2f^2(x_0)+3)=4f^2(x_0)-16f^2(x_0)-24=$$

$$-12f^2(x_0)-24=-12\left[f^2(x_o)+2\right]<0$$

Άρα: $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}\leq 2\left|x-x_0\right|$.

Οπότε $-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq 2\left|x-x_0\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-2\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[2\left|x-x_0\right|\right]=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

ii. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f(x)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f(x)\Leftrightarrow f(x)-\alpha=0\Leftrightarrow \left(f(x)-\alpha\right)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0, \quad \textbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\le 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2\ge 0\Rightarrow f^2(x)+\alpha f(x)+\alpha^2+3\ge 3>0$

$$(1)\Leftrightarrow 2\left(f^3(x)-\alpha^3\right)+3\left(f(x)-\alpha\right)=0\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$$

$2x+3=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-3}{2}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$.

Επίσης $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Οπότε: $2f^3(x)+3f(x)=2x+3\Leftrightarrow 2y^3+3y=2f^{-1}(y)+3$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-3}{2}, x\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)=0\Leftrightarrow x=f^{-1}(0)=\dfrac{2\cdot 0^3+3\cdot 0-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f, οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y=x$.

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow \frac{2x^3+3x-3}{2}=x$$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x-3=2x \Leftrightarrow 2x^3+x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

<u>Παρατήρηση</u>: Τις προτάσεις

Α) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

<u>Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.</u>

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)-ημf(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
1. Να αποδείξετε ότι $|2f(x)-x|\le|f(x)|$.

2.Να αποδείξετε ότι $|f(x)|\le|x|$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4.Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(f(x))}{f(x)}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

<u>Λύση</u>

1. Από την υπόθεση έχουμε:
$2f(x)-ημf(x)=x \Rightarrow 2f(x)-x=ημf(x)\Rightarrow|2f(x)-x|=|ημf(x)|\le|f(x)|$ **(1)**

2. Ισχύει

$$||2f(x)|-|x||\le|2f(x)-x|\overset{(1)}{\le}|f(x)|\Rightarrow||2f(x)|-|x||\le|f(x)|\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow -|f(x)|\le\underline{|2f(x)|-|x|\le|f(x)|}\Rightarrow|2f(x)|-|f(x)|\le|x|\Rightarrow|f(x)|\le|x|$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $|f(x)|\le|x|\Rightarrow -|x|\le f(x)\le|x|$, **(2)** όμως $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, οπότε η **(2)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

4. Θέτουμε $f(x)=u$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, τότε $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ(f(x))}{f(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u}=1$$
$$2f(x)-ημf(x)=x\Rightarrow 2\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{ημf(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{ημf(x)}{f(x)}\right)=1.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{ημf(x)}{f(x)}\right)=2-1=1\neq 0$, οπότε για x κοντά στο 0 θα ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{ημf(x)}{f(x)}\right)=1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2-\frac{ημf(x)}{f(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-\frac{ημf(x)}{f(x)}}=1.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x+1)=3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x+5)\le 0$.

<u>Λύση</u>

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1<2$ είναι $f(-1)=0<f(2)=3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x<-1\Rightarrow f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\Rightarrow f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x+1)=3\Leftrightarrow f(2e^x+1)=f(2)\Leftrightarrow 2e^x+1=2\Leftrightarrow$$

$$2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x+5)\le 0\Leftrightarrow f(3x+5)\le f(-1)\Leftrightarrow 3x+5\le -1\Leftrightarrow 3x\le -6\Leftrightarrow x\le -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = 2017.$

- $|g(x) - 2| \le |f(x) - 1|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.

- $f(x) = f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.
4. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 g(x) = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει: $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = h(x) \overset{x\neq 1}{\Rightarrow} f(x) = (x-1)h(x) + 2x - 1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2017$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}[(x-1)h(x) + 2x - 1] = 0 \cdot 2017 + 2 - 1 = 1$. Άρα $f(1) = 1$.

2. Αφού η σχέση $|g(x) - 2| \le |f(x) - 1|$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε:
$|g(1) - 2| \le |f(1) - 1| = 0 \Rightarrow g(1) - 2 = 0 \Rightarrow g(1) = 2$.

Επίσης έχουμε:
$|g(x) - 2| \le |f(x) - 1| \Leftrightarrow -|f(x) - 1| \le g(x) - 2 \le |f(x) - 1| \Leftrightarrow 2 - |f(x) - 1| \le g(x) \le 2 + |f(x) - 1|$ **(1)**.
Όμως χρησιμοποιώντας ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 1}(2 - |f(x) - 1|) = \lim\limits_{x\to 1}(2 + |f(x) - 1|) = 2$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2 = g(1)$. Άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.

3. Αφού η σχέση $f(x) = f(x+1)$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε:
$f(2) = f(1) = 1$.

Έχουμε: $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x+1) \overset{\text{Θέτω: } x+1=u,\ \text{όταν } x\to 1 \text{ τότε } u\to 2}{=} \lim\limits_{u\to 2} f(u)$, οπότε
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 = f(2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=x^2 g(x)-3$ που είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
Επίσης για x=2 η σχέση $|g(x)-2|\le|f(x)-1|$ μας δίνει: $|g(2)-2|\le|f(2)-1|=0\Rightarrow g(2)=2.$
Έχουμε: $t(1)=1^2 g(1)-3=2-3=-1<0$ και $t(2)=2^2 g(2)-3=4\cdot 2-3=5>0$, οπότε $t(1)t(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ.Bolzano οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $t(\xi)=0\Rightarrow \xi^2 g(\xi)=3$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
   a. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
   b. Ισχύει: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Λύση

1. Αφού η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=y=0$ έτσι έχουμε: $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

2. Έστω $x\in\mathbb{R}$, τότε και $-x\in\mathbb{R}$.Θέτουμε στη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ όπου $y=-x$ και παίρνουμε:

$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$,
άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

3.
a. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. **(1)**
Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=x_1$ και $y=-x_2$ γίνεται
$f(x_1-x_2)=f(x_1)+f(-x_2)\Leftrightarrow f(x_1-x_2)=f(x_1)-f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1-x_2)=0$.
Αφού όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, θα είναι υποχρεωτικά $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

b. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x=f^{-1}(\alpha)$, $f(y)=\beta\Leftrightarrow y=f^{-1}(\beta)$, έτσι έχουμε
$\alpha+\beta=f(x)+f(y)=f(x+y)\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=x+y\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$
Άρα $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Αν ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε έχουμε:
$3\rho^2+4f^2(\rho)=27 \Leftrightarrow \rho^2=9 \Leftrightarrow \rho=3$ ή $\rho=-3$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f, ως συνεχής στο $[-3,3]$, είναι συνεχής στο $(-3,3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

iii.

- Αν $f(x)<0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=-\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

- Αν $f(x)>0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

iv. $f(1)=\sqrt{6}>0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},x\in[-3,3].$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{27-3x^2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27-3x^2}-3\sqrt{3}}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}x^7\eta\mu\frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x+9-9}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(x+2\right)}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}$

ii. Επειδή $\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\neq 0$, έχουμε:

$\left|x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|x^7\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|x^7\right|\Leftrightarrow -\left|x^7\right|\le x^7\eta\mu\frac{2}{x}\le\left|x^7\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^7\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|x^7\right|=0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} \le f(x) \le \frac{x^8 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x} = \frac{1}{3}$ (από i ερώτημα).

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^8 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^7 \eta\mu \frac{2}{x} + \frac{1}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (από ii ερώτημα)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$, είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$.

Λύση

i. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε για $x=2$ έχουμε:

$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$

$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4$.

iv. Έχουμε:

$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$

$f^{-1}(2x^2+7x)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\frac{5}{2}$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$ με $0<\alpha<\beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(x_0)=\alpha+\beta$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$, έχει ακριβώς μια λύση στο (α,β).

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $0<\alpha<\beta\Leftrightarrow 2\alpha<2\beta\overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} f(\beta)<f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\alpha-\beta$, η οποία είναι συνεχής (f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$$x_1,x_2\in[\alpha,\beta] \text{ με } x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-\alpha-\beta>f(x_2)-\alpha-\beta\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2).$$

Οπότε το σύνολο τιμών της g είναι
$g([\alpha,\beta])=[g(\beta),g(\alpha)]=[f(\beta)-\alpha-\beta,f(\alpha)-\alpha-\beta]=[\alpha-\beta,\beta-\alpha]$ και επειδή το $0\in\left[\underset{-}{\alpha-\beta},\underset{+}{\beta-\alpha}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($g$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha+\beta$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής (αφού f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ γιατί αν,

$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)$ **(1)** και $x_1<x_2\Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$ **(2)**.

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$

Οπότε το σύνολο τιμών της h είναι
$h([\alpha,\beta])=[h(\beta),h(\alpha)]=[f(\beta)-2\beta,f(\alpha)-2\alpha]=[2(\alpha-\beta),2(\beta-\alpha)]$ και επειδή το $0\in\left[\underbrace{2(\alpha-\beta)}_{-},\underbrace{2(\beta-\alpha)}_{+}\right]$, τότε υπάρχει ακριβώς ($h$ γνησίως φθίνουσα) ένα $x_1\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $h(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=2x_1$.

Άσκηση 12

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x)=-e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Αν $f(2017)>0$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και g.

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2017)x^4+3x^3+1}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3+\left(\theta-1\right)x-1}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

3. Αν $f(1)<e$ και $g(-2)>-2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(-2,1)$.

Λύση

1. Είναι $f(x)g(x)=-e^x<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως οι συναρτήσεις f,g δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι και συνεχείς θα διατηρούν σταθερό πρόσημο, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μάλιστα ετερόσημες.

