Σχ. Έτος: 2010 – 2011
Σχολική Μονάδα: 4ο ΓΕΛ ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ

Ερευνητική Εργασία

"Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Πως και Ποιοι κοινωνικοί, πολιτισμικοί, οικονομικοί και άλλοι παράγοντες διαμόρφωσαν την εξέλιξη της γεωμετρίας στην αρχαιότητα."

Εκπόνηση Εργασίας από τους μαθητές της Α΄Λυκείου:
ΑΝΔΡΙΑΝΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΚΟΡΙΤΣΟΓΛΟΥ ΑΝΔΡΟΝΙΚΗ
ΜΑΚΡΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ
ΜΑΛΛΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ
ΜΠΕΚΙΟ ΣΑΜΠΙΝΑ
ΜΠΟΥΡΛΩΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ
ΠΥΛΑΡΑ ΣΟΦΙΑ
ΡΕΝΙΕΡΗ ΜΑΡΙΑ – ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ
ΣΠΙΝΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΣΤΑΜΑΤΟΥΖΑ ΕΥΣΤΑΘΙΑ
ΣΥΡΙΓΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ
ΧΡΙΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Υπεύθυνος καθηγητής:
Ιωάννης Δ. Κοσκινάς

Πριν την Ιστορία...

Ο Άνθρωπος χρειάστηκε 1.000.000 χρόνια για να οδηγηθεί στην αφηρημένη έννοια των αριθμών. Ο Homo Sapiens 300.000 χρόνια πριν, κάνει μια μικρή αρίθμηση με κλαδιά. Ο Homo Sapiens Sapiens 100.000 χρόνια πριν, χρησιμοποιεί κάποιες αριθμητικές λέξεις. Οι κυνηγοί - τροφοσυλλέκτες (70.000 -30.000 π.Χ.) καταλάβαιναν την απλή πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την αφαίρεση. Το μοίρασμα της τροφής τους σημαίνει ότι κατανοούσαν τη διαίρεση.

Η παλαιότερη ένδειξη αριθμητικής καταγραφής βρέθηκε στη Σουαζιλάνδη της Νότιας Αφρικής και είναι μια περόνη μπαμπουίνου με 29 εμφανείς εγκοπές που χρονολογείται από το 35.000 π.Χ. Μοιάζει με τα «ημερολογιακά ραβδιά» που ακόμα χρησιμοποιούν στη Ναμίμπια για να καταγράφουν την παρέλευση του χρόνου. Άλλα κόκαλα, της Νεολιθικής Περιόδου, έχουν βρεθεί στη Δυτική Ευρώπη. Μια κερκίδα λύκου που βρέθηκε στην Τσεχία και χρονολογείται από το 30.000 π.Χ. φέρει 55 εγκοπές σε δύο σειρές ανά πέντε, οι οποίες μάλλον αποτελούν καταγραφή θηραμάτων.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα ευρήματα είναι το αποκαλούμενο κόκαλο Ισάνγκο, που βρέθηκε στις όχθες της λίμνης Έντουαρντς, ανάμεσα στην Ουγκάντα και το Κονγκό. Έχει χρονολογηθεί το 20.000 π.Χ. και μοιάζει να είναι κάτι παραπάνω από πίνακας θηραμάτων. Μικροσκοπική ανάλυση αποκάλυψε πρόσθετες εγκοπές, οι οποίες μπορούν να συσχετισθούν με τις φάσεις της Σελήνης. Μέσω της Αστρονομίας, της Αστρολογίας ή της κοσμολογίας, ο ουρανός άσκησε τη μεγαλύτερη επίδραση στην ιστορία των μαθηματικών.

Έτσι με την εξέλιξη του ανθρώπου και την οργάνωσή του σε κοινότητες ξεκίνησε η ανάπτυξη του πολιτισμού και των επιστημών, στη Μεσοποταμία και στην Αίγυπτο. Εκεί εμφανίζονται και οι πρώτες μαθηματικές καταγραφές (περίπου το 3000 π.Χ) και ουσιαστικά ξεκινάει η Ιστορία της Γεωμετρίας.

ΙΣΤΟΡΙΚΟΙ ΧΡΟΝΟΙ

ΠΡΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μεσοποταμία

Η Μεσοποταμία ήταν ένα από τα σημαντικότερα μέρη, οπού ο άνθρωπος συγκρότησε αρχικά μικρές κοινότητες και αργότερα πόλεις. Ο πρώτος ανθρώπινος πολιτισμός που αναπτύχθηκε ήταν οι λεγόμενοι Σουμέριοι, λαός ινδοευρωπαϊκής καταγωγής, μα γνωρίζουμε ελάχιστα για τον πολιτισμό τους. Η Σουμέρια εκτεινόταν γεωγραφικά ανάμεσα και γύρω των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη και γύρω από τα βόρεια παράλια του Περσικού Κόλπου, όπου βρίσκονται μέχρι και σήμερα οι εκβολές των δύο αυτών ποταμών, στο σημερινό Νότιο Ιράν.

Η γεωγραφική θέση της περιοχής αυτής και τα εύφορα εδάφη συνέβαλαν στο να αναπτυχθεί γρήγορα ο πολιτισμός τους και στη δημιουργία κράτους. Από αρκετούς Ιστορικούς, θεωρείται πως η Σουμέρια ήταν ομόσπονδο κράτος, με οργάνωση μακρά παρόμοια με αυτή των ελληνικών πόλεων -κρατών του 4^{ου} Αιώνα π.Χ. Η κάθε πόλη είχε το δικό της βασιλιά και αυτονομία από τις υπόλοιπες, μα όλες τους ήταν υποταγμένες στο βασιλιά της ισχυρότερης πόλης, που αποκαλούσαν Μέγα Βασιλιά. Σημαντικές πόλεις ήταν η Ουρ και η Ουρούκ.

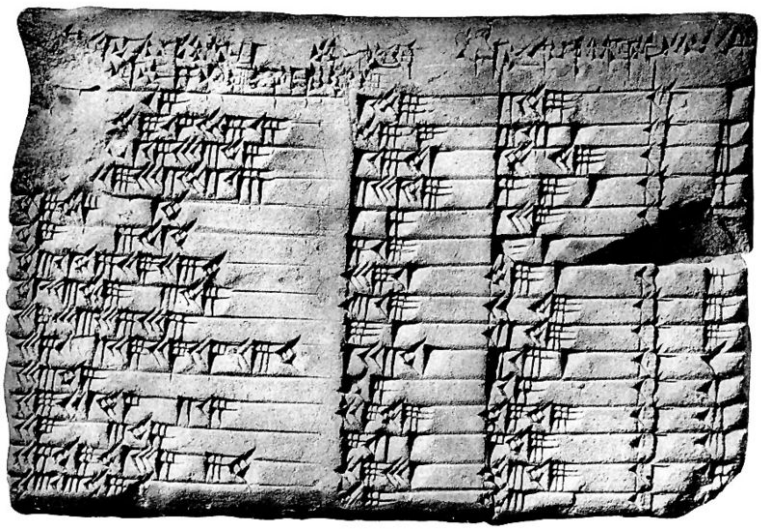
Η θρησκεία τους ήταν τοπικιστική και πίστευαν στην αντίληψη πως οι Θεοί τιμωρούν τους αμαρτωλούς και στην έννοια της μοίρας και του πεπρωμένου. Οι ναοί τους ήταν χτίζονταν σε πύργους τεράστιου ύψους και έκτασης, τους οποίους ονόμαζαν «Ζιγκουράτ». Εκτός από ναός, το Ζιγκουράτ ήταν αποθήκη και θησαυροφυλάκιο, καθώς και διοικητικό κέντρο. Οι Σουμέριοι ανέπτυξαν τέχνες, όπως η αγγειοπλαστική και η μικροτεχνία, και επιστήμες, όπως η αστρολογία και η αστρονομία και τα μαθηματικά. Οι Ιερείς τους που ήταν γνώστες των επιστημών θεωρούνταν από τους «κοινούς» ανθρώπους ως μάγοι. Στους Σουμέριους αποδίδεται και η ανακάλυψη της σφηνοειδούς γραφής και του τροχού, που μέχρι και σήμερα είναι η μεγαλύτερη ανακάλυψη του ανθρώπου. Γνωστή πηγή για τον πολιτισμό και τη θρησκεία τους καθώς και για την καθημερινή ζωή τους είναι το λεγόμενο Έπος του Γιλγαμές και χρονολογείται μαζί με τον πολιτισμό τους μεταξύ 3.000-1.500 π.Χ. Το κράτος τους διαλύθηκε από τη γειτονική Ακκάδ και αργότερα ενσωματώθηκε στην Βαβυλωνιακή Αυτοκρατορία, που αποτέλεσε συνέχεια του πολιτισμού της Μεσοποταμίας.

Υπήρχαν πολλά επίπεδα στην κοινωνική πυραμίδα της αρχαίας Βαβυλώνας. Στην κορυφή ήταν ο βασιλιάς, λίγο πιο κάτω, οι ιερείς, οι αριστοκράτες, οι στρατιωτικοί και στη συνέχεια οι ελεύθεροι πολίτες και οι δούλοι. Ωστόσο, αντίθετα με τους άλλους πολιτισμούς της αρχαιότητας στη Βαβυλώνα υπήρχε ένας μικρός βαθμός κοινωνικής κινητικότητας. Κάποιος που είχε γίνει δούλος λόγω χρεών, μπορούσε να πληρώσει τα χρέη του για να ξαναγίνει ελεύθερος πολίτης. Ουσιαστικά στη Βαβυλώνα υπήρχαν τρεις κοινωνικές τάξεις: η ανώτερη τάξη που αποτελούταν από τα άτομα με εξουσία, δηλαδή τον βασιλιά και τους ιερείς, οι ελεύθεροι πολίτες και οι δούλοι. Όμως η ανώτερη τάξη κυριαρχούσε πάνω στις άλλες. Ο βασιλιάς ήταν κυρίαρχος σε όλους τους τομείς εκτός από τη θρησκεία και δήλωνε την υποταγή του στον ανώτατο αρχιερέα κάθε χρόνο μέσω μιας τελετής.

Οι Βαβυλώνιοι ήταν αυτοί οι οποίοι ανέπτυξαν την επιστήμη και την τεχνολογία βασιζόμενοι σε παλαιότερες αρχικές παρατηρήσεις των Σουμερίων και είχαν κάνει επίσης μεγάλες προόδους στην αριθμητική. Οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας χρησιμοποιούσαν για τις μαθηματικές πράξεις το εξηκονταδικό σύστημα (με βάση το εξήντα) αλλά και το δεκαδικό. Το πρώτο σύστημα ήταν μάλλον βολικό επειδή ο αριθμός εξήντα έχει πολλούς διαιρέτες, που κάνουν τις πράξεις πιο εύκολες. Άλλος λόγος αυτής της επιλογής μπορεί να ήταν ότι η μονάδα βάρους που χρησιμοποιούσαν (μίνα) υποδιαιρούνταν σε 60 υπομονάδες (σεκέλ). Όμως η μεγαλύτερη συμβολή των Βαβυλωνίων στα μαθηματικά, ήταν η αξία που παίρνει κάθε αριθμητικό σύμβολο ανάλογα με τη θέση που βρίσκεται στη σειρά αναγραφής των αριθμών. Στο δεκαδικό σύστημα, για παράδειγμα, και στον αριθμό 1111, ο τελευταίος άσος υποδηλώνει τις μονάδες, ο δεύτερος από το τέλος τις δεκάδες, ο τρίτος τις εκατοντάδες και ο τέταρτος τις χιλιάδες. Αυτός ο τρόπος αναγραφής αριθμών είχε ανακαλυφθεί από τους Βαβυλώνιους τέσσερις χιλιάδες χρόνια πριν την εποχή μας.

Το εξηνταδικό σύστημα.

Στο σύστημα αυτό απαιτούνται 60 απλές μονάδες για να δημιουργήσουν μια μονάδα ανώτερης τάξης, μια εξηντάδα. Με 60 εξηντάδες (δηλαδή 3.600 απλές μονάδες) φτιάχνουμε μια μονάδα επίσης ανώτερης τάξης, μια τρισχιλιοεξακοσάδα κ.ο.κ.



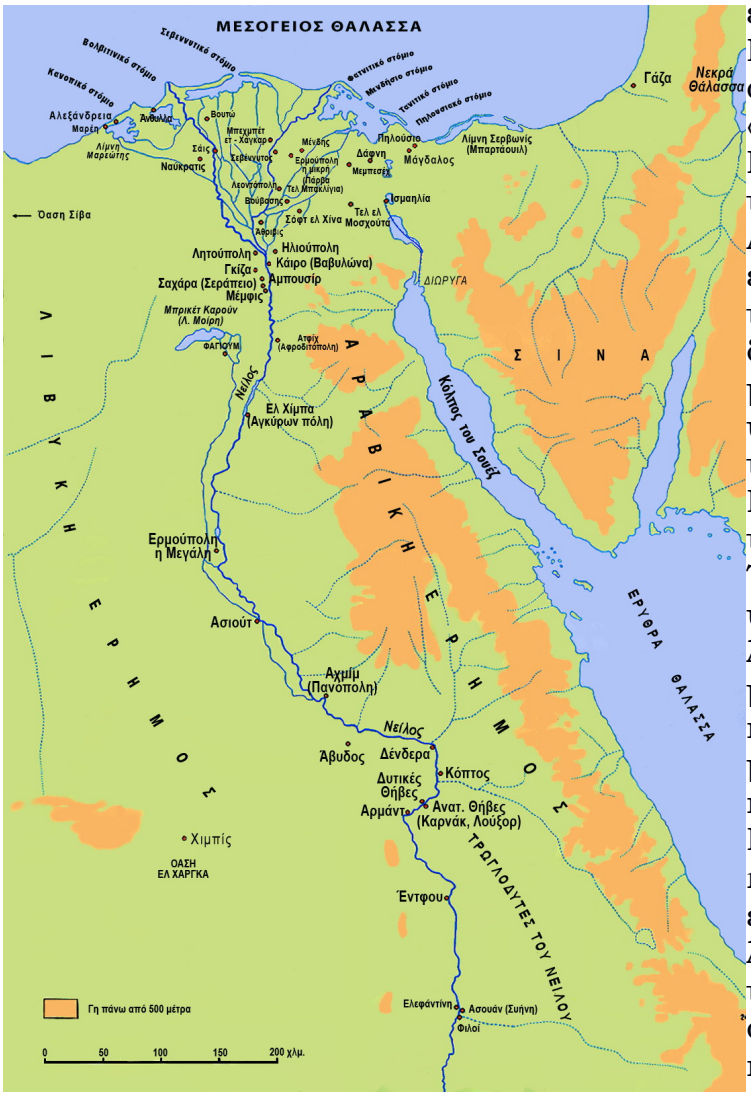
Το σύστημα αυτό χρησιμοποιήθηκε από τους **Σουμέριους** το 2.500 π.Χ. και αργότερα από τους **Βαβυλώνιους** το 2000 εως το 500 π.Χ. , αλλά και από τους **Κινέζους** την ίδια περίοδο. Το αριθμητικό τους σύστημα είχε ως βάση το 60, ήταν όμως **επαναληπτικό** και όχι **ψηφιακό**, αφού οι μονάδες του παριστάνονται με επανάληψη του ίδιου συμβόλου και όχι με διαφορετικά σύμβολα. Χρησιμοποιώντας μόνο δύο: την **"σφήνα"** και **το "καρφί"** , αν θέλαν για παράδειγμα να συμβολίσουν τον αριθμό 5 έγραφαν ισάριθμες σφήνες , ενώ ο αριθμός 19 γραφόταν σαν ένα καρφί και δεξιά του 9 σφήνες. Επίσης ήταν **θεσιακό**, που σημαίνει ότι η αξία κάθε αριθμού καθορίζεται από τη θέση του μέσα στον αριθμό. Τέλος δεν είχαν σύμβολο για το 0, ούτε και υποδιαστολή.

