ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = -2x^5 - 2kx^3 + 2k^5$, $x \in \mathbb{R}$ και $k > 0$.
α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, k)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(k, \lambda)$.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow -2x_1^5 > -2x_2^5$ **(1)** και

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \overset{-2k<0}{\Rightarrow} -2kx_1^3 > -2kx_2^3 \Rightarrow -2kx_1^3 + 2k^5 > -2kx_2^3 + 2k^5$. **(2)**

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** έχουμε: $-2x_1^5 - 2kx_1^3 + 2k^5 > -2x_2^5 - 2kx_2^3 + 2k^5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right)$. Είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^5 - 2kx^3 + 2k^5) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^5) = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^5 - 2kx^3 + 2k^5) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^5) = -2(-\infty) = +\infty$$

Επομένως είναι: $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0, k]$, ισχύουν:

- $f(0) = 2k^5 > 0$
- $f(k) = -2k^5 - 2k^4 + 2k^5 = -2k^4 < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, k)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ)

$$\lim_{x \to 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^5 + 2kx^3 - 2k^5 + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3(2x^2 + 2k)}{\eta\mu^3 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2k}{\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}} = 2k = \lambda^2$$, αφού $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων $M(k, \lambda)$, ικανοποιούν την εξίσωση: $y^2 = 2x$.

Άρα ανήκουν σε μία παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2x$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1<\ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1<3\ln 2x_2$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow e^{3x_1}<e^{3x_2}$

και

$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-2<4x_2-2.$

Άρα $3\ln 2x_1+e^{3x_1}+4x_1-2<3\ln 2x_2+e^{3x_2}+4x_2-2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii.Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=-\infty+1+0-2=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2x=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to 0} e^{3x}=\lim\limits_{u\to 0} e^{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln 2x=\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3x}=\lim\limits_{u\to +\infty} e^{u}=+\infty$

iii. $f(x)=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2+2) - 4(\mu^2+1) = e^{3(\mu^2+1)} - e^{6\mu} - 8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu + e^{6\mu} + 8\mu = 3\ln 2(\mu^2+1) + e^{3(\mu^2+1)} + 4(\mu^2+1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2\cdot(2\mu) + e^{3(2\mu)} + 4\cdot(2\mu) - 2 = 3\ln 2(\mu^2+1) + e^{3(\mu^2+1)} + 4(\mu^2+1) - 2 \Leftrightarrow$$

$f(2\mu) = f(\mu^2+1) \Leftrightarrow \mu^2+1 = 2\mu \Leftrightarrow \mu = 1$ (Διπλή ρίζα).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le \frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

- Για $x>0$, έχουμε: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2\le 3\eta\mu x-2xf(x)\le \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow$

  $-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$

  αλλά: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

- Για $x<0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le -\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{3}{2}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{3}{2}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}$.

ii. Η σχέση $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$ ισχύει για κάθε $x \in R$ άρα και για $x=0$ οπότε έχουμε: $4f(0)+3f(1)=-2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}.$$

Άρα $4\cdot\frac{3}{2}+3f(1)=-2013 \Leftrightarrow f(1)=-673$.

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$

Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$. Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=-673<0$$

Οπότε: $h(0)h(1)=-\frac{673}{2}<0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4$, για κάθε $x\in(0,2)$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=5$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$.
2. Αν $g(x)=4-e^x-f(x)$, $x\in(0,2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $t(x)=\ln(-f(x)+4)$, $x\in(0,2)$ τέμνει την $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ θα είναι συνεχής και στα άκρα 0 και 2, οπότε θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$.

- $4\eta\mu(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4 \overset{x<2\Leftrightarrow x-2<0}{\Rightarrow} x+2\le f(x)\le 4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$ **(1)**

  Όμως $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ και $\lim\limits_{x\to 2}4\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\overset{x-2=u,\ x\to 2\Rightarrow u\to 0}{=}4\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=4$, οπότε η **(1)** από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$. Άρα $f(2)=4$.

- Θέτουμε $\dfrac{f(x)+1}{x}=s(x)\Rightarrow f(x)=xs(x)-1$ και $\lim\limits_{x\to 0}s(x)=5$.

  Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(xs(x)-1)=0\cdot 5-1=-1$. Άρα $f(0)=-1$.

2. Έστω $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow -f(x_1)>-f(x_2)$ **(2)** και

$x_1<x_2\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow 4-e^{x_1}>4-e^{x_2}$ (3).

Προσθέτοντας τις **(2)** και **(3)** έχουμε: $4-e^{x_1}-f(x_1)>4-e^{x_2}-f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$.

Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,2)$, το σύνολο τιμών της θα είναι: $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to 2^-}g(x),\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\right)=(-e^2,4)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(4-e^x-f(x))=4-e^2-4=-e^2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(4-e^x-f(x))=4-e^0+1=4$.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,2)$ έτσι ώστε να ισχύει: $t(x_0)=x_0$.

Είναι:

$t(x_0)=x_0\Leftrightarrow \ln(-f(x_0)+4)=x_0\Leftrightarrow e^{x_0}=-f(x_0)+4\Leftrightarrow 4-f(x_0)-e^{x_0}=0\Leftrightarrow g(x_0)=0$

Επειδή το $0 \in g(A) = \left(-e^2, 4\right)$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = \left(0, 2\right)$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, 2\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Άρα και $t(x_0) = x_0$.

Άσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)=x^2+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)$.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=x-f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Είναι $x^2+x+1>0$ γιατί $\Delta=-3<0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του 1>0. Άρα $f^2(x)=x^2+x+1>0\Rightarrow f^2(x)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε: $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

2. Αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+f(x)}{x}\cdot x-1)=-\dfrac{1}{2}\cdot 0-1=-1<0$, θα υπάρχει x_1 (κοντά στο 0) με $f(x_1)<0$ και λαμβάνοντας υπόψη το **(1)** ερώτημα θα έχουμε $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε: $f^2(x)=x^2+x+1\Rightarrow f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

4. Αφού , $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-f(x)\right)=-\dfrac{1}{2}<0$, υπάρχει ρ_1 κοντά στο $\left(-\infty\right)$ έτσι ώστε $g(\rho_1)<0$.
Αφού $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-f(x)\right)=0+1=1>0$, υπάρχει ρ_2 κοντά στο 0 έτσι ώστε $g(\rho_2)>0$.
Έχουμε $g(\rho_1)g(\rho_2)<0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[\rho_1,\rho_2\right]\subseteq\left(-\infty,0\right)$, οπότε ισχύει το Θ. Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\left(\rho_1,\rho_2\right):g(x_0)=0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1. Αν $1<f(x)<e$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Αν $f(0)>1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x+x\eta\mu\frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν $f(k)+f(2k)=4k$, $k>0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{f(x)-k}{x-2k}=\dfrac{f(x)-2k}{x-k}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(k,2k)$.

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g:[1,3]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,3]$ έτσι ώστε $g(\xi)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}-1$.

<u>Λύση</u>

1. Έστω $h(x)=f(x)-e^x$, $x\in[0,1]$.
- Αφού η σχέση $1<f(x)<e$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτοντας $x=0$ και $x=1$ παίρνουμε: $1<f(0)<e$ και $1<f(1)<e$, αντίστοιχα.
- Είναι $h(0)=f(0)-e^0>1-1=0\Rightarrow h(0)>0$ και $h(1)=f(1)-e^1<e-e=0\Rightarrow h(1)<0$, οπότε ισχύει: $h(0)h(1)<0$.
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω ισχύει το Θ.Bolzano για την h, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=e^{x_0}$.

2. Έστω $\varphi(x)=f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x}$, $x>0$ η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to+\infty}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$, αφού:

  $\left|\dfrac{\eta\mu u}{u}\right|\le\dfrac{1}{|u|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|u|}\le\dfrac{\eta\mu u}{u}\le\dfrac{1}{|u|}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}(-\dfrac{1}{|u|})=\lim\limits_{u\to+\infty}(\dfrac{1}{|u|})=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=f(0)-1-0=f(0)-1>0$. Τότε θα υπάρχει x_1 κοντά στο 0 ώστε $\varphi(x_1)>0$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u,u\to 0}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-e^x-x\eta\mu\frac{1}{x})=0-(+\infty)-1=-\infty$. Τότε θα υπάρχει x_2 κοντά στο $+\infty$ ώστε $\varphi(x_2)<0$.
- Είναι $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$ και η συνάρτηση φ συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(0,+\infty)$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq(0,+\infty)$, με $x_0>0$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$.

3. Έστω $t(x)=(f(x)-k)(x-k)-(f(x)-2k)(x-2k)$, $x\in[k,2k]$, $k>0$.
- Είναι $t(k)=-(f(k)-2k)(k-2k)=k(f(k)-2k)<0$, γιατί
  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)=4k-f(k)\Leftrightarrow 2f(k)<4k\Leftrightarrow f(k)-2k<0$ και $k>0$.