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(2017)>0$, θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Αφού $g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $g(2017)<0$.

- Αν $\theta=0$ τότε $|\eta\mu\vartheta|=|\vartheta|\Leftrightarrow|\vartheta|-|\eta\mu\vartheta|=0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(2017)x^4+3x^3+1}{-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(2017)x^4}{-x}=-g(2017)\lim_{x\to+\infty}x^3=-g(2017)(+\infty)\overset{g(2017)<0}{=}+\infty$$

- Αν $\theta\neq0$ τότε $|\eta\mu\vartheta|<|\vartheta|\Leftrightarrow|\vartheta|-|\eta\mu\vartheta|>0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(2017\right)x^4+3x^3+1}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3+\left(\theta-1\right)x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(2017\right)x^4}{\left(|\theta|-|\eta\mu\theta|\right)x^3}=\frac{g\left(2017\right)}{|\theta|-|\eta\mu\theta|}\lim_{x\to+\infty}x=$$

$$=\frac{g\left(2017\right)}{|\theta|-|\eta\mu\theta|}(+\infty)\underset{|\theta|-|\eta\mu\theta|>0}{\overset{g(2017)<0}{=}}-\infty.$$

3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2,1)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$, η οποία είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) στο $[-2,1]$.

Είναι $h(1)=g(1)-1<-1-1=-2<0,$ γιατί: $f(1)g(1)=-e\Leftrightarrow g(1)=\dfrac{-e}{f(1)}<-1$ αφού

$f(1)<e\Leftrightarrow\dfrac{e}{f(1)}>1\Leftrightarrow-\dfrac{e}{f(1)}<-1$.

Επίσης $h(-2)=g(-2)+2>-2+2=0\Leftrightarrow h(-2)>0$.

Άρα η h είναι συνεχής στο $\left[-2,1\right]$ και $h(-2)h(1)<0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-2,1\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=x_0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R},\ \alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$

<u>Λύση</u>

i. Είναι $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1=\left(\alpha^x+1\right)^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0)=-2$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=-\left(\alpha^x+1\right)=-\alpha^x-1$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1\right]}{3^x\cdot\left[3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4\right]}=\dfrac{-1}{4}$, αφού $0<\dfrac{\alpha}{3}<1, 0<\dfrac{1}{3}<1$ και $0<\dfrac{2}{3}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3+4\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}=-\infty$, αφού $\dfrac{\alpha}{2}>1,\dfrac{3}{2}>1$ και $0<\dfrac{1}{2}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

<u>Λύση</u>

i. Η σχέση $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, έχουμε:

$$1\le 4f(0)\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$$

Για $x=1$, έχουμε:

$$2\le 4f(1)\le 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$$

ii. Για $x\ne 0$, θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+1\le 4f\left(\frac{1}{x}\right)\le\left(\frac{1}{x}\right)^4+2\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\le x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}$ και $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4\right)=\frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x\to 0}x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x+3\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\frac{1}{4}+4\cdot 3}{0+3}=\frac{49}{12}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ (από ii), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

iv. Έστω $g(x)=f(x)-x$

Η g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$. Επίσης ισχύει:

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\cdot\left[f(1)-1\right]<0$ αφού $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)>0$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(1)<1$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0$

Άσκηση 15

i. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2x+x^2g(x)}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{2f(x)-4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xh(x)+4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+4}{2}=2$$

ii. Είναι:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $xg(x)\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2$

- Αν $x>0$, τότε: $g(x)\le\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\le\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και

  επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 0.$

- Αν $x<0$, τότε: $g(x)\ge\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και επομένως

  $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2x+x^2g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[f^2(x)+\frac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\right]}{x^2\left[\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2+g(x)\right]}=\frac{4+4}{1+0}=8.$$

Αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}4\frac{\eta\mu^2(2x)}{(2x)^2}=4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(2x)}{(2x)}\right)^2=4\lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\right)^2=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha=f\left(x\right)$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha=f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-\alpha=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-\alpha\right)\left(\underbrace{2\left(\overbrace{f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2}^{*}\right)+3}_{>0}\right)=0\text{ , } \mathbf{(1)}$$

(*) την παράσταση $f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f\left(x\right)$ έτσι έχουμε $\Delta=-3\alpha^2\leq0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2\geq0\Rightarrow f^2\left(x\right)+\alpha f\left(x\right)+\alpha^2+3\geq3>0$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)-2\alpha^3+3f\left(x\right)-3\alpha=0\Leftrightarrow 2f^3\left(x\right)+3f\left(x\right)=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow$

$4x+1=2\alpha^3+3\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha-1}{4}$, δηλαδή για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$

και $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

άρα $2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 4x_1+1=4x_2+1$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$3f\left(f^{-1}(x)\right)+2\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$

$3x+2x^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-1}{4}.$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3}\Rightarrow 2x_1^{\ 3}<2x_2^{\ 3}$

και $x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1$

άρα

$2x_1^{\ 3}+3x_1-1<2x_2^{\ 3}+3x_2-1\Rightarrow \dfrac{2x_1^{\ 3}+3x_1-1}{4}<\dfrac{2x_2^{\ 3}+3x_2-1}{4}\Rightarrow$
$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2),$

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow$

$\dfrac{2x^3+3x-1}{4}=x\Leftrightarrow 2x^3-x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

iv. Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε:

$f(2e^{x-1})=f(3-x)\Leftrightarrow 2e^{x-1}=3-x\Leftrightarrow 2e^{x-1}+x-3=0$ (1)

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

Έστω $g(x)=2e^{x-1}+x-3$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\Rightarrow 2e^{x_1-1}<2e^{x_2-1}$

και $x_1<x_2\Rightarrow x_1-3<x_2-3$

άρα $2e^{x_1-1}+x_1-3<2e^{x_2-1}+x_2-3\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει
$f^2(x)+4\eta\mu^2 x = x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0)=\sqrt{10}$.
iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1-\sqrt{10}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$f^2(x)+4\eta\mu^2 x = x^2-3x+4f(x)\eta\mu x+10 \Leftrightarrow$
$\left[f(x)-2\eta\mu x\right]^2 = x^2-3x+10>0,$ (1) γιατί $\Delta=9-40=-31<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο $x^2-3x+10$ είναι ομόσημο του $1>0$. Οπότε $f(x)-2\eta\mu x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού η $g(x)=f(x)-2\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ii. Είναι: $f(0)=\sqrt{10}$, οπότε $g(0)=f(0)-2\eta\mu 0=f(0)=\sqrt{10}>0$ και από (i) έχουμε:
$g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-2\eta\mu x>0$. Άρα $f(x)-2\eta\mu x=\sqrt{x^2-3x+10}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+10}+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{10}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}+2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)\overset{(*)}{=}-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2+0=-\frac{3\sqrt{10}}{20}+2 .$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+10}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x}{x\left(\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x+10}+\sqrt{10}}\right)=\frac{-3}{2\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$(*)\lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2\cdot 1=2,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=0$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης fofog.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g=\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} / 2-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R} / x\leq 3\}=(-\infty,3]\neq\varnothing$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,3]$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1=\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x+1}$, (πρέπει $y\geq -1$) $\Leftrightarrow x=(y+1)^2-1$ οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2-1$ με $x\geq -1$

iv. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$D_{fofog} = D_{fo(fog)} = \left\{ x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1 \right\} = (-\infty, 3] \neq \varnothing$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με

$x_1 < x_2 \overset{\text{g γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$

$f\left(f\left(g\left(x_1\right)\right)\right) > f\left(f\left(g\left(x_2\right)\right)\right)$.

Άρα η συνάρτηση fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+\kappa\cdot\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa\cdot1}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$f(0)=\lambda$

Άρα: $\lambda=4$ και $2+\kappa=4 \Leftrightarrow \kappa=2$

ii. Για $\kappa=2$ και $\lambda=4$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}+3\right)}=\left(+\infty\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right)=-\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=0,$$

αφού: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow\frac{-1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$

και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\ln(8x+1),\ x\in[0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$g(0)=f(0)=4>0$

$g(1)=f(1)-2\ln 9=2-2\ln 9=2\ln\frac{e}{9}<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2) \\ \\ \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$ και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

Λύση

i. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)}=-\dfrac{1}{16}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\kappa x+1}{2(x-2)(x+2)}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+1)=2\kappa+1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}2(x-2)(x+2)=0$

Αν $2\kappa+1\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq -\dfrac{1}{2}$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Αν $2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-\dfrac{1}{2}$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x+1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{4x^2\left(x-2\right)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x)+2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x)-2x$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3xh(x)-2x}{\eta\mu x} = 3\cdot 5 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15-2 = 13$$

iv. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} g(x) \overset{x=u+3}{=} \lim\limits_{u\to 0} g(u+3) = \lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)+f(u)\right] = 13+(-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'(x)=2e^{2x}+5>0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5 \Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f(2x-1)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x = y = 0$ η σχέση

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$$f(0) = f(0) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Επίσης $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0 + h) = f(x_0) \cdot e^h + f(h) \cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[f(x_0) \cdot \frac{e^h - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} \cdot e^{x_0} \right] =$$

$$f(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \cdot e^{x_0} = f(x_0) \cdot e^0 + 1 \cdot e^{x_0} = f(x_0) + e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h-0} = g'(0) = e^0$ με $g(x) = e^x$.

Άρα $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ και θέτοντας

$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ παίρνουμε: $f(x) \geq 0 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha + \beta^x \cdot \ln\beta - 5e^x$, οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha + \beta^0 \ln\beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5.$$

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h(0)=h(1)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Είναι $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)\cdot e^{g(x)}+f^2(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f^2(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)\right]=0\Leftrightarrow 2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1$$

Λύση

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f(x)-3x\right)-\lambda^2+\frac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\frac{f(x)}{x}+\lambda+\frac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\text{ ή }\lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει $g(0)g(1)=\underbrace{f(0)}_{-}\left[\underbrace{f(1)-2}_{+}\right]<0$,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=2\xi$.

Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2).

$g(\rho_1)=g(\rho_2)$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε, $g'(x_0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)=0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0,$$

άρα το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot \eta\mu x+e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2}\ ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L' Hospital)

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot \eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

<u>Λύση</u>

Έστω $B\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f .

Η παράγωγος της f ισούται με $f'(x)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-x_0{}^2=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

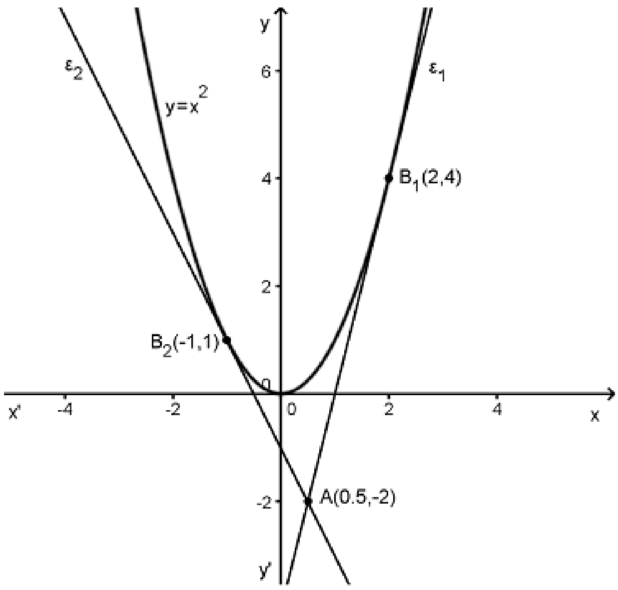
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-x_0{}^2=2x_0(\frac{1}{2}-x_0)\Leftrightarrow x_0{}^2-x_0-2=0\Leftrightarrow \left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1 : y=4x-4$ και σημείο επαφής το $B_1(2,4)$ και

$\varepsilon_2 : y=-2x-1$ και σημείο επαφής το $B_2(-1,1)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3)\Leftrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

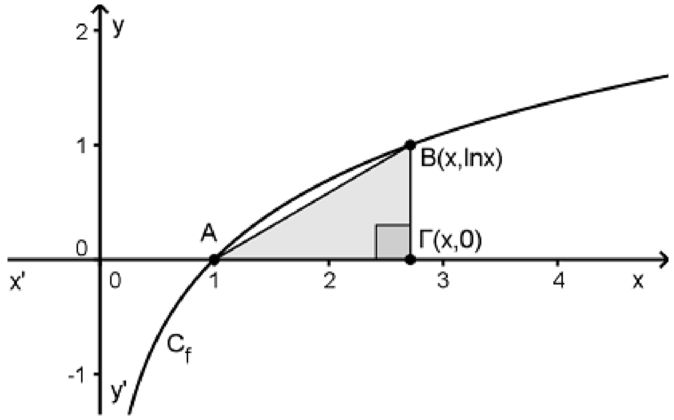
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

<u>Λύση</u>

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0)$, $x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0,5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}[2-1]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$.
Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα
$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2 .$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0 .$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-2x$, άρα

$g'(1)=f'(1)-e^{0}-\dfrac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

<u>Λύση</u>

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = \left(2 \cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) = 2 \cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x = 0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

    i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

    ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

    i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

    ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

$f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)$ **(1)**

Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι περιττή.

ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=-f'(x)$ **(2)**

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = \left(f(u)\right)' = f'(u) \cdot u' = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

$$g'(x) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)' \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot \left(e^{f(x)}\right)' + \left(\eta\mu x + x\right)' =$$

$$\left(5x^4 - \eta\mu x\right) \cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

   Οπότε $g'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

   Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

   Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

Λύση

i. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu(2\pi)=0$ και $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu(\pi)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Έτσι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1 \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\right) = 0.$$

ii. $$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1 \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^3\cdot f(x)\right)'=3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x)=3x^2\cdot f(x)+x^2\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} c_1, & x>0 \\ c_2, & x<0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2\Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε $g(1)=1^3\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^3\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{x^3}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=-2\Leftrightarrow f(x)=-\frac{2}{x^3}$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>0 \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0 \end{cases}$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$ και

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x = 1$ ή $x = 4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	11	↘	-16	↗	

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[4, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 4]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = 11$ και στη θέση $x = 4$ τοπικό ελάχιστο το $f(4) = -16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f((-\infty, 1]) = (-\infty, 11]$,

$f([1,4])=[-16,11]$ και

$f([4,+\infty))=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.

- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.

- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	-∞		5/2		+∞
f″(x)		-	0	+	

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\dfrac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\dfrac{5}{2},f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

<u>Λύση</u>

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu-1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu-1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu-1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \mathbf{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \mathbf{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \dfrac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x}\cdot x\cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

και

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{\left(e^u\right)'}{\left(u\right)'} = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot 0 = 0$,

αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

και

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$.

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A(x_0,f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

<u>Λύση</u>

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Επομένως στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

<u>Σχόλιο</u>: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(2)}{6-2} = \frac{f(6) - f(2)}{4}. \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = f(2) - f(1) + 4 \cdot \frac{f(6) - f(2)}{4} = f(6) - f(1) = 0.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(x_0\right)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'\left(x\right)=2x-\sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''\left(x\right)=2+\eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1\le\eta\mu x\le1\Leftrightarrow 2-1\le2+\eta\mu x\le2+1\Leftrightarrow$$

$$1\le2+\eta\mu x\le3\Leftrightarrow1\le f''\left(x\right)\le3,$$

άρα $f''\left(x\right)>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'\left(0\right)=-\sigma\upsilon\nu0=-1<0$,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\pi>0$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(x_0\right)=0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$, οπότε:

για $x<x_0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$ και

για $x>x_0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_0)=0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1 \Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0 \Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(1)=f(1)=1$, $f(x)>0$ και $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$, $x>0$.

ii. Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Αποδείξτε ότι $2\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_{f(1)}^{f(2)}\left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx=4\sqrt{e}-1$.

Λύση

i. $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^4f''(x)-x^2f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4f''(x)=x^2f'(x)-2xf(x)\Leftrightarrow f''(x)=\frac{x^2f'(x)-(x^2)'f(x)}{x^4}\Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'$$

Τότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}+c_1$ και για $x=1$ έχουμε

$f'(1)=f(1)+c_1\Rightarrow c_1=0$, οπότε ισχύει

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\ln(f(x))\right)'=\left(-\frac{1}{x}\right)' .$$

Τότε υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\ln\left(f(x)\right)=-\frac{1}{x}+c_2$ και για $x=1$ έχουμε

$\ln\left(f(1)\right)=-1+c_2\Rightarrow c_2=1$, οπότε ισχύει

$$\ln\left(f(x)\right)=-\frac{1}{x}+1\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}\ ,\ x>0.$$

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)'=e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)'=e^{\frac{x-1}{x}}\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{x-1}{x}}>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f=(0,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f θα είναι $f(A_f)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,e)$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$, αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}u=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-(+\infty)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{y\to1}e^y=e$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=1$.

iii. Θέτουμε $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)\Rightarrow dx=f'(y)\,dy$. Για $x=f(1)$ έχουμε $y=1$ και για $x=f(2)$ έχουμε $y=2$.

Έχουμε λοιπόν

$$2\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_{f(1)}^{f(2)}\left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx=2\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_1^2 y^2f'(y)\,dy=$$

$$2\int_1^2 xf(x)\,dx+\left[y^2f(y)\right]_1^2-2\int_1^2 yf(y)\,dy+\left[y^2f(y)\right]_1^2=4f(2)-f(1)=4e^{\frac{1}{2}}-1=4\sqrt{e}-1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και ισχύει $xf'(x)=2x+1$, για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2x+\ln x$, $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2x+\ln x\le 3x-1$$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2-\int_1^2 f(x)\,dx}{x-2}-\dfrac{\int_1^2 f(x)\,dx-3}{x-1}=0$ έχει, ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,2)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι $xf'(x)=2x+1\Leftrightarrow f'(x)=2+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'$

Άρα $f(x)=2x+\ln x+c$, $c\in\mathbb{R}$ και για $x=1$ δίνει: $f(1)=2+c$.

Επομένως: $2+c=2\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=2x+\ln x, x>0$.

ii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'=2+\dfrac{1}{x}>0$ και $f''(x)=\left(2+\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

iii. Είναι:

- $f(1)=2$
- $f'(1)=2+1=3$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι: $y-2=3(x-1)$ ή $y=3x-1$ και επειδή η $f(x)=2x+\ln x$ κοίλη (από iii.) έχουμε: $2x+\ln x\le 3x-1$. Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-1)\left(2-\int_1^2 f(x)\,dx\right)-(x-2)\left(\int_1^2 f(x)\,dx-3\right)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(1)=\int_1^2 f(x)\,dx-3>0$ και $g(2)=2-\int_1^2 f(x)\,dx<0$ γιατί: Αφού $x>1\Leftrightarrow \ln x>0$, οπότε

$$f(x)=2x+\ln x>2x\Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx>2\int_1^2 x\,dx=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=3\Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx-3>0 \text{ και}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx-3>0\Rightarrow -\int_1^2 f(x)\,dx<-3\Rightarrow 2-\int_1^2 f(x)\,dx<2-3=-1<0 \ .$$

Δηλαδή έχουμε $g(1)g(2)<0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0$.