Οι Βαβυλώνιοι καθιέρωσαν τη μέτρηση των γωνιών σε μοίρες, σε πρώτα και δεύτερα λεπτά. Οι περισσότερες δέλτοι (πινακίδες, συνήθως τριγωνικού σχήματος, για γράψιμο), που προέρχονται από τη Βαβυλωνιακή περίοδο, περιέχουν πίνακες μετατροπής μεγαλύτερων μονάδων σε μικρότερες και αντιστρόφως καθώς και πίνακες πολλαπλασιασμού, ενώ είναι σημαντικό ότι μερικές περιέχουν και πίνακες τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Λέγοντας Βαβυλωνιακά μαθηματικά, εννοούμε γενικότερα τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν από τους λαούς της Μεσοποταμίας μεταξύ 3.500-500 π.Χ. Οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας χρησιμοποιούσαν τις μαθηματικές τους γνώσεις για να λύσουν πρακτικά καθημερινά αλγεβρικά ή γεωμετρικά προβλήματα

αλλά δεν ανέπτυξαν την θεωρητική πλευρά των μαθηματικών όπως αργότερα έκαναν οι Έλληνες. Οι αστρονομικές τους παρατηρήσεις περιορίζονταν στον ήλιο, τη σελήνη και στους πέντε ορατούς πλανήτες τους οποίους θεωρούσαν θεούς που επηρέαζαν τα τεκταινόμενα επί της γης. Οι σημειώσεις των κινήσεων τους και η ερμηνεία τους αποτέλεσαν αργότερα το αρχικό υλικό για την ανάπτυξη της αστρολογίας, η οποία βέβαια δεν συγκαταλέγεται ανάμεσα στις επιστήμες. Οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό από παρατηρήσεις και σημεία Είναι σήμερα γνωστό ότι ένα μεγάλο μέρος πέρασε στους Έλληνες. Αυτά τα πρώτα βήματα στην αστρονομία οδήγησαν και στη γέννηση της Τριγωνομετρίας. Από τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων μεταδόθηκαν στην Ελλάδα κατά τους Ελληνιστικούς Χρόνους το 60-δικό σύστημα και η διαίρεση της περιφέρειας του κύκλου σε 360 μοίρες και υιοθετήθηκαν από τους Έλληνες.

Αίγυπτος

Αίγυπτος ονομαζόταν από τους Αρχαίους Έλληνες το βορειοανατολικό τμήμα της Αφρικής, το οποίο διαρρέει ο ποταμός Νείλος. Την σπουδαιότητα του ποταμού για τη χώρα και το λαό επισημάνει ο ιστορικός Ηρόδοτος, όταν αποκαλεί την Αίγυπτο «Δώρο του Νείλου». Ο Νείλος από τις πηγές του στα Όρη της Αιθιοπίας ως τις εκβολές του στα βόρεια της χώρας, όπου δημιουργεί ένα δέλτα μεγάλης έκτασης, υπήρξε ζωοδότρα πηγή του Αιγυπτιακού Πολιτισμού ήδη από την Εποχή του Λίθου. Τριγύρω από τον Νείλο, υπάρχει μια μεγάλη λωρίδα πρασίνου, όπου με τις πλημμύρες του ποταμού το καλοκαίρι μετατρέπεται σε αυτό που αναφέρει ο Ηρόδοτος ως μαύρη γη ή Κεμέτ. Αυτό ήταν ένα είδος ηφαιστειογενούς λάσπης το οποίο έκανε το έδαφος έφορο και συνέβαλε στην παραγωγή του σίτου και των απαραίτητων προμηθειών για την επιβίωση των Αιγυπτίων και την οικονομική και αργότερα τεχνολογική ανάπτυξη της χώρας.



Όσων αφορά την οικονομία, η ζωή στην Αίγυπτο ήταν άμεσα συνδεδεμένη με τον Νείλο και τις πλημμύρες του. Η βάση της οικονομίας στην Αίγυπτο ήταν η γεωργία. Η συστηματική οργάνωσή της ήταν κάτω από την άμεση επίβλεψη του κράτους. Οι παράγοντες που δημιούργησαν την ανάγκη αυτή ήταν η άρδευση των χωραφιών και η συντήρηση των αυλακιών, που ήταν μια επίπονη και συνεχής εργασία. Η χώρα δεν θα είχε εξελιχθεί αν δεν υπήρχε ο Νείλος και αυτή η γόνιμη λωρίδα γύρω από τις όχθες του, διότι πέρα από εκεί απλώνονται άγονες εκτάσεις ερήμου.

Η οργάνωση της κοινωνίας ήταν ιεραρχική, όπου στην κορυφή της βρισκόταν ο Βασιλιάς ή Φαραώ, ο οποίος έλεγχε την πολιτική εξουσία καθώς και όλα τα άλλα είδη εξουσιών και λατρευόταν από τους υπηκόους του ως επίγειος θεός. Έπειτα ήταν οι Ιερείς, στρατιωτικοί,

υπάλληλοι του Φαραώ και Ευγενείς, ενώ τα κατώτερα κοινωνικά στρώματα αποτελούσαν οι τεχνίτες και οι αγρότες και οι κτηνοτρόφοι, οι οποίοι αποτελούνταν από τον λαό ή από δούλους.

Η γενική τάση των κατοίκων της Αιγύπτου στις επιστήμες, χαρακτηρίζονταν από την προσπάθεια της πρακτικής εκμετάλλευσης κάθε γνώσης. Ασχολούνταν με τα μαθηματικά κι απ' αυτούς επίσης γνωρίζουμε το δεκαδικό σύστημα. Την εποχή εκείνη η επιστήμη ήταν ένα με τη θρησκεία ή τη μαγεία και οι βασικές γνώσεις διακατέχονταν από τους Ιερείς. Τις γνώσεις αυτές τις μεταβίβαζαν στα παιδιά τους, συγκεκριμένα στους γιους, οι οποίοι τις αποδέχονταν χωρίς να αναζητήσουν αν όντως αληθεύει όπως, κάνουν οι σύγχρονοι επιστήμονες. Τα Μαθηματικά (Αριθμητική και Γεωμετρία) αποτελούσαν μέρος της μυστικής γνώσης των Ιερέων, την οποία συνέδεαν με τον μυστικισμό.

Πριν από τη σύλληψη της έννοιας του αριθμού όπως την ξέρουμε σήμερα ο τρόπος περιγραφής των αντικειμένων ήταν τελείως διαφορετικός. Οι βάσεις προς την κατεύθυνση αυτή μπήκαν περίπου κατά την 6η χιλιετία π.Χ.

Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε πολύ περισσότερο στην αρχαία Αίγυπτο, πράγμα που αποδεικνύεται από την αρχιτεκτονική των περίφημων πυραμίδων. Ένα από τα πρώτα σύμβολα που χάραξε ο άνθρωπος ήταν ο κύκλος, ο οποίος θεωρούνταν ως αποτύπωση του ηλιακού δίσκου και συμβόλιζε τα πέρατα του φυσικού ορίζοντα. Η μαθηματική σφαίρα παρέπεμπε στον ουράνιο θόλο. Το επίπεδο της στοιχειώδους γεωμετρίας ήταν τότε για παράδειγμα η ιδεατή απεικόνιση της στάθμης του νερού. Η αφαίρεση της καθημερινής εμπειρίας και η μεταφορά των απλών παρατηρήσεων στο επίπεδο μιας νοητικής διεργασίας. Αρχικά εξυπηρέτησε πρακτικές και τεχνικές ανάγκες, όπως την οριοθέτηση και μέτρηση των γαιών, απ' όπου πήρε το όνομά της αυτό το είδος της μαθηματικής επιστήμης. Αυτό συνέβαινε ετησίως, μετά τις πλημμύρες του Νείλου, προκειμένου να αποδοθούν και πάλι οι ιδιοκτησίες στους κατόχους τους, ενώ παράλληλα, επιμετρούνταν και οι φορολογικές υποχρεώσεις στον Φαραώ. Αργότερα πιο προχωρημένοι εμπειρικοί και πρακτικοί υπολογισμοί χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή των Πυραμίδων και άλλων σημαντικών έργων, τα οποία σηματοδοτούσαν την πρόοδο του Αιγυπτιακού πολιτισμού και κράτους. Τα μαθηματικά και η γεωμετρία, συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Αστρολογίας. Οι αστρολόγοι - ιερείς και αστρονόμοι - εξέταζαν τα φαινόμενα του ουρανού. Με βάση τα αστέρια καθόριζαν το εορτολόγιό τους. Έτσι μετρώντας την απόσταση των άστρων ή των πλανητών από τη Γη και μελετώντας τις θέσεις της Σελήνης, οι Ιερείς υπολόγιζαν και καθόριζαν πότε θα τελούνταν οι εορτές ή τα μυστήρια της θρησκείας τους. Ανάλογες πρακτικές ανάγκες, κάλυπτε η γεωμετρία και σε άλλους σημαντικούς πολιτισμούς, όπως η Βαβυλώνα, όπου σε αυτές τις δύο χώρες για πρώτη φορά αναφέρεται ο όρος «Γεωμετρία».

Όσων αφορά για τη θρησκεία, εκτός από το θεοκρατικό μοντέλο διακυβέρνησης της χώρας και την πολυθεϊστική αντίληψη στην πίστη των Αιγυπτίων, οι Ιερείς (όπως αναφέραμε και παραπάνω) θεωρούνταν πως είχαν μοναδικές γνώσεις και χαρίσματα δοσμένα από τους Θεούς

και είχαν την ιδιότητα της μαγείας και της ερμηνείας των ιερών σημαδιών που τους έστελναν.
Στο Μετά τα Φυσικά, Α 1 ο Αριστοτέλης γράφει:
Ωστόσο πιστεύουμε ότι η κατοχή του είδους των πραγμάτων και η βαθιά τους κατανόηση (το ειδέναι και το επαΐειν), υπάρχει στην τέχνη μάλλον παρά την εμπειρία και κρίνουμε σοφότερους τους ανθρώπους της τέχνης από τους εμπειρικούς, βάση της σκέψης ότι η σοφία σε κάθε άνθρωπο παρακολουθεί την καθαρή γνώση (το ειδέναι). Και αυτό γιατί οι μεν ξέρουν την αιτία, οι άλλοι όχι. Για αυτό πιστεύουμε ότι η τέχνη είναι σε μεγαλύτερο βαθμό επιστήμη, από την εμπειρία. Καθόσον οι άνθρωποι της τέχνης μπορούν να διδάσκουν ενώ οι εμπειρικοί όχι. Από αυτά εξάγεται το συμπέρασμα ότι όλες αυτές οι διάφορες τέχνες είχαν ήδη δημιουργηθεί όταν ανεκαλύφθησαν εκείνες οι επιστήμες που δεν απέβλεπαν ούτε σε ηδονές ούτε σε ανάγκες της ζωής, αυτό δε έγινε στην αρχή σε τόπους όπου υπήρχε διαθέσιμος καιρός. Για αυτό εις την Αίγυπτο κατά πρώτον συνεστήθησαν οι μαθηματικές τέχνες, καθόσον εκεί αφέθηκε διαθέσιμος χρόνος στο ιερατικό γένος.

Στα σχόλια των μεταφυσικών ο Αλέξανδρος ο Αφροδισέας γράφει: «Οι Αιγύπτιοι ιερείς έχοντας χρόνο να παρατηρούν αυτά που γίνονται στον ουρανό, έχοντας πρώτα εμπειρία, και έτσι συνέστησαν τέχνη, όπως και η γεωμετρία, ευρέθη από την γεωδαισία».

Είναι όμως πράγματι σε τόσο μεγάλο βαθμό ανεπτυγμένα τα Μαθηματικά και η Γεωμετρία των Αιγυπτίων; Ας ρίξουμε μια ματιά σ' ένα εύρημα, έναν αρχαίο πάπυρο που ονομάζεται πάπυρος Rhind.
Ονομάστηκε έτσι λόγω του Α.Η. Rhind, ο οποίος αγόρασε το κείμενο αυτό στο Λούξορ και στην συνέχεια το κληροδότησε στο Βρετανικό Μουσείο. Ο πάπυρος αυτός γράφηκε κατά την περίοδο της κυριαρχίας της Αιγύπτου από τους Υξώς (μετά το 1800 π.Χ) γραμμένος στην ιερατική γραφή αλλά, όπως μας διαβεβαιώνει ο συγγραφέας του, προέρχεται από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται από το Μέγα Βασίλειο (2000 – 1800 π.Χ). Στο Μέγα Βασίλειο ανήκουν επίσης και όλα τα υπόλοιπα μαθηματικού περιεχομένου κείμενα που μας είναι γνωστά.