- $t(2k)=(f(2k)-k)(2k-k)=k(f(2k)-k)>0$, γιατί:
  $k<2k\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(k)<f(2k)\Leftrightarrow f(2k)>f(k)=4k-f(2k)\Leftrightarrow 2f(2k)>4k\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(2k)>2k>k\Leftrightarrow f(2k)-k>0$ και $k>0$.
- Είναι $t(k)t(2k)<0$ και η συνάρτηση t συνεχής στο $[k,2k]$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(k,2k)$, τέτοιο ώστε $t(\xi)=0$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$. Τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M δηλαδή υπάρχουν
$x_1,x_2: m=g(x_1)\le g(x)\le g(x_2)=M$, **(1),** για κάθε $x\in[1,3]$.
Θέτουμε στην **(1)**, όπου $x=1,2,3$, έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(2)\le g(x_2)\\ g(x_1)\le g(3)\le g(x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(x_1)\le g(1)\le g(x_2)\\ 2g(x_1)\le 2g(2)\le 2g(x_2)\\ 3g(x_1)\le 3g(3)\le 3g(x_2)\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}6g(x_1)\le g(1)+2g(2)+3g(3)\le 6g(x_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)\le\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\le g(x_2)$$

1η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=\dfrac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_1$

2η Περίπτωση: Αν $g(x_2)=\dfrac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6}\Rightarrow\xi=x_2$

3η Περίπτωση: Αν $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g=$σταθερή, οπότε ξ είναι κάθε σημείο του διαστήματος $[1,3]$.

4η Περίπτωση: Αν $g\left(x_1\right) < \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} < g\left(x_2\right)$.

Δηλαδή το $\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} \in \left(g\left(x_1\right), g\left(x_2\right)\right)$, οπότε από Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} = \frac{f(1)-1+2f(2)-2+3f(3)-3}{6} = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - 1.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1,3]$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - 1.$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(e^{f(x)}\right)=\ln x+2$, για κάθε $x>0$ και
- $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln(\ln x+1)^2$ για κάθε $x>\frac{1}{e}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=f\left(e^{-x}+2\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(1+e,1+e^{3/2}\right)$.

<u>Λύση</u>

1. Έστω
$x_1,x_2>0$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x_1+2=\ln x_2+2\Rightarrow \ln x_1=\ln x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln(\ln x+1)^2\Leftrightarrow f((f(e^{f(x)}))=2\ln(\ln x+1)\Leftrightarrow f(\ln x+2)=2\ln(\ln x+1)$ **(1)**

Θέτουμε: $\ln x+2=y\Leftrightarrow \ln x+1=y-1>0\Rightarrow y>1$ και η **(1)** γίνεται:

$f(\ln x+2)=2\ln(\ln x+1)\Rightarrow f(y)=2\ln(y-1)$, $y>1$. Άρα $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$.

3.* Το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ είναι:

$\{x\in A_f \text{ και } f(x)\in A_f\}=\{x>1 \text{ και } 2\ln(x-1)>1\}=\left\{x>1 \text{ και } x>1+\sqrt{e}\right\}=\left(1+\sqrt{e},+\infty\right)$

$(f\circ f)(x)=f\left(e^{-x}\right)\Leftrightarrow f(f(x))=f\left(e^{-x}+2\right)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=e^{-x}+2\Leftrightarrow 2\ln(x-1)=e^{-x}+2$

$\Leftrightarrow 2\ln(x-1)-e^{-x}-2=0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2\ln(x-1)-e^{-x}-2$ και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $\left[1+e,1+e^{3/2}\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[1+e,1+e^{3/2}\right]\subseteq\left(1+\sqrt{e},+\infty\right)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(e+1)=2\ln(e+1-1)-e^{-(e+1)}-2=2\cdot 1-\frac{1}{e^{e+1}}-2=-\frac{1}{e^{e+1}}<0$

- $g(1+e^{3/2}) = 2\ln(1+e^{3/2}-1) - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 3 - e^{-1-e^{3/2}} - 2 = 1 - \frac{1}{e^{1+e^{3/2}}} > 0$, δηλαδή

  $g(1+e^{3/2})g(e+1) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(1+e, 1+e^{3/2}\right)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f \circ f)(x_0) = f\left(e^{-x_0} + 2\right)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση</u>

i. $A\in C_f$, άρα $f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lambda=1$

Η σχέση (1) για $\lambda=1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-1$ και για $x\neq 0$ έχουμε:

$f(x)=\frac{\kappa\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\kappa\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\left(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)}=\kappa-\frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \kappa-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \kappa=1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa=\lambda=1$ γίνεται: $\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-1$.

Για $x\neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x)=\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0)=\frac{1}{2}$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$1+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\sigma\upsilon\nu x(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x})}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}=x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^3<{x_2}^3\Rightarrow {x_1}^3+3<{x_2}^3+3$

και $x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$,

αφού η συνάρτηση $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$${x_1}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<{x_2}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=(-\infty)+3-4(+\infty)=-\infty,$$

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

iii. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = (+\infty)+3-4\cdot 0 = +\infty$,

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

iv. Η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$.

Το $\kappa\in\mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 16/10/2017

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

Λύση

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2\right] < 0$$

   άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο είναι το $g(1) = 1$, άρα $g(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - \ln x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

<u>Σχόλιο</u>: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right) = -\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} e^y = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^y = 1$,

όμως $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right)' = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \ln x + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x - \ln x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g(x)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1,\ x > 0$. Έχουμε $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

$h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

2. Η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-(1-e)^2<0$,

- $g(1)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'(x)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$
$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g(x)<g(x_0)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g(x)>g(x_0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f, αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f.

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

<u>Λύση</u>

Ισχύει

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - f(x)\cdot\eta\mu x = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x + f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$,

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = c\cdot e^x .$$

Επίσης $f(0)=2$, οπότε έχουμε: $f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=\frac{2\cdot e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1		$\frac{1-\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0		1		$+\infty$
g′(λ)		+	0	-	

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1 + xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1 + xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x) = 2\left|1 + xe^x\right|$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $f(x) = 1 + xe^x - e^x$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(1 + xe^x - e^x\right)' = xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \ge f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \ge 0$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση, $g(x) = 1 + xe^x$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της: $g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ και έχουμε

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$, δηλαδή $g(x) \ge g(-1) = \frac{e-1}{e} > 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + xe^x\right) = 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(x\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $[\frac{e-1}{e},+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι το $[2\frac{e-1}{e},+\infty)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+2^x=5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f'(x)=-2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{2x}\cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=1$.

   iii. Αν h,φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}$$

   και $h(0)=\varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h=\varphi$.

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε $3^x+2^x=5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x-1=0$ **(1)**.

   Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x=1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x-1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   Ισχύει:

   $$f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{2}{5}<0,$$

   αφού $\frac{3}{5}<1\Leftrightarrow \ln\frac{3}{5}<\ln 1=0$ και $\frac{2}{5}<1\Leftrightarrow \ln\frac{2}{5}<\ln 1=0$.

   Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

   i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Έχουμε

$g'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=2e^{2x}\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=2e^{2x}\cdot f(x)-2e^{2x}\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα

$e^{2x}\cdot f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-2x}$.

Για $x=0$ παίρνουμε:

$f(0)=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x)\Leftrightarrow\left(h(x)-\varphi(x)\right)'=-2\left(h(x)-\varphi(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x)-\varphi(x)=c\cdot e^{-2x}$, και για $x=0$ παίρνουμε

$$h(0)-\varphi(0)=c\cdot e^{0}\overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow}c=0.$$

Άρα $h=\varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x \geq -4+\sqrt{3}.$$

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'(x)=(2x+4)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x.$$

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+4)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	$+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0,f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right],$$

$$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right] \text{ και}$$

$$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right).$$

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς

-3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{3}$		$-4+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3},\, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3},\, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0,\, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0,\, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq-4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x}-\ln\left(x+1\right)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln\left(2\alpha+\beta\right)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln\left(\alpha+2\beta-1\right)\leq 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\left(-1,+\infty\right)$.

i. Έχουμε

$$f'\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{x+1} \text{ και}$$

$$f''\left(x\right)=e^{x}+\frac{1}{\left(x+1\right)^{2}}.$$

Επειδή $f''\left(x\right)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-1,+\infty\right)$.

Επίσης $f'\left(0\right)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'\left(x\right)<f'\left(0\right)=0$ και

για $x>0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$.