Επειδή $g'(x)=\left(2-\int_1^2 f(x)\,dx\right)-\left(\int_1^2 f(x)\,dx-3\right)=\underset{(-)}{g(2)}-\underset{(+)}{g(1)}<0$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$, οπότε η ρίζα της x_0 είναι μοναδική.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$.

iii. Αν ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ και $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$.

Λύση

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(\dfrac{2e}{x}+2\ln x\right)'=\dfrac{-2e}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-e)}{x^2}$

Είναι:

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e$,άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e$,άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f για $x=e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Δηλαδή $f(x)\geq f(e)$ με τιμή $f(e)=2+2=4$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$. Ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln e^{x-e} \Leftrightarrow$$

$$x\ln\frac{x}{e} \geq x-e \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e) \geq x-e \Leftrightarrow x\ln x - x \geq x-e \Leftrightarrow$$

$$x\ln x-2x+e\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x-2+\frac{e}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$2\ln x+\dfrac{2e}{x}\geq 4 \Leftrightarrow f(x)\geq 4$ που ισχύει από i). (Η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα)

iii. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x - \ln e) \geq (x-e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \geq 0 \ \textbf{(1)}$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda, x>0$ και $\lambda>0$, τότε:

$$g'(x) = \ln x + 1 - 1 - \ln\lambda = \ln x - \ln\lambda$$

Από **(1)** έχουμε: $g(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$. Αλλά $g(e)=0$. Άρα $g(x)\geq g(e)$ για κάθε $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x=e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο οπότε από το θεώρημα Fermat έχουμε:

$$g'(e)=0 \Leftrightarrow \ln e - \ln\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e.$$

iv. Είναι: $f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x, x>0$

Παρατηρούμε ότι:

$1\leq x\leq e^2 \Leftrightarrow \ln x \geq 0$ και $\frac{2e}{x}>0$, οπότε: $f(x)>0$ στο $[0,e^2]$, άρα

$$E = \int_1^{e^2}\left(\frac{2e}{x} + 2\ln x\right)dx = 2e\left[\ln x\right]_1^{e^2} + 2\int_1^{e^2}\ln x dx =$$

$$= 2\cdot e\ln e^2 + 2\int_1^{e^2}(x)'\ln x dx = 4e + 2\left[x\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= 4e + 2e^2\ln e^2 - (e^2-1) = 4e + 4e^2 - e^2 + 1 = 3e^2 + 4e + 1.$$

Άσκηση 4

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f'(x)f(x),(1)$, $f(0)=1$ και $f'(0)=\frac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x/2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-2}^{2}x^{2018}\ln f(x)dx=0$.

γ) Αν η συνεχής συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-2017\int_0^x\frac{g(t)}{2017+f^2(t)}dt=1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,1]$.

Λύση

α) Έχουμε $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f'(x)f(x)\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)\right)'=f'(x)f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)\right)'e^{-x}-f'(x)f(x)e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f'(x)f(x)e^{-x}\right)'=0.$ Οπότε $f'(x)f(x)e^{-x}=c,\ c\in\mathbb{R}$. **(2)**

Για $x=0\Rightarrow f'(0)f(0)=c\Rightarrow 1\cdot\frac{1}{2}=c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

Η **(2)** γίνεται $f'(x)f(x)e^{-x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x+c_1$

Για $x=0\Rightarrow f^2(0)=1+c_1\Rightarrow 1=1+c_1\Rightarrow c_1=0$, οπότε $f^2(x)=e^x$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}:f(x_0)=0\Rightarrow f^2(x_0)=e^{x_0}\Rightarrow 0=e^{x_0}$ άτοπο, οπότε $f(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Έχουμε $f(0)=1>0\Rightarrow f(x)>0$, άρα $f^2(x)=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x}{2}},\ x\in\mathbb{R}$.

β) $\int_{-2}^{2}x^{2018}\ln f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^{2018}\ln e^{\frac{x}{2}}dx=\int_{-2}^{2}x^{2018}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^{2019}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{2020}}{2020}\right]_{-2}^{2}=$

$=\frac{1}{4040}\left[2^{2020}-(-2)^{2020}\right]=\frac{1}{4040}\left(2^{2020}-2^{2020}\right)=0$.

γ) Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στη συνάρτηση $h(x)=2x-1-\int_0^x \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής σαν έκφραση συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)=2\cdot 0-1-\int_0^0 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt=-1<0$ και

$h(1)=2\cdot 1-1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt=1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt\overset{(*)}{\geq} 0$

$(*)$ Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)$ είναι το $[0,1]$, οπότε

$0\leq g(t)\leq 1\Rightarrow \int_0^1 0dt\leq \int_0^1 g(t)dt\leq \int_0^1 1dt\Rightarrow 0\leq \int_0^1 g(t)dt\leq 1$, επίσης έχουμε

$\frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}\leq \frac{2017g(t)}{2017}=g(t)\Rightarrow \int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt\leq \int_0^1 g(t)dt\leq 1\Rightarrow 0\leq 1-\int_0^1 \frac{2017g(t)}{2017+f^2(t)}dt$ Άρα $h(0)h(1)\leq 0$

- Αν $h(0)h(1)<0\Rightarrow x_0\in(0,1):h(x_0)=0$
- Αν $h(1)=0\Rightarrow x_0=1$, τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1]:h(x_0)=0$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x-1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda>0$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2,f(e^2))$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα xx'.

<u>Λύση</u>

i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>e$ τότε: $E(\lambda)=\int_e^\lambda f(x)dx=\int_e^\lambda(\ln x-1)dx=\int_e^\lambda(x)'\ln x dx-(\lambda-e)=$

  $=[x\ln x]_e^\lambda-\int_e^\lambda x\cdot\frac{1}{x}dx-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-e-(\lambda-e)-\lambda+e=$

  $=\lambda\ln\lambda-e-\lambda+e-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$ (Αφού $e<x<\lambda$ το $\ln x>1$)

- Αν $0<\lambda<e$, τότε

  $E(\lambda)=\int_\lambda^e(-f(x))dx=\int_\lambda^e(1-\ln x)dx=(e-\lambda)-\int_\lambda^e(x)'\ln x dx=$

  $=e-\lambda-[x\ln x]_\lambda^e+\int_\lambda^e x(\ln x)'dx=$

  $=e-\lambda-e+\lambda\ln\lambda+(e-\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$.

ii. Έχουμε: $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda-2\lambda+e)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\ln\lambda-0+e=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}+e=$

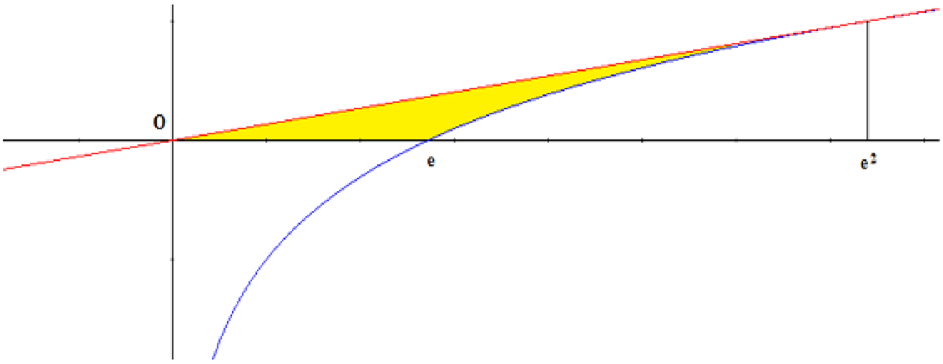
$$=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}+e=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}\right)+e=\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)+e=e.$$

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι:
$y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2)$

Αλλά $f(e^2) = \ln e^2 - 1 = 1$ και $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Αφού $f'(x) = \frac{1}{x}$

Άρα η εξίσωση είναι: $y - 1 = \frac{1}{e^2}\left(x - e^2\right)$ ή $y = \frac{1}{e^2}x$.

iv. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα f κοίλη, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο Μ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.



Επομένως:

$$E = \int_0^{e^2} \frac{1}{e^2} x dx - \int_e^{e^2} (\ln x - 1) dx =$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln x dx + \left(e^2 - e\right) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{e^4}{2} - \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - [x\ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x\frac{1}{x} dx + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e^2 \ln e^2 + e\ln e + e^2 - e + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2\cancel{e^2} + \cancel{e} + \cancel{e^2} - \cancel{e} + \cancel{e^2} - e = (\frac{e^2}{2} - e) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)\,dt=+\infty$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)\,dt=0$.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει $e^{2x}-1>0$ και $2x>0\Leftrightarrow e^{2x}>e^{0}$ και $x>0\Leftrightarrow x>0\Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)\right)'-\left(\ln(2x)\right)'=\frac{1}{e^{2x}-1}\left(e^{2x}-1\right)'-\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}=$$

$$\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x\left(e^{2x}-1\right)}=\frac{g(x)}{x\left(e^{2x}-1\right)}$$, όπου $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$, έτσι έχουμε $g'(x)=2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}=4xe^{2x}>0$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2xe^{2x}-e^{2x}+1\right)=0$

x	0	$+\infty$
g'	‖	$+$
g	‖ **0**	$\nearrow$

Άρα $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow$

Επίσης

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)\right)=\lim_{x\to0}\left(\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right)\overset{(*)}{=}\lim_{u\to1}\ln u=0,\quad (*)\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-1\right)-\ln(2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right]\overset{(**)}{=}\lim_{y\to+\infty}\ln y=+\infty,$$

$$(**)\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2}=+\infty$$

Ακρότατα η συνάρτηση f δεν έχει

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο

$$f(D_f)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty).$$

ii. Αν $x+2<t<x+3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x+2)<f(t)<f(x+3) \Rightarrow \int_{x+2}^{x+3} f(x+2)dt < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < \int_{x+2}^{x+3} f(x+3)dt$

$$f(x+2)\int_{x+2}^{x+3} 1dt < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < f(x+3)\int_{x+2}^{x+3} 1dt \Rightarrow f(x+2) < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < f(x+3)$$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} < \displaystyle\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < \ln\dfrac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)}$ **(1)** και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2(x+2)}-1\right)'}{\left(2(x+2)\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2(x+2)}}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} = +\infty$$

Όμοια $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)} = +\infty$

άρα από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)\,dt = +\infty$

iii. Αν $\dfrac{2}{x}<t<\dfrac{3}{x} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\dfrac{2}{x}\right)<f(t)<f\left(\dfrac{3}{x}\right) \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\frac{2}{x}\right)dt < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\frac{3}{x}\right)dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}f\left(\frac{2}{x}\right) < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < \frac{1}{x}f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) < x\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$\ln\left(\dfrac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) < \displaystyle\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt < \ln\left(\dfrac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right)$, **(1)**

έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) \overset{\frac{2}{x}=h}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) = \ln1 = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) \overset{\frac{3}{x}=h}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) = \ln1 = 0$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής στη σχέση **(1)**, έτσι έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)\,dt = 0$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iv. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$

<u>Λύση</u>

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Από i) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(R)=(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))$.