Ο πάπυρος αρχίζει με έναν πολλά υποσχόμενο τρόπο: διατείνεται ότι θα παράσχει **«πλήρη και λεπτομερή ανάλυση όλων των πραγμάτων, που ενυπάρχουν σε όλα τα όντα, γνώση όλων των μυστικών...».** (Πυθαγόρειοι;;;). Γρήγορα όμως καταλαβαίνουμε ότι σκοπός του συγγραφέα δεν είναι να αποκαλύψει την πρώτη αρχή των πραγμάτων, αλλά απλώς να μυήσει τους αναγνώστες του στα μυστικά των αριθμών και στην τέχνη των υπολογισμών με κλάσματα, θέμα ιδιαίτερα χρήσιμο σε ποικίλα πρακτικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν οι υπάλληλοι του μεγάλου κράτους. Τέτοια είναι το μοίρασμα των μισθών σε έναν αριθμό μεροκαματιάρηδων, ο υπολογισμός της ποσότητας των σιτηρών που χρειάζονται για την παραγωγή μιας δεδομένης ποσότητας ψωμιού ή μπίρας, ο υπολογισμός εμβαδών και όγκων, η μετατροπή διαφόρων μονάδων μέτρησης των σιτηρών. Ωστόσο, ανάμεσα σε αυτά, υπάρχουν και ορισμένα καθαρά θεωρητικά ερωτήματα, από τα οποία κατασκευάζονται ασκήσεις που εντάσσονται στη δύσκολη τέχνη του λογισμού με κλάσματα. Έχει άραγε δίκιο ο Αριστοτέλης, όταν υποστηρίζει ότι οι ιερείς ήταν οι αληθινοί φορείς της μαθηματικής

προόδου και ότι τα θεωρητικά-ενδιαφέροντα είναι αυτά που τους οδήγησαν να αφιερώνουν τον ελεύθερο χρόνο τους στα μαθηματικά, όπως έκαναν στη δική του εποχή οι Έλληνες σοφοί; Ή, μήπως, η γεωμετρία καλλιεργήθηκε αρχικά από τους ανθρώπους που ενδιαφέρονταν για τις εφαρμογές, όπως πιστεύουν ο Ηρόδοτος και ο Δημόκριτος;

Κατά τη διάρκεια του Παλαιού Βασιλείου των Αιγυπτίων (3200-2000 π.Χ.), αλλά και του Μέσου Βασιλείου (2000-1800 π.Χ.), της περιόδου δηλαδή των κειμένων μας, η τάξη των ιερέων δεν είναι ακόμη πλήρως συγκροτημένη. Το έργο των ιερέων το επιτελούσαν συνήθως, παράλληλα με τις συνηθισμένες ασχολίες τους λαϊκοί. Συνεπώς, ο Αριστοτέλης ξεκινά από μια εντελώς εσφαλμένη προϋπόθεση. Τα γεωμετρικά προβλήματα των κειμένων μας είναι εξ ολοκλήρου προσανατολισμένα στις εφαρμογές. Η ενασχόληση με προβλήματα αυτού του είδους ήταν δουλειά των εποπτών ή των υπαλλήλων που έπρεπε να ανεγείρουν τις σιταποθήκες, και όχι των ιερέων. Ο λογισμός με κλάσματα, εξάλλου, που αναπτύσσεται συστηματικά στον πάπυρο Rhind, εφαρμόζεται σε κείμενα οικονομικού περιεχομένου όπως, για παράδειγμα, στον πάπυρο του Καχούν.

<u>Ποιος, όμως, χρειαζόταν τέτοιους υπολογισμούς;</u>

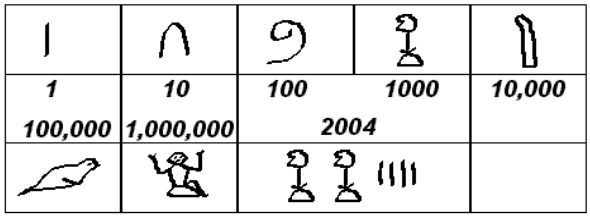
Το ερώτημα αυτό μας παραπέμπει στο να ασχοληθούμε με την τάξη των βασιλικών γραφέων, ενώ μαζί με τις παραπάνω πληροφορίες, εν μέρει καταρρίπτεται η θεωρία πως ΜΟΝΟ οι Ιερείς είχαν μαθηματικές γνώσεις. Μια καλή εικόνα των προβλημάτων με τα οποία ασχολούνταν αυτοί οι υπάλληλοι, αποκτούμε από τον πάπυρο «Αναστάση Ι», όπου ένας γραφέας χλευάζει έναν άλλο γραφέα για την ανικανότητα του. Από το κείμενο φαίνεται ότι μπορούμε να φανταστούμε τον άνθρωπο στον οποίο απευθύνεται, σαν κάποιον ο οποίος κατέχει μια σημαντική θέση, κάτι σαν «στρατιωτικός γραφέας», ο οποίος πρέπει να υπολογίσει, για παράδειγμα, πόσοι στρατιώτες χρειάζονται για να σκάψουν ένα αυλάκι, πόσες πλίνθοι χρειάζονται για μια κατασκευή κλπ. Ο συντάκτης της επιστολής τον κατηγορεί για την ανικανότητα του να επιλύσει αυτά τα προβλήματα χωρίς τη δική του βοήθεια.

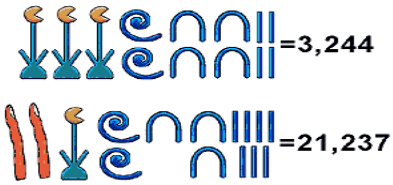
Θα σε κάνω να μάθεις πώς έχουν τα πράγματα, όταν λες «εγώ είμαι ο γραφέας που δίνει εντολές στον στρατό». Σου αναθέτουν να σκάψεις μια δεξαμενή. Έρχεσαι να με ρωτήσεις για τα σιτηρέσια των στρατιωτών, και μου λες «λογάριασε τα». Παραιτείσαι του αξιώματος σου και πέφτει στους ώμους μου το βάρος να σου μάθω πώς να το εκτελέσεις...

Σε κατεξευτελίζω όταν σου αποκαλύπτω τη διαταγή του Κυρίου σου, εσένα, που είσαι ο Βασιλικός Γραφέας...ο σπουδαίος γραφέας που βρίσκεται επικεφαλής των στρατευμάτων. Πρέπει να χτιστεί μια (δομική) ράμπα, με 730 κύβιτα (μονάδα μήκους ίση με τον ανθρώπινο βραχίονα, από τον αγκώνα μέχρι την άκρη του μεσαίου δακτύλου. Το «Βασιλικό» κύβιτο ήταν ίσο περίπου με 52,3 εκατοστά και το «Βραχύ» κύβιτο περίπου 45 εκατοστά) *μήκος, 55 κύβιτα πλάτος, με 120 διαμερίσματα, και γεμάτη καλάμια και δοκάρια" με ύψος 60 κύβιτα στην κορυφή, 30 κύβιτα στη μέση, με κλίση δυο φορές 15 κύβιτα και λιθόστρωτο 5 κύβιτα. Ζητείται από τους στρατηγούς η απαιτούμενη ποσότητα πλίνθων, και ερωτούνται όλοι μαζί οι γραφείς, και δεν ξέρει τίποτα κανένας τους. Όλοι τώρα επαφίενται*

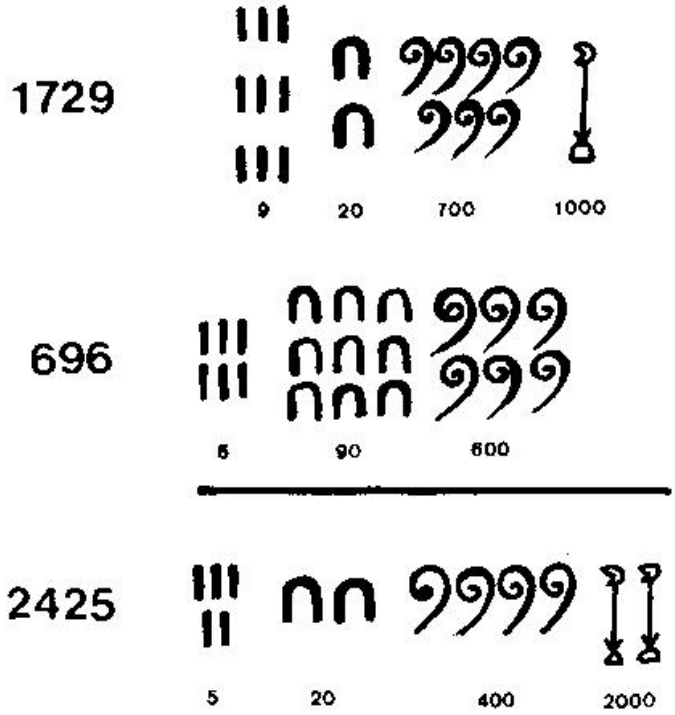
σε σένα και λένε: -Εσύ είσαι ο σπουδαίος γραφέας, φίλε μου! Αποφάσισε γρήγορα για λογαριασμό μας!» Τίμησε τη φήμη σου... Απάντησε μας, πόσες πλίνθοι χρειάζονται γι' αυτό το έργο;

Τα προβλήματα του παπύρου Rhind είναι ακριβώς του ίδιου γενικού χαρακτήρα, συχνά δε γίνονται όλο και πιο δύσκολα. Είναι φανερό, λοιπόν, ότι ο πάπυρος αυτός προοριζόταν για χρήση σε ένα σχολείο γραφέων. Αν εξετάσουμε τον πάπυρο πιο προσεκτικά θα βρούμε την Τέχνη των υπολογισμών, που αποτελεί και το πρώτο θέμα που συναντούμε στον πάπυρο Rhind για το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων, το οποίο είναι τόσο απλό και πρωτόγονο και είναι ένα αυστηρά δεκαδικό σύστημα. Τοποθετώντας τα σύμβολα αυτά σε μια





γραμμή μπορεί να παρασταθεί κάθε αριθμός. Η πρόσθεση τέτοιων αριθμών δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία. Χρειάζεται μόνο να υπολογισθεί ο αριθμός των μονάδων, των δεκάδων, των εκατοντάδων, κλπ



Συμπεράσματα

Τι θα μπορούσαμε να αναφέρουμε συμπερασματικά για το επίπεδο των Μαθηματικών την περίοδο εκείνη;

Μια γενική παρατήρηση είναι ότι τα Μαθηματικά στα χέρια των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων εξυπηρετούσαν καθαρά πρακτικές ανάγκες, αποτελούνταν δε από εμπειρικούς κανόνες τους οποίους ανακάλυψαν

μέσω της εμπειρικής οδού. Πουθενά δεν συναντούμε στα κείμενα των λαών αυτών, που είναι μέχρι τώρα γνωστά, κάτι που να δείχνει ότι οι Αιγύπτιοι ή οι Βαβυλώνιοι προσπάθησαν να αποδείξουν κάποια μαθηματική πρόταση με αυστηρή λογική ξεκινώντας από πρώτες Αρχές (Αξιώματα).

Οι δύο πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας είχαν πολλά κοινά στοιχεία στην κοινωνική διαστρωμάτωση. Στην πραγματικότητα υπήρχαν δύο κοινωνικές τάξεις. Η ανώτερη τάξη που αποτελούνταν από το βασιλιά, τους ιερείς, τους στρατιωτικούς και όσους είχαν εξουσία και η κατώτερη τάξη, δηλαδή οι ελεύθεροι πολίτες και οι δούλοι. Και στους δύο πολιτισμούς η πολιτική οργάνωση είχε ως βάση τη θρησκεία, στην Αίγυπτο ο Φαραώ θεωρούνταν θεός ενώ στη Βαβυλώνα η θρησκευτική εξουσία ήταν ανεξάρτητη από την κρατική εξουσία. Στην Αίγυπτο και στην Βαβυλώνα είχαν αναπτυχθεί τα μαθηματικά ως ένα συγκεκριμένο βαθμό, για παράδειγμα στην Αίγυπτο είχαν ανεπτυγμένο κλασματικό λογισμό και ήξεραν τις Πυθαγόρειες Τριάδες, ενώ στη Μεσοποταμία γνώριζαν πρακτικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα και είχαν αναπτύξει την άλγεβρα σε αρκετά υψηλό βαθμό για την εποχή τους. Μπορούσαν να λύνουν προβλήματα που ανάγονται σε επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού εξίσωση, τριτοβάθμια εξίσωση της μορφής x^2 (μx+1)=ν, καθώς επίσης και συστήματα εξισώσεων με τρεις ή περισσότερους αγνώστους. Ωστόσο αυτές οι γνώσεις δεν αναπτύχθηκαν περαιτέρω επειδή η κρατική εξουσία και η ισχυρή οργανωμένη εκκλησία αντιδρούσαν σ' αυτή την ανάπτυξη καινούριων γνώσεων εξαιτίας του φόβου αλλαγών. Με άλλα λόγια χρησιμοποιούσαν τον περιορισμό της επιστήμης και τον εκφοβισμό της τιμωρίας από θεϊκή δύναμη αν δεν υπάκουαν στις διαταγές των ιερέων και βασιλιάδων για να επιβεβαιώσουν την κυριαρχία, την εξουσία και τα προνόμια τους που είχαν ως ιερείς και βασιλιάδες αντίστοιχα. Όλα αυτά συντέλεσαν στη στασιμότητα του μαθηματικού επιπέδου και είχαν ως αποτέλεσμα οι μαθηματικές γνώσεις αυτών των πολιτισμών να μην περάσουν σε θεωρητικό επίπεδο, όπως των Αρχαίων Ελλήνων, αλλά να παραμείνουν σε πρακτικό επίπεδο. Επομένως, οι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Βαβυλώνας, δεν έδωσαν θεωρητικές γνώσεις στους Έλληνες, με τους οποίους ήρθαν σε επαφή, μα μια τεράστια συλλογή μαθηματικών δεδομένων, τα οποία οι Έλληνες αφομοίωσαν και στη συνέχεια ανέπτυξαν. Παρ' όλα αυτά, διακρίνουμε πως οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι είχαν ένα αρκετά υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, το οποίο και εκμεταλλεύτηκαν οι Έλληνες.

Πως όμως έγινε το συνοθύλευμα αυτών των γνώσεων καθαρή επιστήμη με λογική μαθηματική συγκρότηση (αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις κ.λ.π.). Γιατί η μελέτη της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα, εκτός από την εξυπηρέτηση πρακτικών αναγκών, κατέληξε ως πνευματική αναζήτηση ή θεωρητικό πρόβλημα; Αυτό είναι κατάκτηση του Αρχαίου Ελληνικού πνεύματος και αποτέλεσμα του Ελληνικού ορθολογισμού, που προσπαθεί να βάλει τάξη στον περιβάλλοντα κόσμο, αναζητώντας και ερμηνεύοντας το πώς και το γιατί των φαινομένων.

Ελληνικά Μαθηματικά

Από τους πρώτους πολιτισμούς στη Αρχαϊκή Εποχή

Οι Έλληνες ήδη από την ύστερη Νεολιθική εποχή, κατοικούσαν στον λεγόμενο Ελλαδικό χώρο. Από τους Πρωτο-Ελληνικούς πολιτισμούς ήταν του Βορείου Αιγαίου και των Κυκλάδων, και με τους γνωστούς Μινωικό και Μυκηναϊκό Πολιτισμό. Οι δύο τελευταίοι είχαν αναπτύξει εμπορικές σχέσεις με λαούς της Μ. Ασίας και της Μέσης Ανατολής, καθώς και με τους Αιγύπτιους και τους λαούς της Ιταλικής και της Ιβηρικής Χερσονήσου. Σε ανασκαφές που έγιναν σε Μινωικά και Μυκηναϊκά Κέντρα βρέθηκαν Αιγυπτιακές σφραγίδες και πήλινες πινακίδες εμπορικών καταγραφών, το οποίο μαρτυρεί γνώση μαθηματικών πράξεων και υπολογισμών αλλά και την ύπαρξη της τάξης των Γραφέων. Από αυτούς επικράτησαν οι Μυκηναίοι, οι οποίοι είχαν αναπτύξει και πολεμική παραγωγή και ήταν φιλοπόλεμος λαός σε σχέση με τους Μινωίτες, καθώς μέχρι και σήμερα είναι γνωστή η Τρωική Εκστρατεία. Με τις επιδρομές αγνώστων φυλών στις ανατολικές χώρες της Μεσογείου και της Μ. Ασίας, γνωστοί σε Αιγυπτιακά κείμενα ως Λαοί της θάλασσας, το εμπόριο παρήκμασε και αυτό σηματοδότησε και την καταστροφή του Μυκηναϊκού Πολιτισμού.