Επιπλέον $f\left(0\right)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1		0		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f(x)		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - 1\right] = \frac{1}{e} - 1 .$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta i.}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και

για $x>0 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha+\beta-1)+1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha+2\beta-2)+1) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1) = f(\alpha+2\beta-2) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1) \neq 0$ τότε, επειδή $f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1) > 0$ και η **(1)** μας δίνει $f(\alpha+2\beta-2) \le -f(2\alpha+\beta-1) < 0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2) < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}, x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Λύση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}, x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^{2}}.$$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0		e		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	
f(x)		↗	f(e)	↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f(e)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f(3)>f(5)>f(6)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x+\frac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και

$g'\left(x\right)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot\left(2\ln x+1\right)$

και έχουμε

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}} \text{ και}$$

$$g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e-1}{e} > 0 .$$

Επομένως $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{e}}) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[\left(x^2+1\right)\cdot \ln x\right]' = 2x\ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x\ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$, αφού $x > 0$ και $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$$f^{(3)}(x) = \left(2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$$0 < x < x_0 \overset{f''\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$x > x_0 \overset{f''\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0 .$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\ ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2+1)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x-4 = \ln 17 - \ln(x^2+1)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x-4 = \ln 17 - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) = 4 + \ln(4^2+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln\frac{x^4+1}{x^6+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4+1) - \ln(x^6+1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln\left((x^3)^2+1\right) > x^2 + \ln\left((x^2)^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x^2) \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$,

$f''(x)=2e^x+2x\cdot e^x+2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+4x+2\right)e^x$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

X	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	0	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2}<0$, έπεται ότι για $x>0$ ισχύει $[x,x+1]\subseteq\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και αφού $f''(x)>0$ στο $\left(-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$, άρα και στο $[x,x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi) \overset{f'\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} x+1>\xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\big(\gamma, f(\gamma)\big)$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{12-2}{\frac{5}{2}}=4$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(\xi)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B\big(\gamma, f(\gamma)\big)$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, πρέπει

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma)\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g

στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$.

   i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   ii. Αν $\alpha>\dfrac{1}{e},\beta>\dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

<u>Λύση</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

   γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

   το οποίο ισχύει.

   - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

   Επίσης $\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}$$ και

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha > \beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$.

Ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2}$$ και

$$f''(x)=\frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1} + \frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1} + \frac{2-(\ln\beta)^2}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1} \Leftrightarrow$$

$$f(\ln\alpha) + f(\ln\beta) \geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/11/2016

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ και F μία παράγουσά της στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ με $F(0)=1$.

i. Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F\big(F'(x)-2017\big)=1$, έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.
iii. Να αποδείξετε ότι $F(x+2)-F(x+1)>f(x)$ για κάθε $x>0$.
iv. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου της C_F, με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $2E>3$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ και αφού η F μία παράγουσά της θα έχουμε $F'(x)=f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}>0$ για κάθε $x>-1$. Άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης $F''(x)=f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)'=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

x	-1		0		$+\infty$
F''		$-$		$+$	
F					

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι κοίλη στο $(-1,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Έχει στο $A=\big(0,F(0)\big)=(0,1)$ έχουμε σημείο καμπής.

ii. $F\big(F'(x)-2017\big)=1 \Leftrightarrow F\big(F'(x)-2017\big)=F(0) \overset{F:1-1}{\Leftrightarrow} F'(x)-2017=0 \Leftrightarrow F'(x)=2017 \Leftrightarrow$
$f(x)=2017$ **(1).**

Αφού η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση F' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής το σύνολο τιμών της θα είναι
$f(A)=\Big[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Big)=[1,+\infty)$, γιατί:

$$f(0)=\frac{e^0}{0+1}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty .$$

Επειδή το $2017 \in f(A)$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$ έτσι ώστε

$$f(x_0)=2017 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} F\left(F'(x_0)-2017\right)=1 .$$

iii. Για $x>0$, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο $[x+1,x+2] \subseteq (0,+\infty)$ για την συνάρτηση F. Τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x+1,x+2)$ έτσι ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1}=F(x+2)-F(x+1) \ .$$

Όμως

$$\xi \in (x+1,x+2) \Leftrightarrow 0<x<x+1<\xi<x+2 \overset{F':\,\gamma\nu.\,\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} F'(x)<F'(\xi) \Leftrightarrow f(x)<F(x+2)-F(x+1)$$

iv. Αφού η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, θα έχουμε:

$x>0 \overset{F:\,\gamma\nu.\,\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} F(x)>F(0)=1>0$, οπότε $E=\int_0^1 F(x)\,dx$.

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο καμπής της $A=(0,1)$ είναι:

$y-F(0)=F'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x+1$ και επειδή η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ θα ισχύει: $F(x)\geq y$ και το ¨=¨ ισχύει για $x=0$.

Άρα θα έχουμε:

$$F(x)>y \Rightarrow \int_0^1 F(x)\,dx>\int_0^1 (x+1)\,dx \Rightarrow E>\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 \Rightarrow E>\frac{3}{2} \Rightarrow 2E>3 .$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)'=\frac{-e}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x^2}$

και επειδή $f'(x)>0\Leftrightarrow x>e$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x<e$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και για $x=e$ παρουσιάζει ακρότατο το $f(e)=\frac{e}{e}+\ln e+1=3$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e+x\ln x+x}{x}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$.

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x^2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+0=0$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

iii. Έστω $g(x)=f(x)-3^{x-1}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο [1,4] και για την οποία ισχύει: $g(1)\cdot g(4)<0$ αφού

- $g(1)=f(1)-3^0=e+\ln 1+1-1=e>0$
- $g(4)=f(4)-3^3=\dfrac{e}{4}+\ln 4+1-3^3<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Είναι:

$1\le x\le e^2\Leftrightarrow \ln x\ge 0$ και $\dfrac{e}{x}>0$. Άρα $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1>0$ για κάθε $x\in[1,e^2]$. Επομένως έχουμε:

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{e}{x}dx+\int_1^{e^2}\ln x dx+1\cdot(e^2-1)=$$

$$=e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}(x)'\cdot\ln x dx+e^2-1=$$

$$=e\cdot(\ln e^2-\ln 1)+\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx+e^2-1=$$

$$=2e+e^2\ln e^2-1\cdot(e^2-1)+e^2-1=2e+2e^2$$ τ.μ

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3, x>0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y=3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=e$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3\right)'=2\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+\lambda=2\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}+\lambda=$$

$$=2\frac{1-\ln x}{x^2}+\lambda \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+\lambda .$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι:

$f'(1)=\frac{2-0}{1}+\lambda=2+\lambda$ και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε ισχύει:

$2+\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=1$. Άρα $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x+3, x>0$ και $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+1$.

ii. Για κάθε $x>0$ είναι: $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+1=\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x^2-2\ln x+2, x>0$.

Είναι: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$

$g'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$.

$g'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως: $g(x)\ge g(1) \Leftrightarrow g(x)\ge 3>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+x+3}{x}=$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x^2}+1+\frac{3}{x}\right)=2\cdot 0+1+0=1,$$

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0.$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}+x+3-x\right)=$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}+3\right)=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}+3=$$

  $=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+3=3$. Άρα η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y=x+3$.

iv. $E=\int_1^e |f(x)-x-3|dx=\int_1^e\left|2\dfrac{\ln x}{x}+\cancel{x}+\cancel{3}-\cancel{x}-\cancel{3}\right|dx=$

$\int_1^e 2\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|dx \overset{*}{=} 2\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\,dx=$

$=\left[\ell n^2 x\right]_1^e=\ell n^2 e-\ell n^2 1=1.$

*$(1<x<e \Leftrightarrow \ln x>0$ άρα $\dfrac{\ln x}{x}$ θετικός)

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=-2+\frac{2}{x}$ και $g(x)=3\ln x$, όπου $x\in(0,+\infty)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x)=f(x)-g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$h(x)=f(x)-g(x)=-2+\frac{2}{x}-3\ln x=\frac{2}{x}-3\ln x-2$ για κάθε $x>0$.

Άρα $h'(x)=\frac{-2}{x^2}-\frac{3}{x}<0$, οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμα $h(1)=0$.

Επομένως:
Για κάθε $x>1$ είναι $h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$ και για κάθε $0<x<1$ είναι $h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$.

ii. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν $\lambda>1$ ή $\lambda<1$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>1$ τότε:

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda|f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^\lambda|h(x)|\,dx\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=-\int_1^\lambda h(x)dx=-\int_1^\lambda\left(\frac{2}{x}-3\ln x-2\right)dx=$$

$$=-2\left[\ln x\right]_1^\lambda+3\int_1^\lambda(x)'\ln x\,dx+2(\lambda-1)=$$

$$=-2(\ln\lambda-\ln 1)+3[x\ln x]_1^\lambda-3\int_1^\lambda x\frac{1}{x}dx+2\lambda-2=$$

$$=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3(\lambda-1)+2\lambda-2=-2\ln\lambda+3\lambda\ln\lambda-3\lambda+3+2\lambda-2=$$

$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1$.

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} |h(x)|\, dx = \int_{\lambda}^{1} h(x)dx = -\int_{1}^{\lambda} h(x)dx,$$

$$E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda.$$

- Αν $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$. Επομένως $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

iii. Είναι:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda \to +\infty} (3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} [\lambda(3\ln\lambda - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda})] = (+\infty)(+\infty - 2 \cdot 0 - 1 + 0) = +\infty.$$

Αφού $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln\lambda = +\infty$ και $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$.

iv. Είναι: $\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} \left[\left(3\lambda - 2\right)\ln\lambda + 1 - \lambda \right] = \left[(0 - 2) \cdot (-\infty) + 1 - 0\right] = +\infty$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f(t)\,dt=\int_0^x t^2f^2(t)\,dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2dt$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

ii. Να βρείτε την συνάρτηση f'.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

iv. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right)=f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$.

v. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\dfrac{f(t)}{x}dt$.