Είναι: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x+x^3+x-2)=0-\infty-\infty-2=-\infty$

και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3+x-2)=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$.

iv. Είναι: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $x=f(y)$, οπότε είναι: $dx=f'(y)dy$. Επίσης: $f(0)=-1$ και $f(1)=e$. Άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx=\int_0^1 f^{-1}(f(y))f'(y)dy=\int_0^1 yf'(y)dy=[yf(y)]_0^1-\int_0^1 (y)'f(y)dy=$$

$$=1\cdot f(1)-0-\int_0^1 f(y)dy=f(1)-\int_0^1 (e^y+y^3+y-2)dy=e-[e^y+\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}-2y]_0^1=$$

$$e-[e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2-(e^0+0+0-0)]=\cancel{e}-\cancel{e}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=\frac{9}{4}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,2\right]$ και ισχύει $f(1)+\frac{3}{2}=f(2)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=x_0$.

Γ2. Αν η f' είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$ και $f'(1)>2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=2x_1$.

Γ3. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\left[1,2\right]$ και δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+2018$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2\in\left(0,2\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=x_2$.

Λύση

Γ1.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,2\right]$ θα είναι και συνεχής στο $\left[0,2\right]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]\subseteq\left[0,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1,2\right)$ με $g'(x)=f'(x)-x$. Επίσης $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}$ και $g(2)=f(2)-2=f(1)+\frac{3}{2}-2=f(1)-\frac{1}{2}$. Οπότε $g(1)=g(2)$. Από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow f'(x_0)=x_0$.

Γ2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f'(x)-2x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$.

Η συνάρτηση $k(x)$ είναι συνεχής και στο $\left[1,x_0\right]\subseteq\left[1,2\right]$, όπου x_0 η ρίζα του Γ1 ερωτήματος.

Είναι $k(1)=f'(1)-2>0$ από την υπόθεση και $k(x_0)=f'(x_0)-2x_0=x_0-2x_0=-x_0<0$, αφού $x_0\in\left(1,2\right)$.

Οπότε $k(1)k(x_0)<0$. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(1,x_0\right)\subseteq\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $k(x_1)=0\Leftrightarrow f'(x_1)-2x_1=0\Leftrightarrow f'(x_1)=2x_1$.

Γ3.

Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $\left[1,2\right]$, θα ισχύει $1\le f(x)\le 2$, (1) για κάθε $x\in\left[0,2\right]$.

Επίσης, αφού δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+2018$, θα ισχύει $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\left[0,2\right]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$.

Είναι $h(0) = f(0) > 0$, από την (1) και $h(2) = f(2) - 2 \leq 0$, επίσης από τη (1).
Τότε $h(0)h(2) \leq 0$. Ισχύει το Θ. Bolzano για την h στο $\left[0,2\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(0,2\right]$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - x_2 = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = x_2$.
Επειδή $h'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$, τότε $h'(x) > 0$ ή $h'(x) < 0$ οπότε η συνάρτηση h θα είναι γνησίως μονότονη. Άρα το $x_2 \in \left(0,2\right]$ θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f , όχι πολυωνυμική, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$ με $f(2)=2f(1)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(1,2\right)$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$, (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\left(1,2\right)$.

Γ₂. Να αποδείξετε ότι η ρίζα x_0 της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

Γ₃.Αν $g(x)=f(x)-x$ τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη το x_0, διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Είναι:

$$xf'(x)=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-\left(x\right)'f(x)=0\overset{x\neq 0,\,\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\,x\in(1,2)}{\Leftrightarrow}\frac{xf'(x)-\left(x\right)'f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ \ x\in\left[1,2\right]$.

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$, τότε η συνάρτηση h θα είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1,2\right)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Επίσης $h(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$ και $\mathrm{h}(2)=\dfrac{\mathrm{f}(2)}{2}=\dfrac{2\mathrm{f}(1)}{2}=\mathrm{f}(1)$. Επομένως $h(1)=h(2)$. Ισχύει, λοιπόν το Θ.Rolle που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)=f(x_0).$$

Άρα η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\mathrm{x}_0\in\left(1,2\right)$.

Γ₂. Έστω ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει 2 ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\left(1,2\right)$ με $\rho_1<\rho_2$.

Αν $t(x)=xf'(x)-f(x)$, τότε η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]\subseteq\left[1,2\right]$και παραγωγίσιμη στο $\left(\rho_1,\rho_2\right)$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$, με $t'(x)=\cancel{f'(x)}+xf''(x)-\cancel{f'(x)}=xf''(x)$. Ακόμα $t(\rho_1)=t(\rho_2)=0$.

Επομένως, από το Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\rho_1,\rho_2\right)\subseteq\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $t'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=0$, που είναι **άτοπο**, αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(1,2\right)$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{t}(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow\mathrm{xf}'(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow\mathrm{xf}'(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ δεν έχει 2 ρίζες στο $\left(1,2\right)$, οπότε η ρίζα $x_0\in\left(1,2\right)$ του Γ1 ερωτήματος είναι μοναδική.

Γ₃. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x)=f(x)-x$ στο σημείο με τετμημένη το x_0 έχει εξίσωση: $y-g(x_0)=g'(x_0)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y-\left(f(x_0)-x_0\right)=\left(f'(x_0)-1\right)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\left(f'(x_0)-1\right)x-x_0f'(x_0)+\cancel{x_0}+f(x_0)-\cancel{x_0}\Leftrightarrow\Leftrightarrow y=\left(f'(x_0)-1\right)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ (1).

Πρέπει το $\mathrm{O}(0,0)$ να την επαληθεύει, οπότε για $x=y=0$ η (1) μας δίνει:
$0=\left(f'(x_0)-1\right)\cdot 0-x_0 f'(x_0)+f(x_0)\Leftrightarrow -x_0 f'(x_0)+f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0 f'(x_0)$ που **ισχύει** σύμφωνα με το Γ1 ερώτημα.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Γ1: Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2:Να βρείτε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=e^x$, $x\in R$.

Γ3:Αν $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο $A(0,1)$.

Γ4: Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται, μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g και της ευθείας $x=1$.

Λύση

Γ1: Για $x=y=0$ η σχέση $f(x+y)=f(x)f(y)$ μας δίνει:

$f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0\Leftrightarrow f(0)=1 \text{ ή } f(0)=0$ και επειδή $f(x)>0$ τότε έχουμε $f(0)=1$.

$$f'(0)=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1,\ (1)$$

Έστω $x_0\in R$, τότε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x=h+x_0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)f(x_0)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\big(f(h)-1\big)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)f'(0)\overset{(1)}{=}f(x_0).$$

Οπότε $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2: Αφού $f'(x)=f(x)\overset{\varepsilon\varphi.2.6}{\Rightarrow} f(x)=ce^x$, $c\in R$. (2)

Επειδή $f(0)=1$, η (2) για $x=0$ έχουμε $f(0)=ce^0\Rightarrow 1=c$.

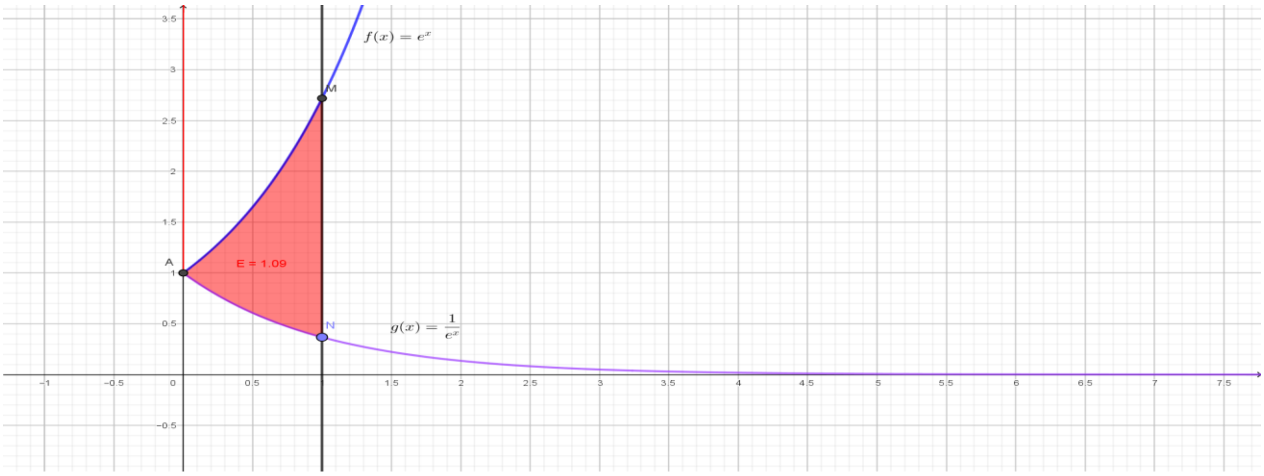
Άρα $f(x)=e^x$, $x\in R$.