Όλα αυτά τα γεγονότα, έδωσαν την ευκαιρία σε Ελληνικά φύλα να επεκταθούν ή να μετακινηθούν σε άλλες περιοχές. Ο Ηροδότος και ο Θουκυδίδης αναφέρουν, αρχικά οι Θεσσαλοί, οι οποίοι εκδιώχτηκαν από τους Θεσπρωτούς έζησαν στην περιοχή της σημερινής Θεσσαλίας. Από εκεί οι Βοιωτοί αντίστοιχα έκαναν αυτή τη μετακίνηση, στη σημερινή Βοιωτία. Έπειτα, από τις Περιοχές της Πίνδου, ξεκινά η κάθοδος των Δωριέων και μετακινήθηκαν στην Πελοπόννησο, ενώ μερικοί από αυτούς μετακινήθηκαν στη Βόρεια Πίνδο, και πήραν το όνομα Μακεδνοί (Μακεδόνες).

Οι ανακατατάξεις των Ελληνικών Φύλων οδήγησαν μεγάλους πληθυσμούς να μετακινηθούν ως πρόσφυγες σε νέες περιοχές και να ιδρύσουν τις λεγόμενες Ελληνικές Αποικίες. Οι Αιολείς από τη Θεσσαλία αποίκησαν στα νησιά Λέσβο και Τένεδο και στα απέναντι παράλια της Μ. Ασίας. Αντίστοιχα οι Ίωνες από την Αττική, την Εύβοια και την Βορειοανατολική Πελοπόννησο, στις Κυκλάδες, τη Χίο, τη Σάμο και τις απέναντι Μικρασιατικές ακτές, και τέλος οι Δωριείς, όταν ανέπτυξαν σχέσεις με τη θάλασσα, από την Αργολίδα και τη Λακωνία αποίκησαν στη Μήλο, τη Θήρα, την Κρήτη, τα Δωδεκάνησα και τις ακτές της Μ. Ασίας. Αυτή ήταν και η αρχή της Αρχαϊκής Εποχής, η οποία θα έφερνε νέα δεδομένα στον Ελλαδικό χώρο, τα οποία μοιραία επηρέασαν τον τότε γνωστό κόσμο.

Η Αρχαϊκή Εποχή σηματοδότησε την αυγή του αρχαίου Ελληνικού Πολιτισμού, καθώς μετά από μια σκοτεινή περίοδο τριακοσίων περίπου χρόνων που επακολούθησε την καταστροφή των Μυκηναϊκών Ανακτόρων, οι τέχνες και τα γράμματα άρχισαν να ανθίζουν και πάλι. Την εποχή αυτή αναπτύσσεται η Λυρική ποίηση και δημιουργούνται τα πρώτα Θέατρα, εμφανίζεται σε αρκετά κείμενα ο πεζός λόγος καθώς και οι πρώτες γραπτές ιστορικές πηγές από τον Ηρόδοτο. Από τον Ηρόδοτο μας είναι γνωστός ο επονομαζόμενος Μεγάλος Ελληνικός Αποικισμός (ή Β΄ Ελληνικός Αποικισμός), οπού Έλληνες από τις Μητροπόλεις της Ελλάδος και τις Αποικίες της Μ. Ασίας

ιδρύουν νέες πόλεις στα παράλια του Εύξεινου Πόντου, στην Σικελία και Κάτω Ιταλία και στα στις ακτές της σημερινής Γαλλίας και Ισπανίας.

Όσων αφορά στις εσωτερικές εξελίξεις των ελληνικών πόλεων, πρώτο σημαντικό φαινόμενο της εποχής είναι η κατάργηση της βασιλείας και η εγκαθίδρυση του αριστοκρατικού πολιτεύματος, που σημαίνει την άσκηση της διακυβέρνησης από τους ευγενείς. Την εποχή αυτή αρχίζουν και αντιπαραθέσεις εντός του σώματος των ευγενών για τη νομή της εξουσίας, αντιπαραθέσεις οι οποίες συμπεριέλαβαν και τον υπόλοιπο πληθυσμό. Επίσης έχουμε μία μεταβολή, έναν νεωτερισμό στον στρατιωτικό τομέα, τη φάλαγγα των οπλιτών. Η παράταξη της φάλαγγας ήταν ένα τρομερό για την εποχή "όπλο" που εφαρμόστηκε από τους Έλληνες κατά την αρχαϊκή, κλασσική και ελληνιστική εποχή, δηλ. από τον 7ο αιώνα π.Χ.. βασίστηκε στους (συνήθως ισότιμους) πολίτες της κάθε πόλης - κράτους. Αυτοί ήταν πεζοί και βαριά θωρακισμένοι και οπλισμένοι. Εννοείται πως τα έξοδα της εξάρτησης δε μπορούσε να τα ανταπεξέλθει ένας πάμπτωχος ακτήμονας, έτσι οι οπλίτες ήταν ελεύθεροι γεωργοί και αστοί με κάποιο σταθερό εισόδημα. Πέρα όμως από την εξάρτηση, η οπλιτική φάλαγγα βασιζόταν στον άριστο συντονισμό των μελών της και την κίνηση σε σχηματισμό. Χάρη σ' αυτά και, παρά το βαρύ οπλισμό, μπορούσε να κρατά τη συνοχή της, να κινείται με κάποια ταχύτητα και να εκτελεί τους απαραίτητους ελιγμούς. Εξυπακούεται πως έπρεπε να υπάρχει εκγύμναση, άριστη φυσική κατάσταση και πειθαρχία στα παραγγέλματα. Χάρη σ' αυτά τα χαρακτηριστικά, η φάλαγγα που είχε την καλύτερη συνοχή και εκπαίδευση μπορούσε να διασπάσει και να τρέψει σε φυγή την αντίπαλη φάλαγγα, με σχετικά μικρές απώλειες και από τα δύο μέρη. Βασικό χαρακτηριστικό της φάλαγγας είναι ότι η ασπίδα του κάθε οπλίτη προστάτευε την αριστερή του μόνο πλευρά, αφού με το δεξί έπρεπε να χειρίζεται το δόρυ ή το σπαθί. Το ακάλυπτο δεξιό έπρεπε να προφυλάσσεται από την ασπίδα του διπλανού οπλίτη. **Επομένως, καθένας δεν πολεμούσε μόνος του αλλά στηριζόταν στους διπλανούς του, οπότε η ομοψυχία και η αλληλοϋποστήριξη ήταν απαραίτητες.** Η ζωή της ελληνικής πόλης είναι συνώνυμη με την εμφάνιση της μάχης με πεζικό, αφού η αρχική πόλη-κράτος δεν ήταν παρά μια δημοκρατία οπλιτών. Βέβαια η κλασική ελληνική μάχη σε μαζικό σχηματισμό δεν είναι καινούργια ιδέα, οι στρατοί των Μυκηνών και της Εγγύς Ανατολής το έκαναν επί αιώνες. Ωστόσο οι Έλληνες της πρώιμης πόλης-κράτους (700 έως 500 π.Χ.) βελτίωσαν τον χαλαρά οργανωμένο όχλο σε τακτικές γραμμές και παρατάξεις, τώρα κάθε πολίτης που διέθετε περιουσία διεκδικούσε ίση θέση στη φάλαγγα, φωνή στην εκκλησία και κομμάτι γης στην ύπαιθρο. Ο πόλεμος εντάχθηκε τώρα πλήρως μέσα στο ιδιαίτερο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο του μαχητή. Η κοινωνία αποτελούνταν από μικρούς ανεξάρτητους κτηματίες – το πρώτο σώμα πολιτών που κατείχε τίτλους κυριότητας ακινήτου στον πολιτισμό – οι οποίοι μπορούσαν τώρα να στοιχιστούν ο ένας δίπλα στον άλλο για να πολεμήσουν για τα δικά τους εδάφη ως απόδειξη της δικής τους πολιτικής αλληλεγγύης.

Κατά τα μέσα προς το τέλος της Αρχαϊκής Περιόδου, επικρατούν τρεις κοινωνικές τάξεις: οι ευγενείς ή αριστοκράτες, οι οποίοι αποτελούσαν την κορυφή της κοινωνικής πυραμίδας και είχαν μεγάλους

πόρους από την εκμετάλλευση της γης και του χερσαίου ή θαλάσσιου εμπορείου. Οι ευγενείς συμμετείχαν στην άσκηση της εξουσίας και την απονομή της δικαιοσύνης, αλλά και στον θρησκευτικό τομέα, ενώ παράλληλα θεωρούσαν πως έχουν θεϊκή ή ηρωική καταγωγή. Η αμέσως επόμενη τάξη ήταν οι πολίτες έμποροι και βιοτέχνες οι οποίοι αποτελούσαν τη μεσαία τάξη. Η μεσαία τάξη δεν νιώθει, ότι απειλείται από την εισροή νέων μελών από την κατώτερη τάξη σε αυτήν (όπως η τάξη των ευγενών, που βλέπουν με καχυποψία κάθε νέα προσωπική κοινωνική άνοδο), αντιθέτως την θεωρεί ευπρόσδεκτη και ισχυροποιείται με την πληθυσμιακή αύξησή της. Στην μεσαία τάξη υπάρχει χώρος για όλους. Έτσι, για κάποιον, που βρίσκεται στη μεσαία τάξη, το προσωπικό του συμφέρον είναι εκ των πραγμάτων ταυτισμένο με το συλλογικό. Δεν θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε, ότι ο Ελληνικός Πολιτισμός είναι δημιούργημα της μεσαίας τάξης των αρχαίων Ελληνικών πολιτειών. Σε αυτόν τον πολιτισμό η ανώτερη τάξη προσέφερε ελάχιστα (αν δεν τον υπονόμευσε κιόλας) ενώ η κατώτερη επωφελήθηκε. Η μεσαία τάξη αποτέλεσε και τη βάση της οπλιτικής φάλαγγας. Την τελευταία τάξη αποτελούσαν μισθωτοί εργάτες, τεχνίτες ή μικροκαλλιεργητές και σαφώς οι δούλοι. Εξαίρεση αποτελούσαν ανεξάρτητοι δούλοι οι οποίοι ασχολούνταν με την καλλιέργεια της γης και με τη βιοτεχνία ή το εμπόριο, υπό την επίβλεψη των ιδιοκτητών τους, χωρίς εκείνοι να είναι υποταγμένοι λόγω χρεών.

Πόλη-Κράτος

Κατά τον 8ο Αιώνα π.Χ. ένας νέος τρόπος πολιτικής οργάνωσης εμφανίζεται, η πόλη-κράτος, η οποία αντικαθιστά τη φυλετική οργάνωση των κρατών. Αυτό το μοντέλο αυτόνομης οργάνωσης και διακυβέρνησης ήταν διαδεδομένο στο μεγαλύτερο μέρος του Ελληνικού χώρου και κράτησε ως την εποχή του Μεγάλου Αλεξάνδρου, αλλά και στους μετέπειτα Ελληνιστικούς Χρόνους. Είναι η ένωση συγγενικών ομάδων και κοινοτήτων με σκοπό την επιτυχία μιας τέλειας και αυτάρκους ζωής, πολιτική κοινωνία δηλαδή προς χάριν των καλών πράξεων των πολιτών και όχι μόνο για την συμβίωση τους, κατά Αριστοτέλη.

Η γένεση της πόλης - κράτους

Ο όρος χρησιμοποιήθηκε από τους ιστορικούς για να δηλώσει α)την έννοια του χώρου και ταυτόχρονα β)την οργανωμένη κοινότητα ανθρώπων γύρω από μια εξουσία. Η οργάνωση προϋποθέτει την κυριαρχία σε συγκεκριμένο χώρο και την συγκρότηση εξουσίας για την αντιμετώπιση κοινών προβλημάτων, πολίτες δηλαδή που συμμετείχαν στην διαχείριση των κοινών και έπαιρναν λήψη αποφάσεων. Η απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη της πόλης -κράτους ήταν :

Ελευθερία-Αυτονομία-Αυτάρκεια

Οι κάτοικοι, οι λεγόμενοι πολίτες, είτε μένουν στο άστυ είτε είναι αγροτικός πληθυσμός. Οι πολίτες αγωνίζονταν για την ανεξαρτησία τους υπερασπίζοντας την ελευθερία της πόλης τους, συνέβαλαν στην διακυβέρνηση με νόμους που οι ίδιοι είχαν θεσπίσει για να επιτύχουν την αυτονομία της και συμμετείχαν στην παραγωγή για να καλύψουν τις ανάγκες τους και να ενισχύσουν την αυτάρκεια της πόλης τους. Αυτές οι τρεις βασικές επιδιώξεις-προϋποθέσεις των πολιτών της συνέβαλαν στην ανάπτυξή τους και στην πολιτισμική τους εξέλιξη αλλά εμπόδισαν την

οργάνωση των Ελλήνων σε ενιαίο κράτος γιατί η αυτονομία-ελευθερία-αυτάρκεια τόνισε το τοπικιστικό πνεύμα της κάθε πόλης-κράτους και τον έντονο πατριωτισμό της. Ο τρόπος άσκησης της εξουσίας και η συμμετοχή ή μη των πολιτών σ' αυτήν καθορίζει το πολίτευμα.

Η δημιουργία της πόλης – κράτος προέκυψε από το τέλος μιας μακράς διαδικασίας κοινωνικών αλλαγών και εξέλιξης που άρχισε από το τέλος της μυκηναϊκής εποχής και συνεχίστηκε στη διάρκεια των σκοτεινών χρόνων. Οι παράγοντες που συνέβαλαν στην εμφάνισή της είναι:

1) Σταθερή εγκατάσταση
2) Δημογραφική αύξηση και η κοινωνική πίεση που προκαλεί αυτή
3) Η ανάπτυξη του εμπορίου και της ναυσιπλοΐας και η ανάδειξη νέων κοινωνικών ομάδων
4) Ο αποικισμός, με την ίση διανομή γης μεταξύ των αποίκων και την εμφάνιση των πρώτων κανόνων δικαίου
5) Επικράτηση της οπλιτικής φάλαγγας ως κύριου στρατιωτικού σώματος, στην οποία οι πολίτες συμμετέχουν από κοινού και εξίσου
6) Χρήση της γραφής και η κριτική αμφισβήτηση που αυτή επιτρέπει

Τα Πολιτεύματα

Η **Βασιλεία** είναι ο θεσμός διακυβέρνησης, όπου ο αρχηγός του κράτους είναι ο βασιλιάς. Αυτό που την χαρακτηρίζει είναι ότι ο αρχηγός του κράτους κρατά την θέση του ισόβια. Η Βασιλεία στην πόλη κράτος έχει αντικατασταθεί από την Ολιγαρχία και τη Δημοκρατία.