Λύση

i. Έχουμε $2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f(t)\,dt=\int_0^x t^2f^2(t)\,dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2dt\Leftrightarrow$

$$\int_0^x t^2f^2(t)\,dt+\int_0^x\left(e^t-1\right)^2dt-2\int_0^x t\left(e^t-1\right)f(t)\,dt=0\Leftrightarrow\int_0^x\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2dt=0$$

Η συνάρτηση $g(t)=tf(t)-\left(e^t-1\right)$ είναι συνεχής ως έκφραση συνεχών συναρτήσεων, αν η $g(t)$ δεν είναι παντού μηδέν τότε $\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2>0$, οπότε θα είχαμε

$\int_0^x\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2dt>0$, άτοπο άρα

$$g(t)=0\Leftrightarrow\left(tf(t)-\left(e^t-1\right)\right)^2=0\Leftrightarrow tf(t)-\left(e^t-1\right)=0\Leftrightarrow tf(t)=e^t-1 \text{ ή } xf(x)=e^x-1$$

Αν $x\neq 0\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

Αν $x=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}e^x=f(0)\Leftrightarrow 1=f(0)$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

ii. Αν $x\neq 0\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(e^x-1)'x-(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Αν $x=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

iii. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=xe^x-e^x+1$

Έχουμε $g'(x)=(xe^x-e^x+1)'=xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-		+
g	$\searrow$	**0**	$\nearrow$

$\min\ g(0)=0$

δηλαδή $g(x)\geq g(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow$

iv. Προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x=0$ και $x=1$

Αν $x>1\Rightarrow x^{2014}<x^{2015}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x^{2014})<f(x^{2015})$, **(1)** και

$x^{2016}<x^{2017}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x^{2016})<f(x^{2017}),(2)\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}f(x^{2014})+f(x^{2016})<f(x^{2015})+f(x^{2017})$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $0<x<1\Rightarrow x^{2014}>x^{2015}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x^{2014})>f(x^{2015})$, **(3)** και

$$x^{2016} > x^{2017} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2017}\right), (4) \overset{(3)+(4)}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $x<0 \Rightarrow x^{2014} > x^{2015} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right) > f\left(x^{2015}\right)$, **(5)** και

$$x^{2016} > x^{2017} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2017}\right), (6) \overset{(5)+(6)}{\Rightarrow} f\left(x^{2014}\right)+f\left(x^{2016}\right) > f\left(x^{2015}\right)+f\left(x^{2017}\right)$$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Άρα μοναδικές ρίζες είναι οι αριθμοί $x=0$ και $x=1$

ν. Έστω ότι $x \in (0,1) \Rightarrow x < 2x$, οπότε για κάθε t με

$$x \le t \le 2x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(t) \le f(2x) \Rightarrow \int_x^{2x} f(x)dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{2x} f(2x)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)(2x-x) \le \int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x)(2x-x) \Rightarrow xf(x) \le \int_x^{2x} f(t)dt \le xf(2x) \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x) \le \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x) \Rightarrow f(x) \le \int_x^{2x} \frac{f(t)}{x}dt \le f(2x).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(2x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{x}dt = 1$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln(x\cdot e^{1-x})+2, x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x)+2011=0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=(3\cdot\ln xe^{1-x}+2)'=3\frac{1}{xe^{1-x}}(xe^{1-x})'=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot(e^{1-x}+x(e^{1-x})')=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}(e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)')=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)=\frac{3(1-x)}{x}$$

Έχουμε:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{3(1-x)}{x}>0\Leftrightarrow x<1$ αφού $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{3(1-x)}{x}<0\Leftrightarrow x>1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\geq 1$.
Άρα η f για $x=1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $f(1)=3\ln 1+2=2$ που είναι η μέγιστη

ii. Το σύνολο τιμών θα είναι: $f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)]\cup(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=3\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x\cdot e^{1-x})+2=-\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot e^{1-x})=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0 .$$

- $f(1) = 2$

Άρα $f((0,+\infty)) = (-\infty, 2]$.

iii. Είναι: $3f(x) + 2011 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-2011}{3}$

Έστω $g(x) = f(x) + \frac{2011}{3}$ τότε $g'(x) = f'(x)$, οπότε η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

$g((0,1]) = (-\infty, 2 + \frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] έχει μοναδική ρίζα σε αυτό.

Άρα και η $f(x) + \frac{2011}{3} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1].

$g([1,+\infty)) = (-\infty, 2 + \frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα και η $f(x) + \frac{2011}{3} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $3f(x) + 2011 = 0$ έχει δύο λύσεις, μία στο (0,1] και μία στο $[1,+\infty)$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Το iii) μπορεί να λυθεί και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

iv. Είναι:

- $f(1) = 2$
- $f(2) = 3\ln\left(\frac{2}{e}\right) + 2 = 3\ln 2 - 3\ln e + 2 = 3\ln 2 - 1 > 0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα

  $f([1,2]) = [3\ln 2 + 1, 2]$ δηλαδή $f(x) > 0$ στο [1,2].

  Επίσης $f(x) = 3\ln x + 3\ln e^{1-x} + 2 = 3\ln x + 3(1-x) + 2 = 3\ln x + 5 - 3x$.

  Άρα $E = \int_1^2 f(x)dx = 3\int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 (5-3x)dx = 3\int_1^2 (x)'\ln x dx + [5x - \frac{3}{2}x^2]_1^2 =$

  $= 3[x\ln x]_1^2 - 3\int_1^2 x\cdot(\ln x)'dx + 10 - \frac{3}{2}\cdot 4 - 5 + \frac{3}{2} =$

  $= 3\cdot(2\ln 2 - 0) - 3\int_1^2 1dx + 10 - 6 - 5 + \frac{3}{2} = 6\ln 2 - 3(2-1) + \frac{3}{2} - 1 =$

  $= 6\ln 2 - \frac{5}{2}$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=2x^4+3\ln x+2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Αν η f^{-1}, η αντίστροφη της f, είναι συνεχής, και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 f^{-1}(t)dt$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=8x^3+\frac{3}{x}>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

ii. Είναι:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x^4+3\ln x+2)=0-\infty+2=-\infty$.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(2x^4+3\ln x+2)=+\infty+\infty+2=+\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, από i), άρα το σύνολο τιμών της είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Για κάθε $\lambda>0$ έχουμε:

$$\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1\Leftrightarrow 2\lambda^4=3(\ln 1-\ln\lambda)-2\Leftrightarrow 2\lambda^4=-3\ln\lambda-2\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+3\ln\lambda+2=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$, τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$.

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

iv. Η συνάρτηση f επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε $t = f(x) \Leftrightarrow dt = f'(x)dx$. Για $t = 0$ είναι $0 = f(x) \Leftrightarrow x = \lambda$.

Για $t = 4$ είναι $4 = f(x) \Leftrightarrow f(1) = f(x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt = \int_\lambda^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int_\lambda^1 xf'(x)dx = \int_\lambda^1 x\cdot\left(8x^3 + \frac{3}{x}\right)dx =$$

$$\int_\lambda^1 (8x^4 + 3)dx = \left[8\frac{x^5}{5} + 3x\right]_\lambda^1 = \frac{8}{5} + 3 - \left(\frac{8}{5}\lambda^5 + 3\lambda\right) = -\frac{8}{5}\lambda^5 - 3\lambda + \frac{23}{5}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 22/04/2017

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΓΕΝΙΚΑ

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in R$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

Δ₂. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και βρείτε την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A}\left(1,\, f(1)\right)$.

Δ₃. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\geq 2ex-e,\ \text{για κάθε } x\in R.$

Δ₄. Γνωρίζοντας ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x\geq x+1$ να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx>\frac{4}{3}$.

Δ₅. Αν F μία παράγουσα της f στο R, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ισχύει $F(x)>F(0)+x,\ \text{για κάθε } x>0$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xF(x)}{f(x)}$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιος ώστε $F(2)-F(0)=2f(\xi)$.

iv. Αφού αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$, στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

1) $xF'(x)\leq F(2x)-F(x),\ \text{για κάθε } x\geq 0.$

2) $2\int_0^1 F(2x)dx=\int_0^2 F(x)dx.$

3) $\int_0^2 F(x)dx>2F(1).$

<u>Λύση</u>

Δ₁. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2xe^{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f	↘	min	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[0,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathrm{A}(0,\, f(0)=1)$.

Δ₂. Έχουμε $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2e^{x^2}(1+4x^2)>0$, για κάθε $x\in R$. Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το R. Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $\mathrm{A}\left(1,\, f(1)\right)$ είναι:
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{y}-e=2e(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{y}=2ex-e$.

Δ₃. Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το R θα είναι «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$. Άρα θα ισχύει $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq 2ex - e,\ \text{για κάθε } x \in R.$

Δ₄. Γνωρίζοντας ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in R$ (το '=' ισχύει για x=0) και θέτοντας όπου x το x^2 έχουμε: $e^{x^2} \geq x^2+1$ με το '=¨ να ισχύει για x=0.