Γ3: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$.

Προφανής ρίζα είναι η $x=0$ αφού $h(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0}=0$.

Επίσης $h'(x)=\left[e^x-\dfrac{1}{e^x}\right]'=e^x+\dfrac{1}{e^x}>0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

Αφού $f(0)=g(0)=1$ το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$.



Γ4:

Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x} \right) dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = \left[e^x \right]_0^1 + \left[e^{-x} \right]_0^1 = e - 1 + \frac{1}{e} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2$$

τ.μ.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+1,\ \ x>0$.

Γ₁. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

Γ₂. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της $f\left(x\right)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του λ∈IR.

Γ₃. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο ακρότατο της και της ευθείας $x=\dfrac{1}{e}$

Γ₄. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(Ω), του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας $y=-x+1$ και των ευθειών $x=\dfrac{1}{e},\ x=\lambda$ για $0<\lambda<\dfrac{1}{e}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\Omega)$. Ποιου χωρίου το εμβαδόν παριστάνει το όριο αυτό;

<u>Λύση</u>

Γ₁.

- Η είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων

- $f\,'(x)=\dfrac{(\ln x)'x-\ln x\cdot x'}{x^2}-1=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$ και η οποία έχει προφανή λύση την $x_0=1$

- $f\,''(\mathrm{x})=\dfrac{(1-\ln x-x^2)'\cdot x^2-(1-\ln x-x^2)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{\left(-\frac{1}{x}-2x\right)x^2-2x(1-\ln x-x^2)}{x^4}$

$=\dfrac{-x-2x^3-2x(1-\ln x-x^2)}{x^4}=\dfrac{-x-2x^3-2x+2x\ln x+2x^3}{x^4}=\dfrac{2x\ln x-3x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

$f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\ln x-3}{x^3}=0\Leftrightarrow\ln x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$

- $\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln x-x^2\right)\dfrac{1}{x^2}=\left(+\infty\right)\left(+\infty\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{x}-2x}{2x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)=-1$

- Ασύμπτωτες : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\mathrm{lnx}}{x}-x+1\right)=(-\infty)-0+1=-\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$,είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη .

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\ln x}{x}-x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}-1+\frac{1}{x}\right)=0-1+0$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-x+1+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=0+1=1$

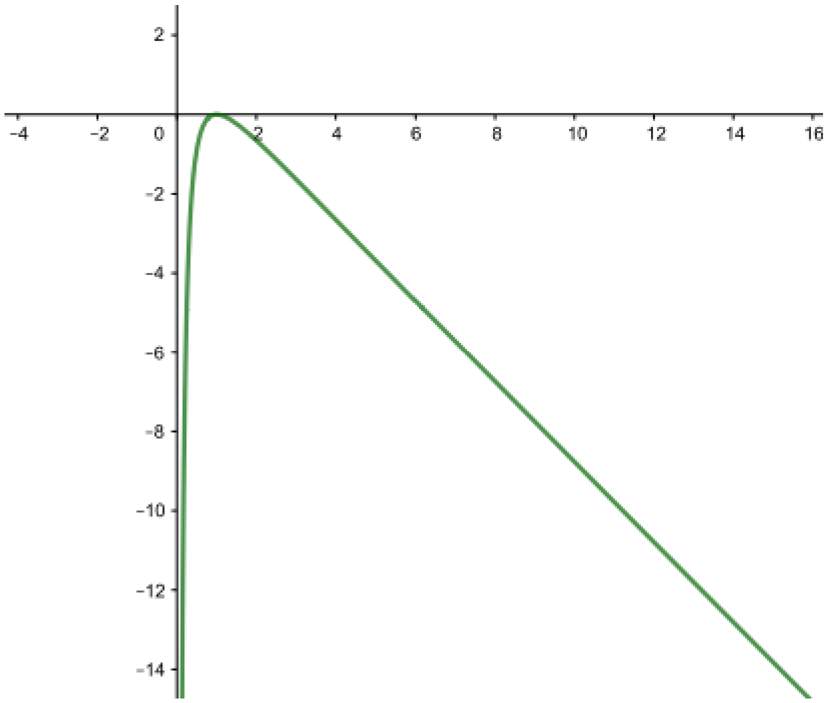
αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Άρα η ευθεία $y=-x+1$είναι πλάγια ασύμπτωτη

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-x+1\right)=-\infty$
- Τα πρόσημα των f'', f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

x		0		1		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
f''			$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	-1
f'			$+$		$-$		$-$	
f		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$
				τ.μέγιστο		Σ. Καμπής		

Το σύνολο τιμών της f είναι το: $f(D_f)=f((0,1])\cup f([1,+\infty))=(-\infty,0]\cup(-\infty,0]=(-\infty,0]$



Γ₂.

- Για $\lambda > 0$, έχουμε $\lambda \notin f\left(D_f\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ είναι αδύνατη (καμία λύση).
- Για $\lambda = 0$, έχουμε $\lambda \in f\left(D_f\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ είναι έχει μοναδική λύση την $x = 1$.
- Για $\lambda < 0$, έχουμε $\lambda \in f\left((0,1]\right) = (-\infty, 0]$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda \in f\left([1,+\infty)\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Γ₃. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο ακρότατο της $x_0 = 1$, είναι :

$y - f\left(1\right) = f'\left(1\right)\left(x-1\right) \Leftrightarrow y = 0$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |\, f(x)\,|\, \mathrm{dx} \overset{f(x)<0}{=} -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\, \mathrm{dx} = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(\frac{\mathrm{lnx}}{x} - \mathrm{x} + 1\right) \mathrm{dx} =$

$$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\mathrm{lnx}}{x}\, dx + \int_{\frac{1}{e}}^{1} (x-1) dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x)' \ln x dx + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} =$$

$$= -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = -\left[\frac{\ln^2 1}{2} - \frac{\ln^2 \frac{1}{e}}{2}\right] + \left[\left(1-1\right) - \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right)\right] =$$

$$= \frac{\left(-1\right)^2}{2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1 + e}{2e^2} > 0$$

Γ4. $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}|\,f(x)-(-x+1)\,|\,\mathrm{dx}=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}|\,\frac{\ln x}{x}-\mathrm{x}+1+x-1\,|\,\mathrm{dx}=$

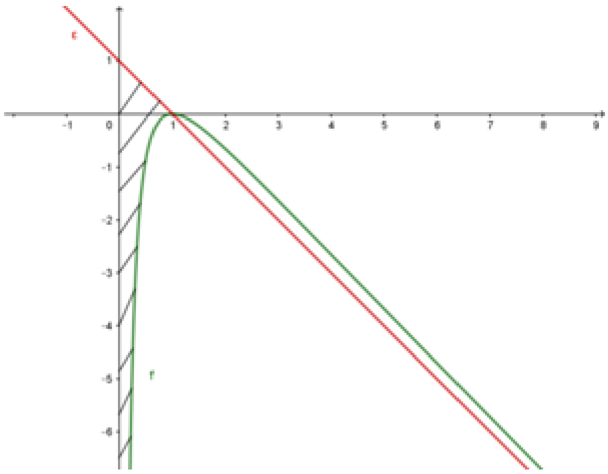
$\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}|\,\frac{\ln x}{x}\,|\,dx=-\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\frac{\ln x}{x}dx=\left\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\;\gamma\iota\alpha\;\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\;x\in(\lambda,\frac{1}{e})\subset(0,1)\;\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:\ln x<0\overset{x>0}{\Rightarrow}\frac{\ln x}{x}<0\right\}=$

$$=-\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\ln x\cdot(\ln x)'dx=-\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{e}}=-\left[\frac{\ln^2\frac{1}{e}}{2}-\frac{\ln^2\lambda}{2}\right]=-\frac{(-1)^2}{2}+\frac{\ln^2\lambda}{2}=\frac{\ln^2\lambda-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}E(\Omega)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2\lambda-1}{2}=\frac{(+\infty)-1}{2}=+\infty$$

Το παραπάνω όριο παριστάνει το εμβαδόν του ανοιχτού Χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ασύμπτωτή της στο +∞, και των κατακόρυφων ευθειών $x=0$ και $x=\frac{1}{e}$.

(βλέπε διπλανό σχήμα)



Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f^2(x)-4f(x)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8 - x^3,\ x,\alpha \in$ □
- $f(-1)=-3$ και $f(1)=1$

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η g έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.
Γ₂. Αν η συνάρτηση G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το αριθμό α.
Γ₃. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Γ₄. Αν $h(x)=e^x$, να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και της h και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την C_h , τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις της συνεχούς συνάρτησης f, επομένως η g θα έχει οπωσδήποτε παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ₂. Αφού η G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8-\alpha^3 \Leftrightarrow [C(\mathrm{t})]_{\alpha}^{x} = 8-\alpha^3 \Leftrightarrow G(x)-G(\alpha)=8-\alpha^3$$

Για $x=\alpha$ έχουμε:

$$G(\alpha)-G(\alpha)=8-\alpha^3 \Leftrightarrow 0=8-\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3=8 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Γ₃. Έχουμε $\int_{2}^{x} g(t)dt = [G(t)]_2^x \Leftrightarrow 8-x^3 = G(x)-G(2)$. Παραγωγίζουμε , οπότε

$G'(x) = (8-x^3)' \Leftrightarrow g(x) = -3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - 4\mathrm{xf}(\mathrm{x}) = -3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - 4\mathrm{xf}(\mathrm{x}) + 4x^2 = x^2$
$(\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x})^2 = x^2 \Leftrightarrow |\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x}| = |x|$ (1),

Θεωρώ τη συνάρτηση φ (x) = f(x) − 2x στο R και τότε η (1) γράφεται $|\varphi(\mathrm{x})| = |x|$, για κάθε x ϵ R.