Αριστοκρατία εννοείται εκείνο το πολίτευμα που στηρίζεται στη διακυβέρνηση των αρίστων, δηλαδή τις τάξεις των ευγενών. Αποτέλεσμα ήταν να παρατηρείται σύγχυση της καθαρής έννοιας της αριστοκρατίας με εκείνη της ολιγαρχίας. Οι άριστοι στην καθομιλούμενη των νεότερων χρόνων ταυτίστηκαν σταδιακά με τις ανώτερες τάξεις, ειδικότερα δε με τους μεγάλους γαιοκτήμονες.

Ολιγαρχία λέγεται το πολίτευμα στο οποίο η πολιτική εξουσία ασκείται από ένα μικρό τμήμα της κοινωνίας. Ορισμένοι πολιτικοί επιστήμονες και φιλόσοφοι θεωρούν ότι όλα τα πολιτεύματα είναι στην πράξη ολιγαρχίες και ότι οι δημοκρατίες μπορούν να θεωρηθούν εκλεγμένες ολιγαρχίες. Οι ολιγαρχίες συνήθως ελέγχονται από μερικές ισχυρές οικογένειες που διατηρούν την εξουσία από γενιά σε γενιά. Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιούσε τον όρο για να αναφέρεται στην κυριαρχία των πλουσίων, αλλά δεν είναι πάντα η κυριαρχία των πλουσίων, αλλά απλώς η κυριαρχία μιας προνομιούχας ομάδας. Το πολίτευμα της **Τυραννίας** ήταν κι αυτό ολιγαρχικό και ο κυβερνήτης του ονομαζόταν **Τύραννος**. Το πολίτευμα αυτό ίσχυε στις περισσότερες Πόλεις-κράτη από τον 8ο αιώνα. Σήμερα, τύραννος αποκαλείται αυτός που βασανίζει κάποιον άλλον, επειδή ο τρόπος διακυβέρνησής τους ήταν να κυβερνούν με ωφέλεια για τον εαυτό τους. Παρ' όλα αυτά υπήρξαν και καλοί τύραννοι, όπως ο Περίανδρος από την Κόρινθο ή ο Πεισίστρατος από την Αθήνα. Επειδή όμως οι τύραννοι δεν κατάφεραν να λύσουν τα προβλήματα των πολιτών, ακολούθησε η Δημοκρατία αρχικά απ' την Αθήνα.

Η **Δημοκρατία** είναι το πολίτευμα όπου η εξουσία πηγάζει από τον λαό, ασκείται από τον λαό και υπηρετεί τα συμφέροντα του λαού.

Κεντρικό χαρακτηριστικό της δημοκρατίας είναι η λήψη αποφάσεων με ψηφοφορία: των πολιτών, στην άμεση δημοκρατία, ή κάποιων αντιπροσώπων τους, στην αντιπροσωπευτική δημοκρατία.

Η άμεση δημοκρατία, γνωστή και υπό τον όρο *καθαρή δημοκρατία*, αποτελεί έναν τύπο δημοκρατίας και θεωρίας πολιτικών δικαιωμάτων όπου η εξουσία εδράζεται στη συνέλευση όλων των πολιτών που συμμετέχουν σε αυτήν. Η άμεση δημοκρατία έλκει την καταγωγή της από την αθηναϊκή δημοκρατία της κλασικής εποχής, όπου η εκκλησία του δήμου (η συνέλευση όλων των πολιτών της αθηναϊκής πόλης-κράτους) λάμβανε τις πολιτικές αποφάσεις και για την εκτέλεσή τους όριζε κάποιους αξιωματούχους άμεσα ανακλητούς και ελέγξιμους, με περιορισμένη διάρκεια θητείας, προκειμένου να μην «επαγγελματοποιηθούν» ως πολιτικοί ηγέτες.

Οι περιοχές όπου έλαβαν χώρο τα περισσότερα από αυτά τα γεγονότα ήταν οι ίδιες οι περιοχές των αποικιών και συγκεκριμένα τα παράλια της Μ. Ασίας, που είναι γνωστή και σήμερα ως Ιωνία και η Κάτω Ιταλία, γνωστή ως Μεγάλη Ελλάδα.

Η αυγή του Δυτικού Πολιτισμού

Ίωνες φιλόσοφοι και κοσμολογική επιστήμη

Η Ιωνία είχε πολλά γεωγραφικά πλεονεκτήματα. Λόγω των πολλών νησιών της, (Κυκλάδες, Δωδεκάνησα, Χίος, Σάμος, Λέσβος) χαρακτηριζόταν από μια ποικιλία πολιτικών συστημάτων. Δεν υπήρχε δύναμη που θα μπορούσε να επιβάλει κοινωνική και πνευματική ομοιομορφία σε όλα τα νησιά. Συνεπώς, έγινε δυνατή η ελεύθερη έρευνα και αναζήτηση και, έτσι, η προώθηση της δεισιδαιμονίας δεν μπορούσε να θεωρηθεί πολιτική ανάγκη.

Σε αντίθεση με άλλους λαούς, οι Ίωνες βρίσκονταν στο σταυροδρόμι πολιτισμών και όχι στο κέντρο ενός πολιτισμού. Ήταν ακριβώς η Ανατολική Μεσόγειος, όπου οι μεγάλοι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας, αλλά και της Αφρικής, Ασίας συναντήθηκαν και αλληλοεπηρεάσθηκαν μέσα σε ένα πνεύμα έντονης και κατά μέτωπο αντιπαράθεσης προκαταλήψεων, γλωσσών, ιδεών και θεών. Έτσι, λοιπόν, εμφανίσθηκε η μεγάλη ιδέα, η συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι είναι δυνατή η γνώση του κόσμου χωρίς την εκ των προτέρων παραδοχή της ύπαρξης των πολλών θεών και του ότι πρέπει να υπάρχουν αρχές, δυνάμεις, φυσικοί νόμοι που μπορούν να κατανοηθούν, χωρίς να είναι απαραίτητο π.χ. η πτώση ενός πουλιού να αποδοθεί στην απευθείας παρέμβαση του Δία. Η Ιωνία, λοιπόν, όπως πολλές φορές έχει ακουσθεί, ήταν ο τόπος όπου γεννήθηκε η επιστήμη και όπου, μεταξύ 600 π.Χ. και 450 μ.Χ., συνέβη η μεγάλη επανάσταση στην ανθρώπινη σκέψη. Ο Ιωνικός Διαφωτισμός άρχισε κατά τον 6ο Αιώνα π.Χ. Οι Ίωνες σχηματίστηκαν ξαφνικά στη λωρίδα της Δυτικής Ακτής της Μ. Ασίας,

καθώς και στα γύρω νησιά, σε μια περιοχή που ονομάστηκε Ιωνία. Υπήρξαν πολλοί ευνοϊκοί παράγοντες για την ανάπτυξη ορθής και λογικής σκέψης όπως οι ιδιαίτερες γεωγραφικές και ιστορικές συνθήκες του τόπου. Η περιοχή δεν άνηκε σε κάποια μεγάλη αυτοκρατορία, αλλά αποτελούταν από μικρές αυτόνομες πόλεις ή κοινότητες στις οποίες άνθησε η ελεύθερη σκέψη. Οι Ίωνες απέρριψαν τη δεισιδαιμονία και έτσι έκαναν θαύματα. Το γνωστό Ηραίο στη Σάμο είναι η πιο τρανή απόδειξη. Το γεγονός ότι οι κοινότητες αυτές δεν ήταν υπό τον ζυγό μιας οργανωμένης Εκκλησίας ήταν επίσης ευνοϊκό για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης. Έτσι αντίθετα με χώρες όπως η Αίγυπτος, στις οποίες απορρίπτονταν οι κάθε νέες απόψεις από την ισχυρή τάξη των Ιερέων, φοβούμενοι για τα προνόμιά τους, εδώ κάθε τι νέο είναι ανεξάρτητο και αποδεκτό από όλους.

Γενικά, μπορεί να υποστηριχθεί ότι το κλειδί για την επανάσταση ήταν το χέρι, η χειρωνακτική εργασία, το πείραμα, η παρατήρηση. Μερικοί από τους λαμπρούς Ίωνες στοχαστές ήταν παιδιά ναυτικών, αγροτών, συνηθισμένα στη χειρωνακτική εργασία, σε αντίθεση με τους ιερείς και γραφείς των άλλων εθνών, οι οποίοι είχαν μεγαλώσει μέσα στην πολυτέλεια και ήταν απρόθυμοι να λερώσουν τα χέρια τους. Οι Ίωνες ως έμποροι και ναυτικοί, αποτέλεσαν την ένωση μεταξύ Ανατολής και Δύσης. Με το εμπόριό τους έρχονταν σε επαφή με τη Φοινίκη, την Αίγυπτο, την Ελλάδα αλλά και τις περιοχές της νότιας Ιταλίας και σημερινής Γαλλίας. Καθώς το εμπόριο ήταν ανέκαθεν ο κύριος φορέας ανταλλαγής ιδεών και αντιλήψεων ήταν λογικό οι πρώτες αλλαγές που υπήρξαν να αφορούσαν κυρίως πρακτικά θέματα, όπως βελτιώσεις στις μεταφορές και στα μέσα τους στη ναυσιπλοΐα και άλλα παρόμοια θέματα. Μέσα από την ενασχόληση με πρακτικά θέματα, ξεπροβάλλουν και άνθρωποι με οξύ πνεύμα και θεωρητική έφεση. Αυτοί θα ασχοληθούν με γενικότερα και πιο αφηρημένα ερωτήματα σε σχέση με τη δομή του Κόσμου, με αποτέλεσμα ο τρόπος σκέψης τους να επηρεάζεται από την εξάσκηση και εμπειρία τους με πρακτικά προβλήματα.

Από την εποχή της εμφάνισης των Ελλήνων φιλοσόφων πριν από 2,5 χιλιετίες στην αρχαία Ιωνία, δηλαδή, στην ευρύτερη περιοχή μας, η έρευνα του ουρανού αλλάζει μορφή, λαμβάνει σαφώς επιστημονικό χαρακτήρα και η μυθολογική ερμηνεία των ουράνιων φαινομένων αντικαθίσταται από την επιστημονική επανάσταση. Ακριβώς στην Ιωνία, τον 6ο π.Χ. αιώνα, αναπτύχθηκε η νέα αντίληψη, σύμφωνα με την οποία το Σύμπαν είναι κατανοητό, διότι έχει εσωτερική τάξη, διότι στην Φύση υπάρχουν κανονικότητες που επιτρέπουν την αποκάλυψη των μυστικών της και της λειτουργίας της. Αυτή την πρώτη μεγάλη ιδέα ακολούθησε μία δεύτερη σχεδόν ίσης σπουδαιότητας: παρά τις άπειρες μορφές της, η ύλη από την οποία αποτελείται ο Κόσμος διακρίνεται από τόσα κοινά στοιχεία ώστε η πρωταρχική ουσία να είναι μία και η αυτή. Είναι η πρώτη προσπάθεια κατανόησης του Κόσμου, δηλαδή υλοποίηση της πεποίθησης ότι ο Κόσμος είναι κατανοήσιμος

Δεν είναι δυνατό να απαριθμήσει κανείς όλους τους Έλληνες φιλοσόφους και την συνεισφορά τους. Αξίζει, όμως, να υπογραμμισθεί ότι οι μεγάλοι επιστήμονες, από το Θαλή μέχρι το Δημόκριτο

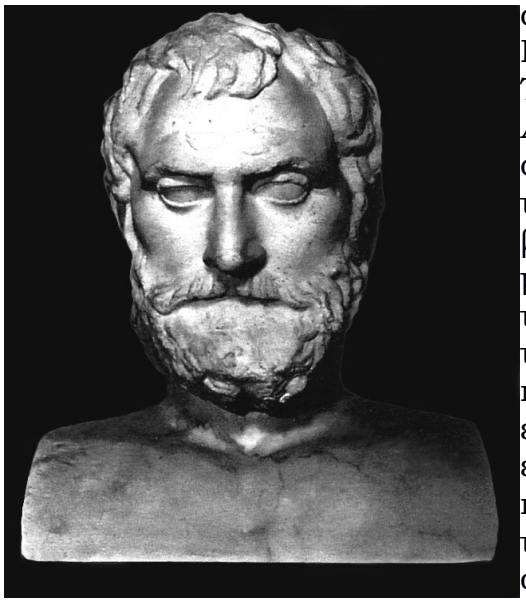
(Αναξίμανδρος, Πυθαγόρας, Αναξαγόρας, Εμπεδοκλής, Ιπποκράτης, όλοι στην περίοδο 650-350 π.Χ.), σε ιστορικά και φιλοσοφικά βιβλία περιγράφονται ως "Προσωκρατικοί", ως εάν η κύρια συνεισφορά τους να ήταν η διατήρηση του φιλοσοφικού φρουρίου μέχρι την εμφάνιση του Σωκράτη, του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη και η μικρή, ίσως, επίδρασή τους στους τελευταίους. Αυτό δεν είναι ακριβές, διότι οι αρχαίοι Ίωνες φιλόσοφοι εκπροσωπούν μια διαφορετική και εν πολλοίς αντιφατική παράδοση που, όμως, συμφωνεί περισσότερο με τη σύγχρονη επιστήμη, Αποτελεί, στ' αλήθεια, ανεπανόρθωτη απώλεια για όσους έζησαν μεταξύ της Ιωνικής Επιστημονικής Επανάστασης και της Ιταλικής Αναγέννησης, το ότι η επίδραση των αρχαίων Ιώνων φιλοσόφων ήταν δυναμικά αισθητή για τρεις, το πολύ, αιώνες.