$e^{x^2} \geq x^2+1 \Rightarrow h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ και επειδή η συνάρτηση $h(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$, τότε θα έχουμε

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} - \left(x^2+1\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx > 0$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx > \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \frac{4}{3}.$$

Δ₅. Αφού η F είναι μία παράγουσα της f στο R θα ισχύει

$F'(\mathrm{x}) = f(x) = e^{x^2},\ \text{για κάθε } x \in R.$

i. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ στο $[0,x]$ με $x>0$.

   Τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x)$ έτσι ώστε

   $$F'(\xi) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \Leftrightarrow F'(\xi) = \frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow e^{\xi^2} = \frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow xe^{\xi^2} = F(x)-F(0),\ (1).$$

   Όμως $\xi \in (0,x) \Leftrightarrow 0<\xi \Leftrightarrow 0<\xi^2 \Leftrightarrow e^0 < e^{\xi^2} \Leftrightarrow 1 < e^{\xi^2} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < xe^{\xi^2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x < F(x)-F(0) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x + F(0) < F(x)$

ii. Από το i) ερώτημα έχουμε $F(x) > F(0)+x,\ \text{για κάθε } x>0$. Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(0)+x) = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{e^{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xF'(x)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{F(x)}{2xe^{x^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

   γιατί: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{2xe^{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{(xe^{x^2})'} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$.

iii. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την F στο $[0,2]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$, ώστε $F'(\xi) = \frac{F(2)-F(0)}{2-0} \Leftrightarrow F(2)-F(0) = 2F'(\xi) \Leftrightarrow F(2)-F(0) = 2f(\xi)$ (1).

   Αλλά $F(2)-F(0) = \left[F(x)\right]_0^2 = \int_0^2 F'(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \overset{(iii)}{>} \int_0^2 (2ex-e)\,dx = \left[ex^2 - ex\right]_0^2 =$

   $= 4e - 2e = 2e.$ Οπότε από την (1) $2f(\xi) > 2e \Leftrightarrow f(\xi) > e \Leftrightarrow f(\xi) > f(1) \overset{f:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \xi > 1$.

   Άρα $\xi \in (1,2)$.

iv. Επίσης $F''(x) = f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, οπότε η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

1) Στη σχέση $xF'(x) \le F(2x) - F(x)$ το “=” ισχύει για x=0.

Αν $x > 0$, θα αποδείξουμε ότι :

$$xF'(x) < F(2x) - F(x) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} > F'(x) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} > F'(x) \ (1)$$

Για τη συνάρτηση F ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $\left[x, 2x\right],\ x > 0,$ αφού είναι συνεχής στο $\left[x, 2x\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x, 2x\right)$. Οπότε υπάρχει $\xi \in \left(x, 2x\right)$, ώστε $F'(\xi) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{2x - x}$.

Επειδή η F είναι κυρτή, τότε η F' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η (1) γίνεται: $F'(\xi) > F'(x) \Leftrightarrow \xi > x$, το οποίο ισχύει.

2) Θέτοντας $2x = y \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{2}$. Για $x = 0\ \textit{τότε}\ \ y = 0$ και για $x = 1\ \textit{τότε}\ \ y = 2$. Οπότε

$$2\int_0^1 F(2x)dx = 2\int_0^2 \frac{1}{2} F(\mathrm{y})dy = \int_0^2 F(x)dx.$$

3) Από το (1) ερώτημα έχουμε $xF'(x) \le F(2x) - F(x),\ \ \textit{για}\ \ \textit{κάθε}\ \ x \ge 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$. Οπότε

$$\int_0^1 xF'(x)dx < \int_0^1 (F(2x) - F(x))dx \Leftrightarrow \int_0^1 F(2x)dx - \int_0^1 F(x)dx > \int_0^1 xF'(x)dx \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^2 F(x)dx - \int_0^1 F(x)dx > \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 F(x)dx > 2F(1).$$

Άσκηση 2

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Δ2. Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Δ5. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(e^x)}{x}$$

<u>Λύση</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'f(x)dx \\
&= [x \cdot f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x)dx \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) f(u)du \quad (\text{αντικατάσταση } u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)dx = 1$, οδηγούμαστε στη σχέση

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad (1)$$

Από την άλλη, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du \quad (\text{αντικατάσταση } u = \frac{\pi}{2} - x)
\end{aligned}$$

Καθώς $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = 1$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1$$

και λόγω της (1)

$$f(0)=0 \qquad (2)$$

Ακόμα,

$$f'(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \qquad (3)$$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή γιατί είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πραγματικά, καθώς $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f'(x)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=f(x)$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=2f(x)f'(x)-2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=2f(x)f'(x)-2f(x)f'(x)\\&=0\end{aligned}$$

Μάλιστα η τιμή της συνάρτησης g είναι ,

$$\begin{aligned}&g(x)=g(0)\Leftrightarrow\\&g(x)=f^2(0)+f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\\&g(x)=1 \qquad (4)\end{aligned}$$

Δ3. Εφόσον $g(x)=f^2(x)+f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

Αλλά από την (4) έχουμε $g(x)=1$, και με την αντικατάσταση $u=\frac{\pi}{2}-x$ στο 2ο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(u)du\ \Leftrightarrow\\&\frac{\pi}{2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=\frac{\pi}{4}$$

Δ4. Από τον ορισμό της συνάρτησης g και λόγω της (4) έχουμε ότι

$$f^2(x)+f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$$

Από όπου προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq f(x)\leq 1 \qquad (5)$$

Όμως στο $Δ_1$ είδαμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ (σχέση 1), που σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση μας δίνει $f(x)\leq\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Δ5. Στο $Δ_1$ αποδείξαμε ότι $f'(0)=1$ και $f(0)=0$. Σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγου λαμβάνουμε,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Rightarrow 1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Λόγω της (5) παίρνουμε ότι $|f(e^x)|\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε για $x\neq 0$

$$\left|\frac{f(e^x)}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{f(e^x)}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνομε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(e^x)}{x}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=4$, $f(4)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Δ₁. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το R και το σύνολο τιμών της.

Δ₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in[0,3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

Δ₃. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{f(x)}$

Δ₄. Να μελετήσετε την $\dfrac{1}{f}$ ως προς τη μονοτονία στο $(-4,4)$.

Δ₅. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ f$ στο και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $[-4,4]$.

Δ₆. Αν η f είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού να βρείτε τον τύπο της f καθώς και τον τύπο της $f\circ f$

Δ₇. Να μελετήσετε την $h(x)=(f\circ f)(x)$ ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ₈. Να

υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$

<u>Λύση</u>

Δ₁.

- Έχουμε $0<4$ και $f(0)>f(4)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2\le 0$, έχουμε :

  $x_1<x_2\le 0 \Leftrightarrow -x_1>-x_2\ge 0 \overset{f\downarrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1)<f(-x_2) \overset{f:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0]$. Τότε το

  $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\, f(0)\right]=(-\infty,4]$, αφού

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\lim\limits_{u\to+\infty} f(-\mathrm{u}) \overset{f:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(\mathrm{u}) \overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta}{=} -\infty$ και $f(0)=4$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$. Τότε το

  $f(A_2)==\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\, f(0)\right]=(-\infty,4]$,
- Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

  $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,4]$.

Δ$_2$. <u>1^{ος} τρόπος</u>

Με άτοπο.

Έστω ότι **δεν** υπάρχει $\mu \in [0,3]$ τέτοιο ώστε $f(\mu+1) = f(\mu)-1 \Leftrightarrow f(\mu+1) - f(\mu)+1 = 0$.Άρα θα ισχύει

$f(x+1) - f(x)+1 \neq 0$, (α) για κάθε $x \in [0,3]$.

Θεωρώ την $g(x) = f(x+1) - f(x)+1$.Για την g ισχύουν:

- Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών. Της $f(x+1)$ (σύνθεση συνεχών), της $-f(x)$ (γινόμενο σταθεράς επί συνεχή συνάρτηση) και της 1 (σταθερή)

$g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,3]$λόγω (α).

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,3]$.

Έστω $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,3]$. Έχουμε:

$g(0) > 0 \Leftrightarrow f(1) - f(0)+1 > 0 \Leftrightarrow f(1) - f(0) > -1$

$g(1) > 0 \Leftrightarrow f(2) - f(1)+1 > 0 \Leftrightarrow f(2) - f(1) > -1$

$g(2) > 0 \Leftrightarrow f(3) - f(2)+1 > 0 \Leftrightarrow f(3) - f(2) > -1$

$g(3) > 0 \Leftrightarrow f(4) - f(3)+1 > 0 \Leftrightarrow f(4) - f(3) > -1$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τελευταίων ανισώσεων της κάθε σειράς προκύπτει

$f(4) - f(0) > -4 \Leftrightarrow 0-4 > -4 \Leftrightarrow -4 > -4$ **άτοπο.**

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x) < 0$.

Επομένως **υπάρχει** $\mu \in [0,3]$τέτοιο ώστε $f(\mu+1) = f(\mu)-1$.