- Αν $\mathrm{x} > 0$ τότε η $|\varphi(\mathrm{x})| = \mathrm{x}$

Η φ είναι συνεχής και φ(x) $\neq 0$ για κάθε x>0, άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο (0,+∞), επομένως και επειδή $\varphi(1)=f(1)-2=1-2=-1 \Rightarrow \varphi(x)<0$

Έτσι έχουμε $-\varphi(x)=x \Rightarrow -f(x)+2x=x \Rightarrow f(x)=x,\ x>0$

- Αν $\mathrm{x} < 0$ τότε η $|\varphi(\mathrm{x})| = -\mathrm{x}$

Η φ είναι συνεχής και φ(x) $\neq 0$ για κάθε x<0, άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$, επομένως και επειδή $\varphi(-1)=f(-1)-2=-3-2=-5 \Rightarrow \varphi(x)<0$

Έτσι έχουμε $-\varphi(x)=-x \Rightarrow -f(x)+2x=-x \Rightarrow f(x)=3x,\ x<0$

Έτσι έχουμε $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 3x, & x<0 \end{cases}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

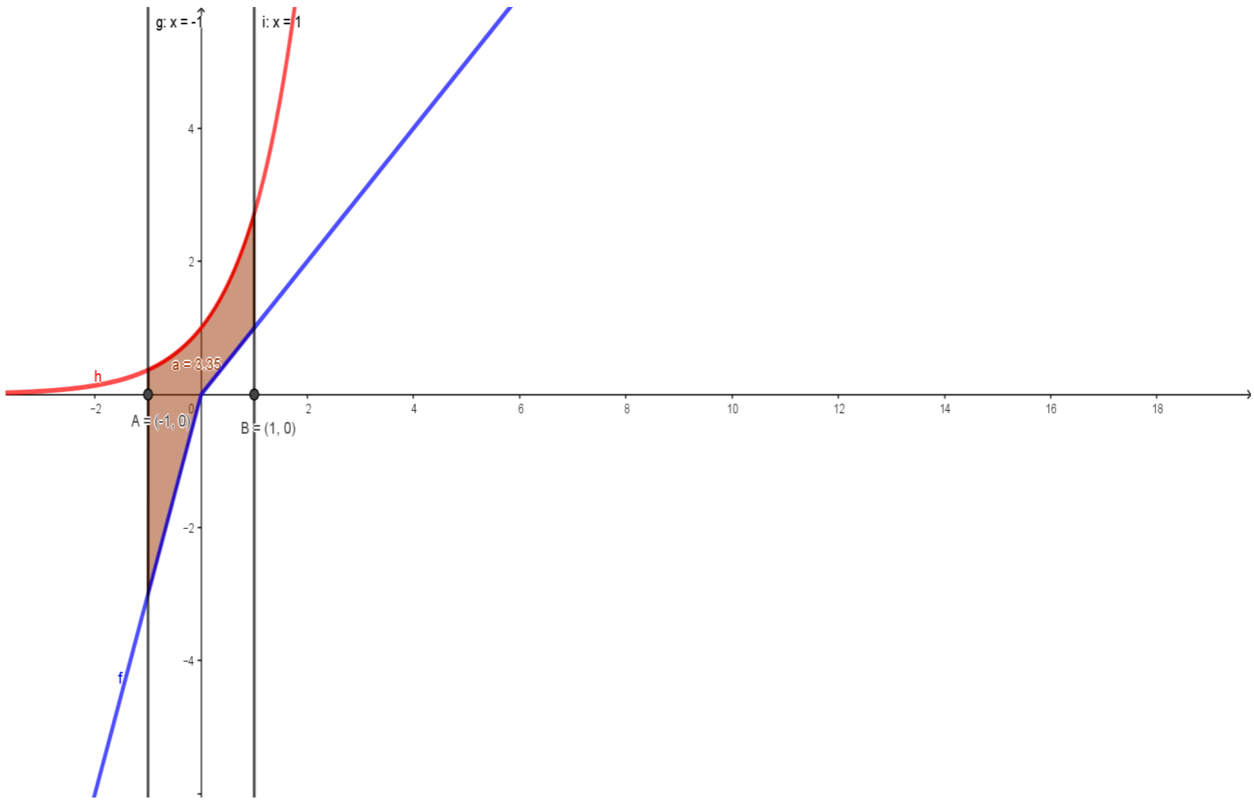
$x_0=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \Leftrightarrow 0=0=f(0)$

Άρα $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ 3x, & x<0 \end{cases}$

$Γ_4$.

- Έστω $x<0 \Rightarrow 3x<0$ και επειδή ισχύει $e^x>0$ θα έχουμε $e^x>3x \Leftrightarrow e^x-3x>0$
- Έστω $x\geq 0$, τότε από εφαρμογή του βιβλίου θα έχουμε

  $\ln x \leq x-1 \overset{x\to e^x}{\Rightarrow} \ln e^x \leq e^x-1 \Rightarrow x \leq e^x-1 \Rightarrow x+1 \leq e^x \Rightarrow x<x+1\leq e^x$
- Επομένως έχουμε $h(x)-f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.
- Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι: Ε(Ω)=$\int_{-1}^{1}[h(\chi)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}[h(\chi)-f(x)]dx+\int_{0}^{1}[h(\chi)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}(e^x-3x)dx+\int_{0}^{1}((e^x-x)dx=[e^x-\frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}+[e^x-\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}=e^0-e^{-1}+\frac{3}{2}+e^1-\frac{1}{2}-e^0$= e- e^{-1} +1 τετρ. Μονάδες


g: x = -1
i: x = 1
h
a = 3.35
A = (-1, 0)
B = (1, 0)
f

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ₁:Να εξετάσετε αν ισχύουν τα Θεωρήματα Bolzano, Rolle και Μέσης Τιμής για την f στο $\left[-1,2\right]$.

Γ₂:Να βρείτε την απόσταση των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, στα σημεία που έχουν τετμημένες τα διάφορα του μηδενός σημεία, στα οποία ισχύει το Θ. Rolle.

Γ₃:Να αποδείξετε, ότι το μέγιστο της f, το σημείο καμπής της f' και το ελάχιστο της f'' είναι σημεία συνευθειακά.

Γ₄:Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ευθεία του ερωτήματος Γ₃, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{2\eta\mu\left(2x-1\right)}{\left(2x-1\right)^2}$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3-6x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Είναι $f(-1)=1+2+1+1=5\ \kappa\alpha\iota\ f(2)=16-16+4+1=5$, οπότε $f(-1)f(2)>0$ που σημαίνει ότι **<u>δεν</u>** ισχύει το Θ.Bolzano.
- Είναι όμως $f(-1)=f(2)$, οπότε το Θ. Rolle ισχύει, άρα και το Θ.Μ.Τ.

Γ₂. Εφαρμόζοντας το Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in\left(-1,2\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 4x_0^3-6x_0^2+2x_0=0\Leftrightarrow 2x_0\left(2x_0^2-3x_0+1\right)=0.\ \Leftrightarrow x_0=0\ \acute{\eta}\ x_0=1\ \acute{\eta}\ x_0=\frac{1}{2}$$

Τα ζητούμενα σημεία που έχουν τετμημένες διάφορα του μηδενός είναι:

$\mathrm{A}\left(1,f(1)\right)=\left(1,1\right)$ και $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{17}{16}\right)$.

Επειδή είναι παράλληλες προς τον xx' ($f'(x_0)=0$), η απόσταση τους είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(1\right)=\frac{17}{16}-1=\frac{1}{16}$$

Γ₃. Είναι $f'(x)=4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0\ \acute{\eta}\ x=\dfrac{1}{2}\ \acute{\eta}\ x=1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	- 0	+ 0	- 0	+
f	↘	↗	↘	↗

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{17}{16}\right)$.

Είναι $f''(x)=12x^2-12x+2$ και $f'''(x)=24x-12=0 \Leftrightarrow 12(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Η κυρτότητα, τα σημεία καμπής της f' και το ελάχιστο της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'''	-	0	+
f''	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	κοίλη	σ.κ	κυρτή

Η συνάρτηση f' έχει σημείο καμπής το σημείο $\Lambda\left(\frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Η συνάρτηση f'' έχει ελάχιστο το σημείο $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, f''\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ έχουν την ίδια τετμημένη $\frac{1}{2}$.

Άρα βρίσκονται στην ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

Γ4. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2\eta\mu(2x-1)}{(2x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{5}{2x-1}\frac{\eta\mu(2x-1)}{2x-1}\right)=5\cdot(-\infty)\cdot 1=-\infty$.

Ανάλογα: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x)=+\infty$.

Άρα η ευθεία $x=\frac{1}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g .

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x)>0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=0$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$.

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Γ$_3$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)<0$.

Γ$_4$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, έχει ολικό μέγιστο.

Γ$_5$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\le f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Γ$_1$. $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}[\ln f(x)]'\,dx=0 \Leftrightarrow [\ln f(x)]_{\alpha}^{\beta}=0 \Leftrightarrow \ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln f(\beta)=\ln f(\alpha) \Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha).$

Γ$_2$. Αφού η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και από το ερώτημα Γ$_1$ έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Rolle, που σημαίνει, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.
Επειδή $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ είναι μοναδικό.