Ιωνική Σχολή

Όπως αναφερθήκαμε και παραπάνω, από τους σπουδαιότερους Ίωνες φιλοσόφους ήταν ο Θαλής, ο Αναξίμανδρος και ο μαθητής του Αναξιμένης, που προσέφεραν μια νέα διάσταση στην αντίληψη της φύσης και τη γνώση των μαθηματικών την τότε εποχή. Αναλυτικά :

Θαλής ο Μιλήσιος

Ο **Θαλής ο Μιλήσιος**, γεννήθηκε περίπου 630/635 π.Χ. - 543 π.Χ., ήταν προσωκρατικός φιλόσοφος που δραστηριοποιήθηκε στις αρχές του 6ου αιώνα π.Χ. στη Μίλητο, πατρίδα και γενέτειρά του. Του αποδίδεται το έργο *Ναυτική Αστρολογία*, αλλά θεωρείται μάλλον αμφίβολο αν το έγραψε ο ίδιος. Για την ανασύσταση της σκέψης του βασιζόμαστε αποκλειστικά σε μαρτυρίες. Η παράδοση κατατάσσει τον Θαλή μεταξύ των επτά σοφών και τον περιγράφει ως άνθρωπο με πλατιές γνώσεις και μεγάλη επινοητικότητα. Το σημαντικότερο είναι, ωστόσο, ότι μέσω του προβληματισμού του για την αρχή του κόσμου ανήγαγε τα πολλαπλά φαινόμενα του κόσμου σε μία απρόσωπη, μοναδική ή ενιαία αρχή, γεγονός που τον κατατάσσει δίκαια στη χορεία των φιλοσόφων. Ο Θαλής είναι γνωστός και για την επιτυχημένη πρόβλεψη της ηλιακής έκλειψης του 585. Ο Θαλής ο Μιλήσιος ανακάλυψε τις τροπές (ηλιοστάσια), το ετερόφωτο της Σελήνης, καθώς και τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό, από τις ελκτικές ιδιότητες του ορυκτού μαγνητίτη και του ήλεκτρου (κεχριμπάρι). Στην κοσμολογία του φιλόσοφου σημαντικό ρόλο παίζει το νερό (ύδωρ). Του αποδίδονται δύο κοσμολογικές απόψεις:



- Η Γη έχει τη μορφή ενός κυκλικού δίσκου που στηρίζεται στο νερό
- Το νερό είναι η αρχή των πάντων

Κατά τον Αριστοτέλη (Μετά *τα Φυσικά,* Ι, 983 β 20), ο Θαλής ο Μιλήσιος ήταν ο ιδρυτής της φιλοσοφίας των «φυσικών» ή «φυσιολόγων» που ασχολούνταν με την αναζήτηση φυσικών αιτίων και

αποστρέφονταν συνεπώς τις θεωρητικές αυθαιρεσίες των «θεολόγων», οι οποίοι κατέφευγαν σε μύθους και υπερφυσικές ερμηνείες. Οι κυριότερες πηγές πληροφόρησης που διαθέτουμε σχετικά με τον Θαλή είναι ο Ηρόδοτος και ο Διογένης Λαέρτιος. Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, που έζησε ενάμιση αιώνα αργότερα, ο Θαλής είχε φοινικικό αίμα, ήταν δηλαδή Σημίτης, κατ' άλλους όμως συγγραφείς ήταν Μιλήσιος και μάλιστα αριστοκρατικής καταγωγής. Όπως και να έχει όμως το πράγμα, το όνομα του πατέρα του, Εξάμυος, είναι καρικό, ενώ της μητέρας του, της Κλεοβουλίνης, ελληνικό. Ήταν σύγχρονος των Λυδών βασιλέων Αλυάττη και Κροίσου, του βασιλιά των Περσών Κύρου και του Σόλωνα του Αθηναίου. Από τα χρόνια του ακόμη, έφερε τον τίτλο του μεγάλου σοφού, του επιστήμονα δηλαδή και του σοφού μαζί. Υπάρχουν δύο πασίγνωστα ανέκδοτα που τον παρουσιάζουν άλλοτε ονειροπόλο κι άλλοτε σαν άνθρωπο προικισμένο με οξύτατο πρακτικό πνεύμα. Το πρώτο βρίσκεται στον Θεαίτητο του Πλάτωνα (174α): Κάποτε ο Θαλής παρατηρούσε τον ουρανό και, απορροφημένος καθώς ήταν από τη ρέμβη των άστρων, δεν πρόσεξε ένα πηγάδι που βρισκόταν μπροστά του, μ' αποτέλεσμα να πέσει μέσα· έτσι αναγκάστηκε να υπομείνει τους χλευασμούς μιας Θρακός δούλης, που θεωρούσε γελοίο τον ζήλο του Θαλή να γνωρίσει τι υπήρχε πάνω από το κεφάλι του, τη στιγμή που δεν ήταν ικανός να δει τι γινόταν μπροστά στα πόδια του.

Ο Αριστοτέλης όμως μας παρουσιάζει έναν Θαλή συνετό: «Ενώ τον κορόιδευαν για τη φτώχεια του και του επισήμαιναν πως σε τίποτα δεν τον ωφελεί η σοφία του, αυτός λέγεται ότι επιδόθηκε στην εξής επιχείρηση: προβλέποντας, χάρη στις αστρονομικές του γνώσεις, πως η σοδειά της ελιάς θα 'ταν καλή κι ενώ ήταν ακόμα χειμώνας, προμηθεύτηκε κάποια χρήματα κι έκλεισε, δίνοντας αρραβώνα (εγγύηση Όταν πια έφτασε η εποχή της συγκομιδής όλοι έτρεχαν βιαστικά να βρουν ελαιοτριβεία. Τότε ο Θαλής τους τα υπενοικίαζε όσο ήθελε, κερδίζοντας έτσι πολλά χρήματα αλλά και αποδεικνύοντας ότι είναι εύκολο για τους σοφούς να πλουτίσουν αν το θέλουν, οι φιλοσοφικές τους όμως ενασχολήσεις δεν αποσκοπούν στην απόκτηση υλικού πλούτου» (Πολιτικά, Ι, 11, 1259 α 10).

Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο (Ι, 170), έπεισε τις ιωνικές πόλεις να συνασπισθούν, προκειμένου να αντιμετωπίσουν την περσική απειλή, και να κάνουν πρωτεύουσα τους την Τέω· ο Διογένης Λαέρτιος (1,25), μάλιστα, ισχυρίζεται πως ο Θαλής απέτρεψε τους Μιλήσιους από το να συμμαχήσουν με τον Κροίσο, το βασιλιά της Λυδίας, όπως αυτός τους το είχε προτείνει, σώζοντας έτσι την πόλη, αφού ο Κύρος, ο βασιλιάς των Περσών, νίκησε τελικά τον Κροίσο.

1. <u>Αστρονομία</u>. Από τον Ηρόδοτο γνωρίζουμε πως ο Θαλής είχε προβλέψει την έκλειψη ηλίου που έθεσε τέρμα στον πόλεμο Λυδών και Μήδων. Η έκλειψη αυτή εντοπίζεται, συνήθως, στις 28 Μαΐου 585 π.Χ. Παρατήρησε ακόμα πως η Μεγάλη Άρκτος, την οποία ακολουθούσαν συνήθως οι Φοίνικες, αποτελούσε για τους ναυτικούς καλύτερο μέσο προσανατολισμού, ώστε να βρίσκουν τον πόλο, παρά η Μικρή Άρκτος, με την οποία εντόπιζαν το στίγμα τους οι Έλληνες θαλασσοπόροι. Του αποδίδεται μάλιστα και μια *Ναυτική* Αστρολογία,

αν και πιθανότερο είναι να μην έγραψε τίποτα. Μια άλλη παράδοση πάλι τον φέρει να έχει διαιρέσει πρώτος αυτός το έτος σε 365 ημέρες, κατανέμοντας τες σε 30 ανά μήνα.

2. Μαθηματικά. Οι μαθηματικές του γνώσεις θα πρέπει να προέρχονταν από τους ιερείς της Αιγύπτου και μάλιστα ο ίδιος θα πρέπει να ήταν ο εισηγητής της γεωμετρίας στην Ελλάδα. Ο Θαλής θεωρείται ο πρώτος Μαθηματικός με την σύγχρονη έννοια του όρου, γιατί είναι ο πρώτος που θεώρησε ότι έπρεπε να δίνουμε απόδειξη στις μαθηματικές προτάσεις. Εισήγαγε την Απόδειξη στην γεωμετρία. Ο Πρόκλος του αποδίδει τις εξής ανακαλύψεις:

i) Ο κύκλος τέμνεται από τη διάμετρο του σε δύο ίσα μέρη.

ii) Οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

iii) Οι κατά κορυφή γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται είναι ίσες μεταξύ τους.

iv) Η εγγεγραμμένη στο ημικύκλιο γωνία είναι πάντα ορθή (λέγεται μάλιστα ότι η ανακάλυψη αυτή ενθουσίασε τόσο πολύ τον Θαλή, που θυσίασε ένα βόδι).

v) Ένα τρίγωνο είναι δυνατόν να ορισθεί αν είναι γνωστή η βάση του και οι γωνίες της (το θεώρημα αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της απόστασης των πλοίων μέσα στη θάλασσα).

vi) Στις προτάσεις αυτές παραδοσιακά προστίθεται και το λεγόμενο «θεώρημα του Θαλή»

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ: Όταν οι παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης. Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του, σε ίσους λόγους. Όμως ισχύει και το αντίστροφο αν σε ένα τρίγωνο χωρίζει σε ίσους λόγους τις δυο πλευρές, τότε είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά

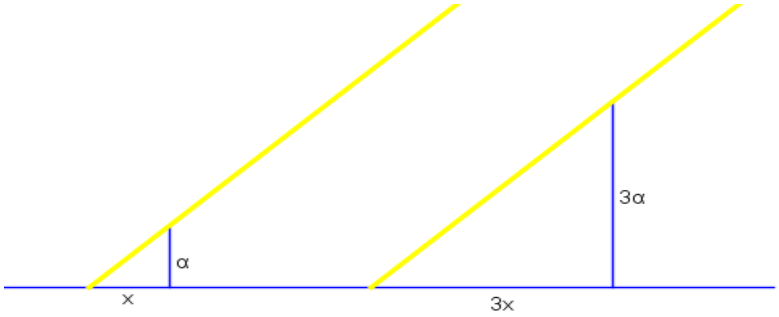
Λέγεται ακόμα πως ο Θαλής κατάφερε να μετρήσει το ύψος των πυραμίδων από το μήκος της σκιάς τους, βάσει της σχέσης ενός, κάθετου στο έδαφος, ραβδιού με τη σκιά του και τέλος πως εξέτρεψε τον ρου του ποταμού Άλυ, καθιστώντας έτσι δυνατή τη διάβαση του από τα στρατεύματα του Κροίσου.

Μέτρηση Ύψους της Πυραμίδας.

Οι ενασχολήσεις του Θαλή με το όργανο που οι αρχαίοι ονομάζουν γνώμονα τον οδήγησαν στην ανακάλυψη κάποιων θεωρημάτων. Το θεώρημα που μας ενδιαφέρει ονομάζεται «το θεώρημα των τριγώνων των γνωμόνων». Πριν αναφερθούμε στο θεώρημα ας δούμε τι είναι γνώμονας. Το όργανο αυτό δεν ήταν παρά ένας κατακόρυφος στύλος στερεωμένος σ' ένα απόλυτα οριζόντιο επίπεδο. Ο αρχικός του ρόλος ήταν ο προσδιορισμός της μικρότερης ημερήσιας σκιάς (στιγμή μεσημεριού) και αργότερα ο προσδιορισμός της ημέρας του έτους με τη μικρότερη σκιά καθώς και με τη μεγαλύτερη. Εξαιτίας της σκιάς ο γνώμονας αυτός ονομάστηκε σκιοθηρικός ή σκιοθήρης (αυτός που θηρεύει τη σκιά).

Το προαναφερθέν θεώρημα έχει την διατύπωση «**τα τρίγωνα των γνωμόνων έχουν τις πλευρές "ισάκις" πολλαπλάσιες**».

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα γνώμονα πλευράς **α** και ένα πλευράς **3α**, τότε αν **x** είναι η σκιά του πρώτου, **3x** θα είναι η σκιά που ρίχνει ο δεύτερος γνώμονας την ίδια στιγμή της ημέρας γιατί οι ακτίνες του ηλίου είναι παράλληλες.



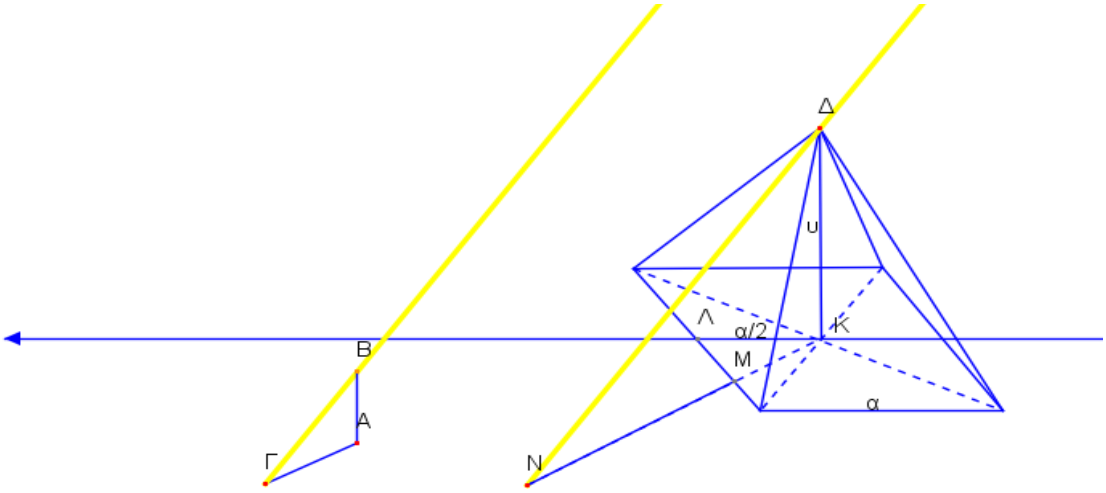
Αυτό το θεώρημα ο Θαλής το χρησιμοποίησε για να μετρήσει το ύψος των πυραμίδων όταν πραγματοποίησε επίσκεψη στην Αίγυπτο, κατόπιν πρόσκλησης του φαραώ Αμάσι (Ααχμές Β') γύρω στο 565 π.Χ. Η πυραμίδα στην οποία έγινε η μέτρηση, πρέπει να ήταν πιθανόν η μεγάλη του Χέοπος.

Σύμφωνα με τη μαρτυρία του Διογένη του Λαέρτιου την οποία αντλεί από το 2ο βιβλίο των *Σποράδην Υπομνημάτων* του ιστορικού Ιερώνυμου του Ρόδιου, ο Θαλής μέτρησε από τη σκιά τους το ύψος των πυραμίδων υλοποιώντας αυτήν στο έδαφος την στιγμή που η σκιά του γνώμονα ήταν ίση με αυτόν.

Την ίδια πληροφορία παραθέτει και ο Πλίνιος. Μια διαφορετική εκδοχή παραθέτει ο Πλούταρχος. Σύμφωνα με αυτόν ο Θαλής έστησε το ραβδί του στο άκρο της σκιάς, την οποία έριχνε η πυραμίδα. Απέδειξε ότι ο λόγος της σκιάς του ραβδιού προς την πυραμίδα ήταν ίσος με το λόγο του ύψους του ραβδιού προς αυτό της πυραμίδας.

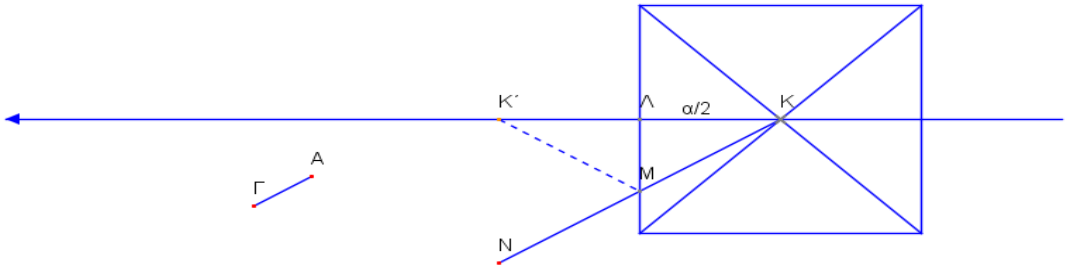
Στην πρώτη εκδοχή έχουμε με σύγχρονη διατύπωση ομοιότητα ισοσκελών ορθογωνίων τριγώνων.