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Θεωρώ την $g(x) = f(x+1) - f(x)+1$.Για την g ισχύουν:

- Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών.
- Για $x = 0 \Rightarrow g(0) = f(1) - f(0)+1, (1)$

  $x = 1 \Rightarrow g(1) = f(2) - f(1)+1, (2)$

  $x = 2 \Rightarrow g(2) = f(3) - f(2)+1, (3)$

  $x = 3 \Rightarrow g(3) = f(4) - f(3)+1, (4)$
- Προσθέτουμε τις ισότητες $(1)+(2)+(3)+(4)$

  Οπότε $g(0)+g(1)+g(2)+g(3) = f(4) - f(0)+4 = 0-4+4 = 0$
- Αν $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$

  Τότε $\mu = 0$ ή $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ ή $\mu = 3$
- Αν οι αριθμοί $g(0), g(1), g(2), g(3)$είναι ομόσημοι , τότε

  $g(0)+g(1)+g(2)+g(3) > 0$ή $g(0)+g(1)+g(2)+g(3) < 0$άτοπο , άρα δύο είναι ετερόσημοι , επομένως στο διάστημα τους εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει $\mu \in [0,3]$τέτοιο ώστε $f(\mu+1) = f(\mu)-1$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο 4, οπότε θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 0$. Όμως αν $x<4 \overset{f\,\gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f(x) > f(4) = 0$. Δηλαδή έχουμε: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 0$ και $f(x)>0$ για $x<4$. Τότε $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Δ4.

- Έχουμε: $-4 < x_1 < x_2 \le 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(-4) < f(x_1) < f(x_2) \le f(0) \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2) \le 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x_1)} > \dfrac{1}{f(x_2)}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γν. Φθίνουσα στο $(-4,0]$.
  Όμοια αποδεικνύεται ότι αν $0 \le x_1 < x_2 < 4 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x_1)} < \dfrac{1}{f(x_2)}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γν, αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ5. Είναι $D_f = A = R$, οπότε $D_{f\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_f\} = \{x \in R \,/\, f(x) \in R\}$.

Προφανώς $f(x) \in R,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in R$. Άρα $D_{f\circ f} = R$.

- Έχουμε: $-4 \le x_1 < x_2 \le 0 \overset{f\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f(-4) \le f(x_1) < f(x_2) \le f(0) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 \le f(x_1) < f(x_2) \le 4 \overset{f\,\gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha[0,4]}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f\circ f)(x_1) > (f\circ f)(x_2).$
  Άρα η $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,0]$.

- Όμοια αποδεικνύεται ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,4]$.

Δ6. Αφού η f είναι τριώνυμο 2ου βαθμού θα έχει τη μορφή: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma\ \ \mu\varepsilon\ \alpha \ne 0.$

Ισχύουν: $\begin{cases} f(-4)=0 \\ f(0)=4 \\ f(4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha - 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases}$.

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$.

Οπότε: $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}x^2 + 4\right)^2 + 4 = -\dfrac{1}{64}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2$.

Δ7.

$$h(x)=(f\circ f)(x)=-\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{2}x^2 .$$

➢ $$h'(x)=-\frac{1}{16}x^3+x=x\left(-\frac{1}{16}x^2+1\right)=-\frac{1}{16}x\left(x-4\right)\left(x+4\right)$$

$$h'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{16}x\left(x-4\right)\left(x+4\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -4 \text{ ή } 0\leq x\leq 4 .$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$h'(x)$		+		-		+		-	
$h(x)$		$\nearrow$	τ.μ	$\searrow$	τ.ε	$\nearrow$	τ.μ	$\searrow$	

Η συνάρτηση h είναι γν. Αύξουσα στα $\left(-\infty,-4\right]$ και $\left[0,4\right]$ και γν. Φθίνουσα στα $\left[-4,0\right]$ και $\left[4,+\infty\right)$. Παρουσιάζει:

- τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ με τιμή $h(0)=0$.
- τοπικό μέγιστο στο $x_2=-4$ με τιμή $h(-4)=4$ και
- τοπικό μέγιστο στο $x_3=4$ με τιμή $h(4)=4$.

➢ $$h''(x)=\left(-\frac{1}{16}x^3+x\right)'=-\frac{3}{16}x^2+1$$

$$h''(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{16}x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2\leq 1 \Leftrightarrow x^2\leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \frac{4\sqrt{3}}{3} .$$

Η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$h''(x)$		-		+		-	
$h(x)$			σ.κ		σ.κ		

Η συνάρτηση h είναι κυρτή στο $\left[-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στα $\left[-\infty,-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει:

- Σημείο καμπής στο $x_4=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ με τιμή $h(-\frac{4\sqrt{3}}{3})=\frac{20}{9}$.

- Σημείο καμπής στο $x_5 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ με τιμή $h(\frac{4\sqrt{3}}{3}) = \frac{20}{9}$

Δ₈. Είναι $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \ ή \ x = 4$ και

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$, οπότε

$$\mathrm{E} = \int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^3\right]_{-4}^{4} + \left[4x\right]_{-4}^{4} = -\frac{1}{12}64 + \frac{1}{12}(-64) + 16 + 16 = \frac{64}{3}\tau.\mu$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα και κυρτή, για την οποία επί πλέον ισχύουν:

- $f(0)=f'(0)=1$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
- Η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x$

Δ1. Να υπολογίσετε τα όρια $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2 f(x)-x^3+x+1}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)-x>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{10} f(x)dx < f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1}

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)$

Δ6. Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-3x$ ως προς την κυρτότητα.

Δ7. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Δ8. Αν επιπλέον ισχύει $0<f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Δ1. Αφού η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \qquad (1)$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=0 \qquad (2)$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)+2x\right]=0+\infty=+\infty \qquad (3)$$

Για $x>0$ έχουμε: $\dfrac{x^3 f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2 f(x)-x^3+x+1}=\dfrac{\cancel{x^3}\left[f(x)-2x+3+\dfrac{1}{x^3}\right]}{\cancel{x^3}\left[\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right]}=\dfrac{\left(f(x)-2x\right)+3+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$.

Οπότε:

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2 f(x)-x^3+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)-2x\right)+3+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}\frac{0+3+0}{2-1+0+0}=3$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\left(0, f(0)\right)$ είναι:
$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$.
Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε θα ισχύει: $f(x)\geq y$ για κάθε $x\in R$ και $f(x)>y$, για κάθε $x\in R^*$ (δηλαδή εκτός από το σημείο επαφής).
Οπότε: $f(x)>y\Leftrightarrow f(x)>x+1\Leftrightarrow f(x)-x>1$, για κάθε $x\in R^*$.

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γν. Αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει:

- $0\leq x\leq 1\Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f\left(1\right)\overset{\text{Το "=" δεν ισχύει παντού στο }[0,1]}{\Rightarrow}\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 f(1)dx\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx<f(1)$

  Όμοια
- $1\leq x\leq 2\Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(2)\Rightarrow ....\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx<f(2)$
- ....
- ....
- $9\leq x\leq 10\Rightarrow f(9)\leq f(x)\leq f(10)\Rightarrow ....\Rightarrow\int_9^{10} f(x)dx<f(10)$

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες έχουμε:
  $$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+...+\int_9^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)\Rightarrow\int_0^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)$$

Δ4. Είναι $D_f=A=R$ και επειδή η f είναι συνεχής και γν. Αύξουσα στο R τότε το σύνολο τιμών της θα είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$.
Αφού η συνάρτηση f είναι γν. Αύξουσα στο R θα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\left(0,+\infty\right)$ που είναι σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f το R.

Δ5. Για να ορίζεται η $f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)$ πρέπει
$\left(x^3\in D_{f^{-1}}\ \&\ 4x\in D_{f^{-1}}\right)\Leftrightarrow\left(x^3>0\ \&\ 4x>0\right)\Leftrightarrow x>0$, οπότε:
$$f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)\overset{f:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x^3)\right)<f\left(f^{-1}(4x)\right)\Leftrightarrow x^3<4x\Leftrightarrow x^3-4x<0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)<0\Leftrightarrow x<-2\ \text{ή}\ 0<x<2.$$
Τελικά η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in\left(0,2\right)$.

Δ6. Έχουμε $h(x)=f(x)-3x$. Η h είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά συναρτήσεων που είναι 2 φορές παραγωγίσιμες, οπότε:
$h'(x)=f'(x)-3$ και $h''(x)=f''(x)$
Επομένως η h έχει την ίδια κυρτότητα με την f, δηλαδή η συνάρτηση h είναι κυρτή στο R.

Δ7. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της της h στο $+\infty$. Τότε:
$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-3\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-3\overset{(i)}{=}2-3=-1\ \text{και}$$

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-\lambda x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x+x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] \overset{(2)}{=} 0$.

Άρα η $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Όμοια αν $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της της h στο $-\infty$. Τότε:

$\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-3\right] = \lim\limits_{x\to=\infty} f(x)\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}-3 = 0.0-3=-3$ και

$\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-\lambda x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-3x+3x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Άρα η $y=-3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Δ₈. Είναι $h'(x)=f'(x)-3$ για κάθε $x\in R$ και επειδή $0<f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε θα έχουμε $-3<f'(x)-3<-1 \Rightarrow h'(x)<0$ για κάθε $x\in R$.