Γ$_3$. Από το Γ$_2$ έχουμε ότι $\xi\in(\alpha,\beta)$, οπότε :
$\alpha<\xi<\beta \overset{f':\text{γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f'(\alpha)>f'(\xi)>f'(\beta) \overset{\Gamma_2}{\Leftrightarrow} f'(\alpha)>0>f'(\beta)$.
Άρα $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)<0$.

Γ$_4$. Από το ερώτημα Γ$_2$ έχουμε ότι η συνεχής συνάρτηση f' έχει μοναδική ρίζα το $\xi\in(\alpha,\beta)$.
Αυτό σημαίνει ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο αριστερά και δεξιά της ρίζας.
Επειδή $f'(\alpha)>0$ με $\alpha<\xi$, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,\xi)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\xi]$.

Επειδή $f'(\beta)<0$ με $\beta>\xi$, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,+\infty)$.
Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι $f'(\xi)=0$, αριστερά της ρίζας η f είναι γνησίως αύξουσα και δεξιά η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η f έχει ολικό μέγιστο, το $A(\xi,f(\xi))$.

Γ$_5$. Από το Γ$_5$ έχουμε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το $A(\xi,f(\xi))$.
Άρα, από τον ορισμό του μεγίστου, ισχύει : $f(x)\le f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+x$ με $f''(0)=2$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.
Γ₁: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
Γ₂: Να γίνει η μελέτη της f και στη συνέχεια η γραφική της παράσταση.
Γ₃: Να Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Είναι $f'(x)=\left(x^3+\alpha x^2+x\right)'=3x^2+2\alpha x+1$ και

$f''(x)=\left(3x^2+2\alpha x+1\right)'=6x+2\alpha \overset{x=0}{\Rightarrow} f''(0)=2\alpha \Rightarrow 2=2\alpha \Rightarrow \alpha=1$.

Άρα $f(x)=x^3+x^2+x$ και $f'(x)=3x^2+2x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-12=-8<0$ και $\alpha=3>0$ (ομόσημο του 3).

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και 1-1 που σημαίνει ότι η f αντιστρέφεται.

Γ₂. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Από το Γ₁ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $A=\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

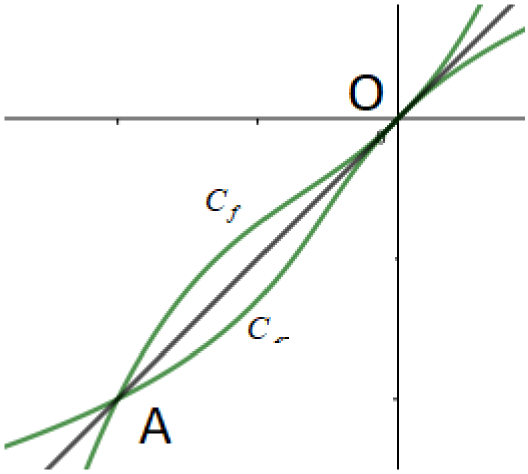
Το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

$f''(x)=6x+2\geq 0 \Leftrightarrow 6x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$.

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\tfrac{1}{3}\right]$ και κυρτή στο $\left[-\tfrac{1}{3},+\infty\right)$. Παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(-\tfrac{1}{3},f(-\tfrac{1}{3})\right)=\left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{7}{27}\right)$.

x	$-\infty$		$-\tfrac{1}{3}$		$+\infty$
f'		+		+	
f''		-	0	+	
f					
			Σ.Κ		



Γ₃. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:
$f(x)=f^{-1}(x)$. (1)
Έστω x_0 μία λύση της (1).
Τότε $f(x_0)=f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=f\left(f^{-1}(x_0)\right)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=x_0$. (2)
Θα αποδείξουμε ότι $f(x_0)=x_0$.

- Έστω $f(x_0)>x_0 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right)>f\left(x_0\right)\overset{(2)}{\Rightarrow} x_0>f\left(x_0\right)$,**άτοπο.**
- Έστω $f(x_0)<x_0 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right)<f\left(x_0\right)\overset{(2)}{\Rightarrow} x_0<f\left(x_0\right)$, **άτοπο.**

Άρα: $f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow x_0^3+x_0^2+x_0=x_0 \Leftrightarrow x_0^3+x_0^2=0\Leftrightarrow x_0^2\left(x_0+1\right)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=-1$.
Τα κοινά σημεία που έχουν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα $O\left(0,0\right)$ και $A\left(-1,-1\right)$.
Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ το ζητούμενο χωρίο θα είναι το 2πλάσιο εμβαδό που περικλείεται από την C_f και την $y=x$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$E=2E_1=2\int_{-1}^{0}\left|f(x)-y\right|dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2+x-x\right)dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2\right)dx=2\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=$$
$$=2\cdot(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=2\cdot\frac{-3+4}{12}=\frac{1}{6}\text{τ.μ.}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-4,4\right]$ και ισχύουν:

$\mathrm{f}(-4)=-4,\ \mathrm{f}(4)=4$ και $\mathrm{f}'(\mathrm{x})>0$ για κάθε $x\in\left(-4,4\right)$.

Γ₁:Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\mathrm{y}=2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο.

Γ₂:Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mathrm{x}_0\in\left(-4,4\right)$ που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\mathrm{x}_0,\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)\right)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{y}=-\mathrm{x}+2$.

Γ₃: Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in\left(-4,4\right)$ με $\rho_1\neq\rho_2$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{\mathrm{f}'(\rho_1)}+\dfrac{1}{3\cdot\mathrm{f}'(\rho_2)}=-\dfrac{4}{3}$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(-4,4\right)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(\xi)=2$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-4,4\right]$ θα είναι και συνεχής.

Είναι $\mathrm{f}(-4)\neq\mathrm{f}(4)$ και $-4=\mathrm{f}(-4)<2<\mathrm{f}(4)=4$, οπότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(-4,4\right)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(\xi)=2$.

Επίσης, έχουμε ότι $\mathrm{f}'(\mathrm{x})>0$ για κάθε $x\in\left(-4,4\right)$και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-4,4\right]$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-4,4\right]$.

Επομένως το $\xi\in\left(-4,4\right)$ώστε $f(\xi)=2$ είναι μοναδικό.

Γ₂. Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\mathrm{x}_0,\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)\right)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\left(\varepsilon\right):\mathrm{y}=-\mathrm{x}+2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)=1$ αφού $\lambda_\varepsilon=-1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-4,4\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-4,4\right)\subseteq\left[-4,4\right]$, οπότε ισχύει το Θ.Μ.Τ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(-4,4\right)$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}_0\right)=\frac{\mathrm{f}(4)-\mathrm{f}(-4)}{4-(-4)}=\frac{4+4}{8}=1.$$

Γ₃. Θεωρώντας το $\xi\in\left(-4,4\right)$ του Γ₂ ερωτήματος, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα $\left[-4,\xi\right]$ και $\left[\xi,4\right]$.

- Υπάρχει $\rho_1\in\left(-4,\xi\right)$ τέτοιο ώστε: $\mathrm{f}'\left(\rho_1\right)=\dfrac{\mathrm{f}(\xi)-\mathrm{f}(-4)}{\xi-(-4)}=\dfrac{2-(-4)}{\xi+4}=\dfrac{6}{\xi+4}$.
- Υπάρχει $\rho_2\in\left(\xi,4\right)$ τέτοιο ώστε: $\mathrm{f}'\left(\rho_2\right)=\dfrac{\mathrm{f}(4)-\mathrm{f}(\xi)}{4-\xi}=\dfrac{4-2}{4-\xi}=\dfrac{2}{4-\xi}$

Οπότε: $\dfrac{1}{\mathrm{f}'(\rho_1)}+\dfrac{1}{3\cdot\mathrm{f}'(\rho_2)}=\dfrac{\xi+4}{6}+\dfrac{4-\xi}{6}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$.

Γ₁ . Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Γ₂ . Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Γ₃ . Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Γ₄ . Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=0$.

Γ₅ . Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}\right)=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)=$$

$$=(+\infty)\cdot(\sqrt{4+0}+2)=(+\infty)\cdot 4=+\infty.$$

Γ₂. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)=-4=\lambda$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x+4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x\left(\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)\right)}=0=\beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=-4x$.

Γ₃. Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x-2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}<0$, γιατί:

$2\sqrt{4x^2+1}>2\sqrt{4x^2}=2\cdot2|x|=4|x|\geq4x$ άρα $4x-2\sqrt{4x^2+1}<0$

Αφού η f είναι συνεχής και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι γνησίως φθίνουσα οπότε θα είναι και 1-1. Επομένως αντιστρέφεται και η f^{-1} ορίζεται στο

$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

- $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+1}-2x=y\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+1}=y+2x\Leftrightarrow4x^2+1=(y+2x)^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\cancel{4x^2}+1=y^2+4yx+\cancel{4x^2}\Leftrightarrow4yx=1-y^2\Leftrightarrow x=\frac{1-y^2}{4y}$.

  Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1-x^2}{4x},\ x\in f(A)$.

Γ₄. $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2\Rightarrow$

$f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=\left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2\right)\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{4x^2+1}-4x=$

$4x-2\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{4x^2+1}-4x=0$.

Γ₅. Προφανώς $f(x)>0$ και $\sqrt{4x^2+1}\neq0\Rightarrow f(x)\sqrt{4x^2+1}\neq0$. Διαιρούμε την σχέση $f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=0$ με $f(x)\sqrt{4x^2+1}$ έτσι έχουμε

$$\frac{f'(x)\sqrt{4x^2+1}}{-2f(x)\sqrt{4x^2+1}}+\frac{2f(x)}{-2f(x)\sqrt{4x^2+1}}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

Οπότε έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\left[\ln f(x)\right]_0^1 =$

$-\frac{1}{2}\left(\ln f(1) - \ln f(0)\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{5}-2\right) - \ln 1\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$.