Εκδοχή 1



Όπως βλέπουμε η σκιά ΚΝ δεν μπορεί να μετρηθεί, γιατί το τμήμα της ΚΜ είναι μέσα στην πυραμίδα άρα είναι άγνωστο. Όμως μπορούμε να πάρουμε ένα τμήμα Κ΄Λ=ΚΛ (η μισή πλευρά, βλ. κάτοψη).Τότε η σκιά γίνεται μετρήσιμη.

Κάτοψη



Η δεύτερη εκδοχή πρέπει να είναι πιθανότερη για δύο λόγους:

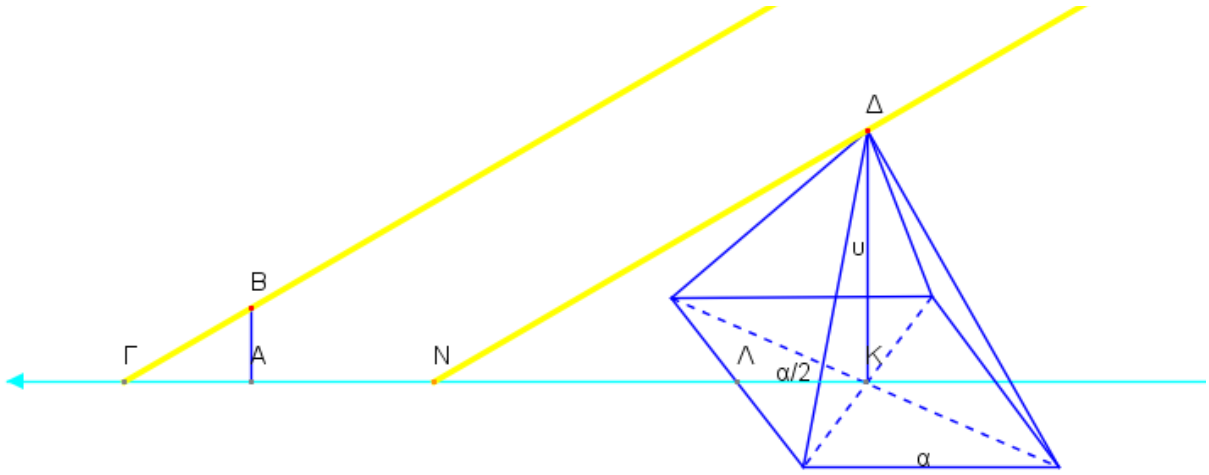
α) σκιές 45° και άνω η πυραμίδα ρίχνει κατά το χειμερινό διάστημα (μέσα Νοεμβρίου-αρχές Ιανουαρίου) αλλά η επίσκεψη μάλλον πραγματοποιήθηκε καλοκαίρι.

β) γιατί η μέτρηση αυτή θα πρέπει να γινόταν σε τυχαία ώρα της μέρας και με τυχαία κατεύθυνση της σκιάς που δεν θα μπορούσε τότε να μετρηθεί.

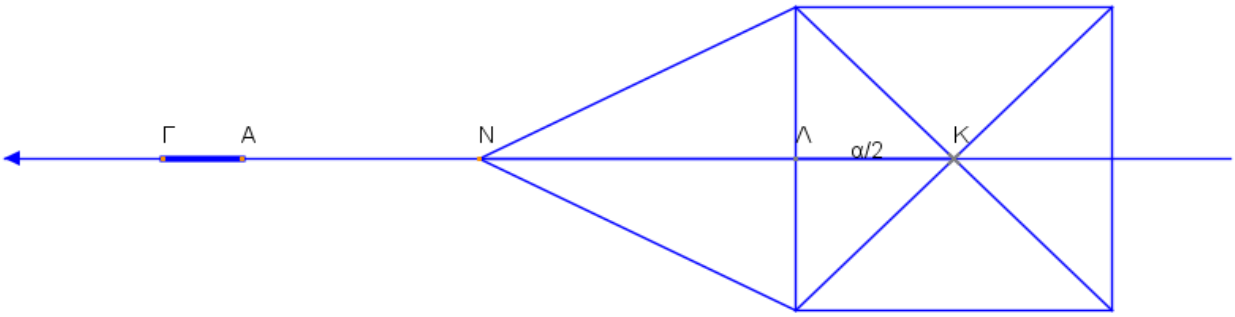
Βέβαια, όπως βλέπουμε και στο σχήμα που αναφέρεται η 1η εκδοχή, υπάρχει περίπτωση ο Θαλής με μαθηματικό τρόπο να κάνει την

μέτρηση της σκιάς, αλλά εφόσον αυτή είναι πολυπλοκότερη και δεν ταιριάζει με την ευφυή απλότητα των μεθόδων του Θαλή, είναι λιγότερο πιθανή να έγινε.

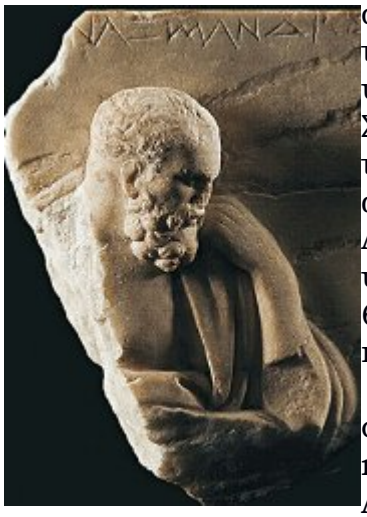
Εκδοχή 2 (Πιθανότερη)



Κάτοψη



Αναξίμανδρος



Ο **Αναξίμανδρος**, ήταν ο δεύτερος από τους φυσικούς φιλόσοφους ή φυσιολόγους της Ιωνίας, πολίτης της Μιλήτου, όπως ο Θαλής, του οποίου άλλωστε υπήρξε μαθητής, σύντροφος και διάδοχος στη Σχολή του (Ιωνική Σχολή). Λίγα είναι γνωστά για τη ζωή και το έργο του. Ο Αιλιανός τον αναφέρει ως αρχηγό της αποικίας της Μιλήτου στην Αμφίπολη. Οι υπολογισμοί του Απολλόδωρου υποδεικνύουν ως ημερομηνία γέννησής του το 610 π.Χ. και το θάνατό του λίγο μετά το 547 π.Χ.

Οι πηγές τον αναφέρουν ενίοτε ως επιτυχημένο σπουδαστή της Αστρονομίας και της Γεωγραφίας και πρώιμο υπέρμαχο της ακριβούς επιστήμης. Λέγεται, επίσης, ότι εισήγαγε τη χρήση του γνώμονα στην αρχαία Ελλάδα και ότι κατασκεύασε χάρτη του γνωστού τότε κόσμου.

Ο Αναξίμανδρος, σύμφωνα με τον Ψευδο-Πλούταρχο (*Στρωματείς* 2), εξήγησε την δημιουργία του κόσμου εκκινώντας από το άπειρο. Από το άπειρο ξεχώρισε μια φλόγα και ο νεφελώδης αέρας. Στον πυρήνα του νεφελώματος συμπυκνώθηκε η Γη, ενώ η φλόγα έζωνε τον αέρα. Κατόπιν η πύρινη σφαίρα εξερράγη και διαλύθηκε σε κύκλους τυλιγμένους από νεφελώδη αέρα. Οι κύκλοι απλώθηκαν και σχημάτισαν τα ουράνια σώματα. Σύμφωνα με τον Αέτιο, ο Αναξίμανδρος θεωρεί πως τα άστρα είναι συμπυκνώσεις αερίων και πυρός, που δημιουργήθηκαν από περιδινήσεις.

Στην Αστρονομία, όπως αναφέρει ο Διογένης ο Λαέρτιος, ο Αναξίμανδρος κατασκεύασε ηλιακά ρολόγια, και όπως αναφέρει ο Πλίνιος, υπολόγισε τη λόξωση της εκλειπτικής.

Ο Αναξίμανδρος αποδίδει μια εικόνα της Γης, σύμφωνα με την οποία η γη είναι κυλινδρική με πλάτος τριπλάσιο από το μήκος και οι άνθρωποι κατοικούν στην επάνω επιφάνειά της. Δε στηρίζεται πουθενά και βρίσκεται στο κέντρο του σύμπαντος, απέχοντας ίσα από όλα τα σημεία του, (Ψευδο-Πλούταρχος, *Στρωματείς* 2).

Τελευταίο στάδιο της κοσμογονίας του φιλόσοφου, όπως παραδίδεται από τον Αριστοτέλη (*Μετεωρολογικά* 67) είναι η αποξήρανση τμημάτων της Γης υπό την επίδραση του Ήλιου. Ό,τι απέμεινε από αυτή την αρχική αποξήρανση διαμόρφωσε τη θάλασσα. Τούτη η βαθμιαία αποξήρανση είναι τμήμα μιας κυκλικής διαδικασίας που δεν οδηγεί, όμως, στην επαναπορρόφηση της γης από το άπειρο.

Ο Αναξίμανδρος διατύπωσε επίσης και μια πρώιμη εξελικτική θεωρία, βάσει της οποίας η ζωή εμφανίστηκε -μέσω προφανώς της αυτόματης γένεσης εξαιτίας της ηλιακής θερμότητας- στον πηλό ή τη λάσπη. Τα πρώτα πλάσματα που παρουσιάστηκαν ήταν ιχθυόμορφα και τα περιέκλειαν κελύφη. Αποβάλλοντας τα κελύφη τα πλάσματα αυτά προσαρμόστηκαν βαθμιαία στο αέριο περιβάλλον. Ο άνθρωπος εμφανίζεται στο τέλος αυτής της εξελικτικής βαθμίδας, γεγονός που μας οδηγεί στη σκέψη ότι ο φιλόσοφος είδε την γένεση του κόσμου και της

ζωής ως μια ενιαία εξελικτική διαδικασία, που δεν απέχει πολύ από τη σύγχρονη εξελικτική θεωρία.

Ο Αναξίμανδρος ακόμη, πίστευε ότι κανένα από τα 4 βασικά στοιχεία δεν υπερτερεί στον Κόσμο σε σχέση με τα άλλα, και πως υπάρχει μια "κοσμική δικαιοσύνη" η οποία εξασφαλίζει την ισορροπία αυτή.

Επίκεντρο της φιλοσοφίας του Αναξίμανδρου είναι το *άπειρον*, ένα άπειρο όμως που πιθανώς προσλαμβάνει δύο ερμηνείες:

- άπειρον α+πέρας = χωρίς τέλος
- άπειρον α+περάω =αδιαπέραστο

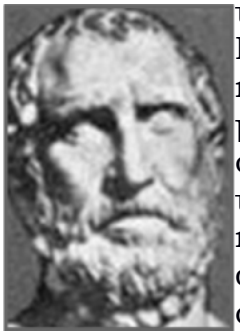
Σε κάθε περίπτωση φαίνεται πως εννοούσε μια πρωταρχική αιτία δίχως όρια στον χώρο. Το άπειρον είναι απεριόριστο στον χώρο και ποιοτικά ακαθόριστο, καθώς δεν προσδιορίζεται μορφικά ως ένα από τα τέσσερα στοιχεία. Στο άπειρο ο Αναξίμανδρος δεν είδε μόνον την πρωταρχική ύλη και την αρχική κατάσταση του κόσμου αλλά και την αιτία της κοσμικής τάξης. Σε αυτή την πρωταρχική ουσία απέδωσε θεϊκές ιδιότητες, χαρακτηρίζοντας το άπειρο ως *αθάνατον*, *ανώλεθρον* και *θείον*, σύμφωνα με τον Σιμπλίκιο (*Εις τα Φυσικά* 24,13). Η αδυναμία της ανθρώπινης διάνοιας να καθορίσει το άπειρο ποσοτικά και ποιοτικά το καθιστά απεριόριστη πηγή και κατευθυντήρια δύναμη του κόσμου.

Γνωστά έργα

- *Περί της Φύσεως*, του οποίου επιβιώνει απόσπασμα που αναφέρεται στον Σιμπλίκιο. Βέβαια είναι αμφίβολο αν αυτός ήταν ο πραγματικός τίτλος του έργου, μια και συνηθιζόταν στην αρχαιότητα σε ανάλογα έργα να αποδίδεται ο συγκεκριμένος τίτλος.
- Χάρτης του γνωστού κόσμου (χαμένος)

Ορισμένες από τις ιδέες του Αναξίμανδρου διατηρήθηκαν στην (χαμένη) ιστορία της φιλοσοφίας του Θεόφραστου, οι οποίες μάλιστα αναφέρονται και από ύστερους συγγραφείς.

Αναξιμένης



Ο **Αναξιμένης**, ο τρίτος στη διαδοχή Μιλήσιος φιλόσοφος και τελευταίος αντιπρόσωπος της Σχολής της Μιλήτου ή Ιωνικής, που διαλύθηκε το 494 π.Χ., όταν οι Πέρσες κατάλαβαν την πόλη. Ήταν γιος του Ευρύστρατου και μαθητής του Αναξίμανδρου. Ωστόσο ο Αναξιμένης δε συμμερίστηκε τη γνώμη του δασκάλου του, ότι αρχή των πάντων είναι το άπειρο, και διαμόρφωσε δική του κοσμοθεωρία, σύμφωνα με την οποία τα πάντα φτιάχτηκαν από τον "**αέρα**", ουσία αεικίνητη, απεριόριστη, που βρισκόταν σε διαρκή αλλοίωση. Δραστηριοποιήθηκε στο δεύτερο μισό του 6ου π.Χ αιώνα και πέθανε πιθανώς σε ηλικία 60 χρονών κατά την 63η Ολυμπιάδα (528-525 π.Χ.). Για τον βίο και τις δραστηριότητες του Αναξιμένη γνωρίζουμε ελάχιστα πράγματα. Οι περισσότερες πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του βασίζονται στον Θεόφραστο, που διασώζεται περιληπτικά από τον Σιμπλίκιο. Αποσπάσματα της φιλοσοφίας του

βρίσκονται σε κείμενα του Αριστοτέλη, του Πλούταρχου, του Ιππόλυτου και του Αέτιου.

Ο Αναξιμένης διαμόρφωσε τόσο την κοσμολογία όσο και την κοσμογονία του με επίκεντρο το στοιχείο του αέρα και τις μεταβολής του: Ο κόσμος προέκυψε από τον αδιαφοροποίητο αέρα. Το σχήμα του Σύμπαντος πιστεύει ότι είναι ημισφαιρικό. Τα ουράνια σώματα έχουν πύρινη φύση και προέκυψαν από τους υγρούς ατμούς που αναδίδονται από τα υγρά μέρη της γης. Ανεβαίνοντας οι ατμοί αραιώνουν τόσο, που γίνονται φωτιά και όπως η γη υποβαστάζονται από τον αέρα. Με την θεωρία της πύκνωσης και της αραίωσης ο Αναξιμένης εξηγούσε επίσης και διάφορα μετεωρολογικά φαινόμενα (βροχή, σύννεφα κ.λπ.) (Ψευδο-Πλούταρχος, *Στρωματείς*, 3 [DK 13A6]). Ο Αναξιμένης παρουσιάζει τη Γη ως πλατύ δίσκο μεγάλης έκτασης που στηριζόταν στον αέρα, μιας και είχε διαπιστώσει ότι στον αέρα συγκρατούνται καλύτερα τα σώματα με μεγαλύτερη επιφάνεια. Ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι η ακινησία της Γης, στην οποία πίστευε ο Αναξιμένης, όπως και ο Αναξαγόρας και ο Δημόκριτος, οφειλόταν στο πλατύ της σχήμα. Για τον Ήλιο ο Αναξιμένης πιστεύει πως προήλθε από τη Γη, πως έχει σχήμα όμοιο με αυτήν αλλά πως απέκτησε μεγάλη θερμότητα λόγω της γρήγορης κίνησής του.