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

α. $\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

β. $f\left(0\right)=\dfrac{3}{2}$

Δ₁. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ₃. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f .

Δ₄. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$

Δ₅. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)$

Δ₆. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

Δ₇. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(\alpha+1)\left(e^x+2\right)=\left(e^x+1\right)(\alpha+2)$, έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha>0$

<u>Λύση</u>

Δ₁.

$\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x-e^xf(x)\Leftrightarrow$

$\left(e^x+1\right)f'(x)+e^xf(x)=e^x\Leftrightarrow\left[\left(e^x+1\right)f(x)\right]'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)f(x)=e^x+c,\ (1)$

Για $x=0$ η (1) γίνεται $2f(0)=1+c\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{3}{2}=1+c\Leftrightarrow c=2$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x+2)e^x}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ₃. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$ άρα η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(1,2\right)$.

Δ4. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^x+2}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+1+1}{e^x+1}dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=1+I,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ I=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$$

Για τον υπολογισμό του I θέτω $u=e^x\Rightarrow du=e^xdx$ και
για $x=0\Rightarrow u=1$ και
για $x=1\Rightarrow u=e$ οπότε το ολοκλήρωνα I γίνεται:

$$I=\int_1^e\frac{1}{u(u+1)}du$$

Έχουμε $\dfrac{1}{u(u+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u+1}\Leftrightarrow 1=A(u+1)+Bu\Leftrightarrow 1=(A+B)u+A$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=1\end{cases}$$

Άρα $I=\int_1^e\frac{1}{u}du+\int_1^e\frac{-1}{u+1}du=\left[\ln u\right]_1^e-\left[\ln(u+1)\right]_1^e=(\ln e-0)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)=1+\ln\frac{2}{e+1}$

Άρα $\mathrm{E}=1+1+\ln\dfrac{2}{e+1}=2+\ln\dfrac{2}{e+1}$ τ.μ

Δ5. $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=2\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=2l$

$$l=\lim_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\overset{u=\frac{\pi}{x}}{\underset{u\to 0}{=}}\pi\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=\pi\cdot 1=\pi$$

Άρα $L=2\pi$

Δ6. Αποδείξαμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1-1$ άρα αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Άρα $D_{f^{-1}}=\mathrm{B}=(1,2)$
Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f. Άρα $f^{-1}(B)=D_f=\mathbb{R}$
Για τον τύπο της f^{-1} θέτουμε $y=f(x)$ και διαδοχικά έχουμε:

$$y=\frac{e^x+2}{e^x+1}\Leftrightarrow ye^x+y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=2-y\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow$$

$$\ln e^x\overset{1<y<2}{=}\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\frac{2-x}{x-1}$$

Άρα ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{2-x}{x-1}$ με $x\in(1,2)=\mathrm{D}_{f^{-1}}$

Δ7. $(\alpha+1)\left(e^x+2\right)=\left(e^x+1\right)(\alpha+2)\Leftrightarrow \dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}\Leftrightarrow f(x)=f(\ln\alpha)$

αφού $f(\ln\alpha)=\dfrac{e^{\ln\alpha}+2}{e^{\ln\alpha}+1}=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

Επομένως η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=f(\ln\alpha)\Leftrightarrow x=\ln\alpha$ μοναδική λύση για κάθε $\alpha>0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την οποία να βρείτε.

Δ₄. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ₅. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(1+x^4\right)+e^{-2}<\ln 5+e^{-x^2}$.

Δ₆. Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το $O(0,0)$ στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτόμενη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Δ₇. Αφού αποδείξετε ότι $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$ (θέτοντας $x=\varepsilon\varphi t$), να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεταιαπό τη C_f ,τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Λύση

Δ₁. $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\le 1\Leftrightarrow \dfrac{|2x|}{\left|x^2+1\right|}\le 1\Leftrightarrow |2x|\le\left|x^2+1\right|\Leftrightarrow 2|x|\le x^2+1\Leftrightarrow x^2+1-2|x|\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2-2|x|+1\ge 0\Leftrightarrow\left(|x|-1\right)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f=A=\mathbb{R}$.

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}$

- Αν $x\ge 0\Rightarrow\dfrac{2x}{1+x^2}\ge 0$ και $e^{-x}>0\Rightarrow\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
- Αν $x<0\Rightarrow -1<\dfrac{2x}{1+x^2}$ και

  $0<-x\Rightarrow e^0<e^{-x}\Rightarrow 1<e^{-x}\Rightarrow 0<\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}\Rightarrow 0<f'(x)\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
- Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

Δ₃. Προφανής ρίζα η $x=0$ αφού $f(0)=\ln 1-e^0+1=0-1+1=0$ η οποία είναι και μοναδική επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και ¨1-1¨.

Δ₄. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $D_f=A=\mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών είναι $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left[\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}-1\right]+1\right]=$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x} . \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}-1\right]+1=\left(+\infty\right).\left(0-1\right)+1=-\infty$$, γιατί:

- $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{-x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$ και
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2}\lim_{x\to-\infty} e^{x} =$

  $= -\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0.0 = 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]-\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+1=\left(+\infty\right)-0+1=+\infty$

Άρα $f(\mathrm{A})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$.

Δ5. $\ln\left(1+x^4\right)+e^{-2}<\ln 5+e^{-x^2} \Leftrightarrow \ln\left(1+x^4\right)-e^{-x^2}+1<\ln\left(1+2^2\right)-e^{-2}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2)<f(2) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2<2 \Leftrightarrow |x|^2<\left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Δ6. Επειδή $f(0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$, τότε το $\mathrm{O}(0,0)\in C_f \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \mathrm{O}(0,0)\in C_{f^{-1}}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f στο $\mathrm{O}(0,0)$ είναι:

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=1.x \Leftrightarrow y=x$. (1)

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή , ως προς την $y=x$.

Λόγω συμμετρίας , επειδή η $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο O(0,0), θα είναι και εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο O(0,0).

Άρα οι $C_f \;\; \kappa\alpha\iota \;\; C_{f^{-1}}$ στο κοινό τους σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ έχουν κοινή εφαπτομένη την $y=x$.

Δ7.

- Αν $x=\varepsilon\varphi t \Rightarrow dx=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$.

Για $x=0,\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ t=0$ και για $x=1,\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ t=\frac{\pi}{4}$. Οπότε:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_0^{\pi/4}\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 t}}{\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t}\cdot\frac{1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 t}}dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}dt=\left[t\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4} .$$

- Για $x \geq 0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \left| f(x) \right| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\ln\left(1 + x^2\right) - e^{-x} + 1 \right] dx = \int_0^1 \ln\left(1 + x^2\right) dx + \int_0^1 -e^{-x} dx + \int_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x)' \ln\left(x^2 + 1\right) dx + \left[e^{-x} \right]_0^1 + \left[x \right]_0^1 = \left[x \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{e} - 1 + 1 - 0 =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{e} = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\left[x \right]_0^1 + 2\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx}_{\pi/4} = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 + \frac{1}{e} + \frac{\pi}{2} - 2 \right) \text{τ.μ.}$$

Άσκηση 7

Δίνονται συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\to\mathbb{R}$ παράγουσα της $-3\eta\mu^3x$ με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ και συνάρτηση $g(x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες στο διάστημα $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια και η $g'(x)$ είναι περιττή στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Δ5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g,f^{-1}

Δ6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τη $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $(\varepsilon_1): x+y=2$ και $(\varepsilon_2): x+y=-\frac{\pi}{2}$.

Δ7. Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$ βρίσκεται πάνω στη $C_{f^{-1}}$

Δ8. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, να βρείτε την κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο Α .

<u>Λύση</u>

Δ1. Το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Η συνάρτηση f είναι παράγουσα της $-3\eta\mu^3x$ στο $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, άρα $f'(x)=-3\eta\mu^3x$

Επίσης $g'(x)=\left(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3x\right)'=-3\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu x=-3\eta\mu x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)=-3\eta\mu^3x$ άρα $f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c,\ (1)$

Για $x=-\frac{\pi}{2}$ έχουμε $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$,οπότε η (1) για $x=-\frac{\pi}{2}$ γίνεται $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)+c$ ή $0=c$ άρα $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Δ2. Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow -x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Επίσης $g(-x)=3\sigma\upsilon\nu(-x)-\sigma\upsilon\nu^3(-x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3x=g(x)$ άρα άρτια.

Έχουμε $g(-x)=g(x)\Rightarrow\left(g(-x)\right)'=g'(x)\Rightarrow g'(-x)(-x)'=g'(x)\Rightarrow -g'(-x)=g'(x)$ άρα η g' είναι περιττή.

<u>Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή. Οι προτάσεις αυτές για να χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν .</u>

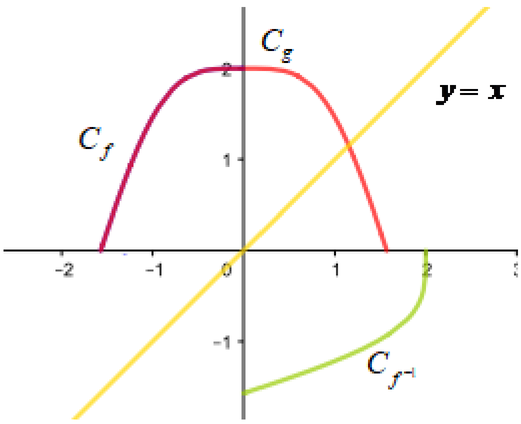
Δ3. Έχουμε $f'(x)=-3\eta\mu^3 x>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.Επίσης $f''(x)=-9\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, άρα η f είναι κοίλη. Η μονοτονία και η κυρτότητα της f της φαίνεται συνοπτικά στον διπλανό πίνακα μεταβολών, όπου παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $-\frac{\pi}{2}$ το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, μέγιστο στο 0 το $f(0)=g(0)=2$ και δεν έχει σημεία καμπής .

x	$-\pi/2$		0
$f'(x)$		+	
$f''(x)$		−	
$f(x)$		↗	

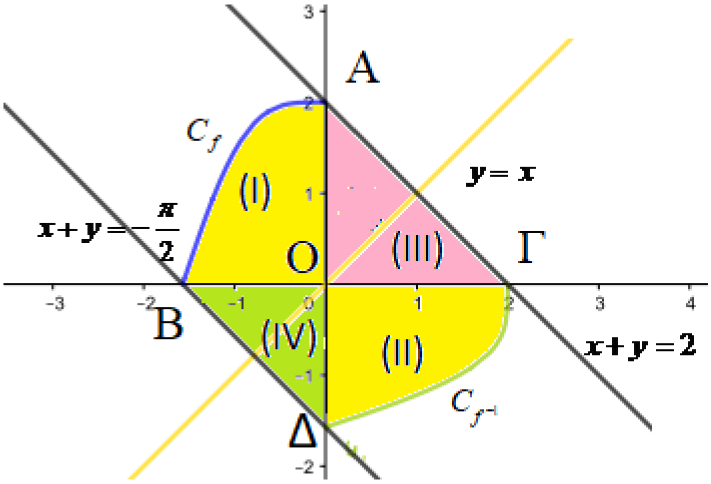
Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Έχουμε $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 0\le f(x)\le 2$ άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $[0,2]$ το οποίο είναι και πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Δ5. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g,f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y=x$ του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου



Δ₆.



$$E=(I)+(III)+(II)+(IV)=E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}$$

Λόγω συμμετρίας τα χωρία (I) και (II) είναι ισεμβαδικά, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=2E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Delta OB}$$

$$E_{AOB}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\sigma\upsilon\nu x dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=$$

$$[3\eta\mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^2x(\eta\mu x)'dx=3(0-(-1))-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\eta\mu^2x)(\eta\mu x)'dx\overset{*}{=}$$

$$3-\int_{-1}^{0}(1-u^2)dx=3-\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{0}=3+\left(-1+\frac{1}{3}\right)=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\tau.\mu$$

* Θέτουμε $u=\eta\mu x\Rightarrow du=(\eta\mu x)'dx$ οπότε για $x=0\Rightarrow u=0,\ x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=-1$

$$E_{AO\Gamma}=\frac{(\mathrm{OA})(\mathrm{O\Gamma})}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\tau.\mu \quad \text{και} \quad E_{\Delta OB}=\frac{(\mathrm{OB})(\mathrm{O\Delta})}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot}{2}=\frac{\pi^2}{8}\tau.\mu$$

Άρα $E=2E_{AOB}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}=2\cdot\frac{7}{3}+2+\frac{\pi^2}{8}=\frac{20}{3}+\frac{\pi^2}{8}\ \tau.\mu$

Δ₇. Το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)\in C_{f^{-1}}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\frac{5\sqrt{2}}{4}=3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ το οποίο ισχύει.

Δ₈. Η κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$ είναι ο αριθμός $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

Έχουμε $\left(fof^{-1}\right)(x)=x$ ή $f\left(f^{-1}(x)\right)=x\Rightarrow\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)'=(x)'\Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}(x)\right)'=1$

Για $x=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ έχουμε $f'\left(f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1\Leftrightarrow$

$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x(x^2+x+3)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν $g(2)+xg(x)-g(x+2)-(f(x)-3)^2\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $g'(2)=0$

Δ₂. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x\to-\infty$.

Δ₃. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ₄. Να βρείτε σημείο Β της C_h με $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2,0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

Δ₅. Αν $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ και $\displaystyle\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)dx=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\alpha): g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0$

<u>Λύση</u>

Δ₁. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2)-\big(g(2-h)-g(2)\big)}{h}=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}-\dfrac{\big(g(2-h)-g(2)\big)}{h}\right)=0,(1)$

- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}\right)\overset{2+h=x}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\overset{g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma}{=}g'(2),(2)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{g(2-h)-g(2)}{h}\right)\overset{2-h=x}{=}-\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\overset{g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma}{=}-g'(2),(3)$

Η (1) με βάση τις $(2),(3)$ γίνεται $g'(2)-\big(-g'(2)\big)=0\Leftrightarrow 2g'(2)=0\Leftrightarrow g'(2)=0$.

Δ₂. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(x^2+x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+3}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{-e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0\Rightarrow y=0$ (οριζόντια ασύμπτωτη)

Δ₃. Έχουμε $f'(x)=e^x(x^2+3x+4)>0\Rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x(x^2+3x+4)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0,+\infty)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$0\ \nearrow\ +\infty$

Δ4. Το σημείο $B\left(x,\sqrt{f(x)}\right)$ της C_h απέχει απόσταση από το $A(2,0)$

$$(AB)=d(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{f(x)}-0\right)^2}=\sqrt{(x-2)^2+f(x)},x\in\mathbb{R}$$

$$d'(x)=\frac{2(x-2)+f'(x)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}=\frac{\overbrace{2(x-2)+e^x\left(x^2+3x+4\right)}^{t(x)}}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη συνάρτηση $t(x)=2(x-2)+e^x\left(x^2+3x+4\right)$ ως προς το πρόσημό της. Η εξίσωση $t(x)=0$ έχει προφανής λύσης την $x=0$

Έχουμε $t'(x)=2+e^x\left(\underbrace{x^2+5x+7}_{+}\right)>0$.Το πρόσημο της $t(x)$ φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	$+$		$+$
$d'=t$	$-\infty$ $\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$ $+\infty$

Το πρόσημό της $d(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d	$\searrow$		$\nearrow$

$$\min d(0)=\sqrt{7}$$

Οπότε το σημείο B είναι $\mathrm{B}(0,h(0))$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{f(0)}\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{3}\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο B είναι

$\lambda_{(\varepsilon)}=h'(0)=\dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι

$$\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{0-\sqrt{3}}{2-0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\lambda_{\mathrm{AB}}\lambda_{(\varepsilon)}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-1\Rightarrow(\varepsilon)\perp\mathrm{AB}$$

Δ5. Από τη σχέση $\underbrace{g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2}_{H(x)}\leq 0$ έχουμε $H(x)\leq H(0)$ δηλαδή η συνάρτηση $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο 0. Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $H(x)$ και παραγωγίσιμη στο 0 άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, άρα $H'(0)=0, (*)$.

Όμως ισχύει: $H(x)=g(2)+xg(x)-g(x+2)-(f(x)-3)^2 \Rightarrow$

$H'(x)=g(x)+xg'(x)-g'(x+2)-2(f(x)-3)f'(x)$.

Για $x=0 \Rightarrow H'(0)=0 \Rightarrow g(0)-g'(2)-2(f(0)-3)f'(0)=0 \Rightarrow g(0)=g'(2)$

$\Rightarrow g(0)=g'(2)=0,(2)$

Η σχέση $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$ από τη (2) γίνεται $\int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$

Αν $g(\alpha)>0$ και επειδή $f(x)>0 \Rightarrow \int_{2}^{g(\alpha)} f(x)dx>0$ άτοπο.

Αν $g(\alpha)<0$ και επειδή $f(x)>0 \Rightarrow \int_{2}^{g(\alpha)} f(x)dx<0$ άτοπο. Άρα $g(\alpha)=0$, (3).

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $W(x)=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\alpha]$.
    - $W(x)=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ (γινόμενο παραγωγίσιμων), οπότε και συνεχής στο $[0,\alpha]$
    - $W(0)=g(0)\cdot \sigma\upsilon\nu 0=0,\ W(\alpha)=g(\alpha)\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha=0,$

      Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\alpha): W'(x_0)=0$

      Έχουμε όμως $W'(x)=g'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x-g(x)\cdot \eta\mu x$. Για

      $x=x_0 \Rightarrow W'(x_0)=g'(x_0)\cdot \sigma\upsilon\nu x_0-g(x_0)\cdot \eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow$

      $g'(x_0)=g(x_0)\cdot \dfrac{\eta\mu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} \Leftrightarrow g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0$

Ημερομηνία τροποποίησης: 26/03/2018