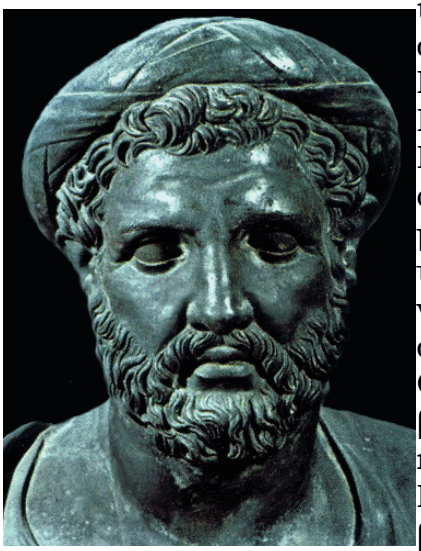
Το ερμηνευτικό μοντέλο του κόσμου που προβάλλει ο Αναξιμένης είναι το πρώτο συστηματικό μονιστικό σύστημα στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία και υλιστικό με την ευρύτερη έννοια του όρου. Η ύλη δε θεωρείται αδρανής αλλά ζωντανή και αδιαχώριστη από την κινούσα αιτία της, γεγονός που σημαίνει ότι η ύλη και η δύναμη δεν έχουν ακόμα διαχωριστεί ως αυτοτελείς οντότητες.

Οι τρεις αυτοί σπουδαίοι άντρες, όχι μόνο έδωσαν την αρχή και τις βάσεις των σύγχρονων επιστημών, αλλά διαμόρφωσαν και μαθηματικά αξιώματα, τα οποία χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα ανά τον κόσμο. Το έργο τους συνέχισαν μεταγενέστεροι μαθηματικοί που είχαν ιδρύσει σχολές στην Κάτω Ιταλία ή Μεγάλη Ελλάδα. Αυτοί ήταν οι Πυθαγόρειοι και οι Ελεάτες.

Η Σχολή των Πυθαγορείων

Πυθαγόρας_

Ο Πυθαγόρας, αναγνωρίζεται ως ένας από τους μεγαλύτερους μύστες της Αρχαιότητας. Γεννήθηκε το 582 π.Χ. στη Σάμο και υπήρξε ιδρυτής της ομώνυμης Σχολής, η οποία είχε φιλοσοφικό χαρακτήρα και διερευνούσε τους Νόμους της Φύσεως ανά τον ελλαδικό χώρο.



Μολονότι η προσωπικότητα και το έργο του Πυθαγόρα υπήρξαν τόσο σημαντικά στην αρχαία Ελλάδα, εξαιτίας της μυστικότητας με την οποία περιβαλλόταν η διδασκαλία του, δεν έχουμε συγκεκριμένες πληροφορίες για τη ζωή του. Λέγεται ότι ήταν μαθητής του φιλόσοφου Φερεκύδη στη Λέσβο και του Θαλή και Αναξίμανδρου στη Μίλητο. Είναι βέβαιο ότι έμεινε 22 χρόνια στην Αίγυπτο κοντά στους ιερείς της Μέμφιδας, της Ηλιούπολης και της Διόσπολης. Όταν όμως ο βασιλιάς των Περσών Καμβύσης κατέλαβε την Αίγυπτο, ο Πυθαγόρας. μεταφέρθηκε αιχμάλωτος στη Βαβυλώνα και έτσι είχε την ευκαιρία να συναναστραφεί και με τους Πέρσες μάγους. Ελευθερώθηκε μετά από 12 χρόνια με τη μεσολάβηση του Έλληνα προσωπικού γιατρού του βασιλιά Δημοκήδη. Λέγεται ακόμα ότι πήγε και στην Ινδία, και μυήθηκε εκεί στα τελετουργικά των Βραχμάνων. Επέστρεψε στη Σάμο σε ηλικία πλέον 56 χρόνων. Αλλά και στη Σάμο δεν έμελλε να παραμείνει αρκετά, γιατί ο τύραννος **Πολυκράτης** διοικούσε απολυταρχικά την πατρίδα του. Έφυγε λοιπόν και εγκαταστάθηκε στον **Κρότωνα** της Κάτω Ιταλίας, όπου μαζί με άλλους ομόφρονές του ίδρυσε σχολή. Στον Κρότωνα, όπου εγκαταστάθηκε το 529, προέβη στην ίδρυση μίας μυστηριακής σχολής, η οποία έμεινε γνωστή ως Αδελφότητα των Πυθαγορείων, η οποία πρέσβευε την αντίληψη ότι τα πάντα είναι αριθμοί καθώς και ότι η εμπέδωση του νοήματος των αριθμών συνεπάγεται τον εναρμονισμό και την κυριαρχία επί των φυσικών καταστάσεων. Οι ιδέες του έκαναν ξεχωριστή εντύπωση, κυρίως στους νέους, και γρήγορα οδηγήθηκε στο δικαστήριο με την κατηγορία της διαφθοράς των νέων και της αθεΐας, όπου όμως τελικά αθωώθηκε. Σχετικά με το θάνατό του, κατά μία άποψη πέθανε εξόριστος στο Μεταπόντιο, κατ' άλλη όμως σκοτώθηκε σε μια επιδρομή των δημοκρατικών κατά της σχολής με αρχηγό τον **Κόνωνα**. Πάντως είναι βέβαιο ότι η σχολή του Πυθαγόρα. στον Κρότωνα έκλεισε για πολιτικούς λόγους και πολλοί από τους μαθητές του σκοτώθηκαν.

Η ιδιόρρυθμη φιλοσοφία του και ο αυστηρός τρόπος ζωής του δεν άργησαν να δημιουργήσουν αρκετούς θρύλους γύρω από το πρόσωπό του. Πολύ μεγάλη σημασία έδινε ο Πυθαγόρας στη μουσική την οποία μάλιστα κατέτασσε μαζί με την αστρονομία και τα μαθηματικά/γεωμετρία στις τρεις βασικές επιστήμες για την κατανόηση όλων των υπολοίπων και εν τέλει, της ίδιας της ζωής και των νόμων της φύσεως. Στον Πυθαγόρα οφείλεται η θεωρεία της αρμονίας των ουρανίων σφαιρών, το πεντάγραμμο, οι διαβαθμίσεις των τόνων, οι μουσικοί

φθόγγοι και γενικά ότι έχει να κάνει με την μουσική και την εξέλιξή της, ακόμη και αυτό το όνομά της, αφού πρώτος ο Πυθαγόρας θεώρησε ότι δεν είναι τυχαία η αναφορά των αρχαίων ποιητών όπως του Ησιόδου, του Ομήρου και του Ορφέως στις εννέα Μούσες και τον μουσηγέτη προστάτη τους θεό Απόλλωνα. Η μουσική, δηλαδή η μελέτη των αριθμητικών αναλογιών της μουσικής κλίμακας (αρμονία), και η αριθμητική ερμηνεία της φύσης, ήταν οι κύριοι τομείς του έργου του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων. Η διδασκαλία του Πυθαγόρα μπορεί να διακριθεί σε δύο είδη: Εκείνη με αντικείμενο την ηθική διαμόρφωση προς βελτίωση της ψυχής κι εκείνη με αντικείμενο την γεωμετρία και τα μαθηματικά προς μελέτη της περί ουρανίων σωμάτων επιστήμης.

Κεντρική θέση στη διδασκαλία του Πυθαγόρα είχε ο εξαγνισμός της ψυχής. Η διδασκαλία του, όμως, διέφερε από άλλες αντίστοιχες διδασκαλίες της εποχής ως προς το ότι απέδιδε πολύ μεγάλη σημασία στα μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα στην αριθμητική, καθώς η κεντρική ιδέα γύρω από την οποία περιστρεφόταν ήταν ότι οι αριθμοί αποτελούν τη θεμελιώδη αρχή από την οποία συγκροτείται ο κόσμος. “Τα στοιχεία των αριθμών είναι στοιχεία όλων των όντων,” δίδασκαν οι Πυθαγόρειοι σύμφωνα με μαρτυρία του Αριστοτέλη (Μετά τα φυσικά, Α 986a): η αρμονία των μουσικών διαστημάτων, οι κινήσεις των πλανητών, οι γεωμετρικές μορφές που έχουν οι αστερισμοί, οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, όλα χαρακτηρίζονται από αριθμούς ή από λόγους μεταξύ αριθμών.

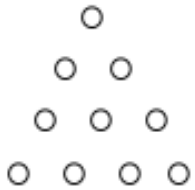
Σύμφωνα με την Πυθαγόρεια κοσμογονία, το σύμπαν δημιουργήθηκε από τον αριθμό ***ένα*** μετά από διαίρεσή του που πραγματοποιήθηκε από ***εισπνοή απείρου***. Το άπειρο εισβάλλει στο αδιαφοροποίητο ***είναι*** και το διασπά δημιουργώντας από την μονάδα τη δυάδα. Ας δούμε πιο συγκεκριμένα τι εννοούν οι Πυθαγόρειοι με τα παραπάνω. Αρχικά υπάρχει το δίπολο ***πέρας – άπειρο***. Το πέρας αντιστοιχεί στο ***είναι*** που ήταν αδιαφοροποίητο, ενιαίο και πεπερασμένο. Αυτό το ***είναι*** ήταν ταυτόσημο για τους Πυθαγόρειους με τον αριθμό ***ένα***. Το άπειρο είναι αυτό που οριοθετεί το πεπερασμένο ***είναι*** και που στην σκέψη τον αρχαίων ταυτίζεται με το ***κενό***. Άρα το κενό εισβάλει στην μονάδα και την διασπά σε δύο μέρη. Από το δύο με την ίδια διαδικασία παίρνουμε το τρία, από το τρία το τέσσερα κ.ο.κ. Άρα το σύμπαν των Πυθαγορείων είναι ουσιαστικά ένα αντίγραφο του συνόλου των φυσικών αριθμών όπως θα λέγαμε σήμερα.

Βλέπουμε αμέσως εδώ τη βασική διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στη διδασκαλία του Πυθαγόρα και των οπαδών του από τη μία πλευρά και, στις διδασκαλίες των Μιλήσιων φυσικών φιλοσόφων από την άλλη. Ενώ οι Μιλήσιοι αναζητούσαν μια υλική πρώτη αρχή που αποτελεί την ουσία των όντων, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του έστρεψαν την προσοχή τους από την έρευνα της ουσίας στη μελέτη της δομής των φαινομένων, δομής η οποία, πίστευαν, εκφράζεται δια των αριθμών. “Οι Πυθαγόρειοι”, γράφει ο G.E.R. Lloyd, “κατατάσσονται μεταξύ των πρώτων θεωρητικών οι οποίοι επιχείρησαν εκ προθέσεως να προσδώσουν στη γνώση της φύσης ένα θεμέλιο ποσοτικό, μαθηματικό” (Lloyd, 1996, σ. 41). Είναι περιττό να τονίσουμε ότι αυτή η εστίαση του ενδιαφέροντος στις ποσοτικές πλευρές της μελέτης του φυσικού κόσμου έχει εξαιρετική

σημασία για την ιστορία της επιστήμης και, μάλιστα, φαντάζει στον σημερινό αναγνώστη ως εξαιρετικά μοντέρνα.

Αποδίδοντας, λοιπόν, τόσο μεγάλη σημασία στη μελέτη των αριθμών οι Πυθαγόρειοι επιδόθηκαν στην έρευνα των ιδιοτήτων τους. Εδώ οφείλουμε ευθύς εξαρχής να διευκρινίσουμε ότι η έννοια του αριθμού στην αρχαιότητα ήταν πολύ πιο περιορισμένη από τη σύγχρονη έννοια που έχει ο όρος αυτός. Οι αριθμοί των αρχαίων δεν περιελάμβαναν τους άρρητους ούτε τα κλάσματα. Ακόμη και αυτή η μονάδα δεν θεωρείτο, αριθμός. Οι αριθμοί κατά τους αρχαίους δήλωναν πάντοτε ορισμένα πλήθη ορισμένων αντικειμένων και αντιστοιχούσαν σε ό,τι ονομάζουμε σήμερα θετικούς ακεραίους. Με βάση, λοιπόν, αυτόν τον τρόπο κατανόησης των αριθμών, οι Πυθαγόρειοι επινόησαν έναν τρόπο απεικόνισής τους χρησιμοποιώντας "ψήφους" (στιγμές ή, πιο συγκεκριμένα, χαλίκια). Πώς ακριβώς διευθετούσαν τις ψήφους δεν το γνωρίζουμε. Οι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν προτείνει διάφορες εκδοχές, η απλούστερη από τις οποίες είναι αυτή που έχει προτείνει ο W.R. Knorr, κάθε αριθμός θα παριστάνεται με μία απλή σειρά ψήφων του ίδιου χρώματος.

Έχει σημασία να κατανοήσουμε ότι η πυθαγόρεια αντίληψη των αριθμών συνδεόταν άρρηκτα με τη γεωμετρική παράστασή τους, που ήταν κάποιο γεωμετρικό σχήμα που σχημάτιζαν με ψήφους. Ο αριθμός για τους Πυθαγορείους είχε ταυτόχρονα αριθμητική και γεωμετρική φύση. Τον αριθμό 10, που είχε ιδιαίτερη σημασία ως το άθροισμα των αριθμών 1, 2, 3 και 4, των τεσσάρων αρχικών όρων δηλαδή της αριθμητικής ακολουθίας (*τετρακτύς της δεκάδος*), τον παρίσταναν με ψήφους διατεταγμένους έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Αυτή η μέθοδος της γεωμετρικής απεικόνισης έδινε τη δυνατότητα να συσχετίζονται συνεχώς οι αριθμοί μεταξύ τους και να ανακαλύπτονται νέες αριθμητικές σχέσεις διαμέσου της γεωμετρίας ή γεωμετρικές σχέσεις διαμέσου της αριθμητικής. Το γεγονός ότι ο αριθμός είχε στους Πυθαγόρειους και γεωμετρική αναπαράσταση συνεπαγόταν τη σύνδεση του αριθμού με την έννοια του χώρου. Η μονάδα ήταν γι' αυτούς επίσης και γεωμετρικό σημείο, και το αντίστροφο. Αφού οι μονάδες και τα σημεία δεν υπόκεινται σε διαίρεση θεωρήθηκαν ως τα έσχατα στοιχειακά υλικά των πραγμάτων. Όταν οι Πυθαγόρειοι αναφέρονταν στους αριθμούς ως συστατικά στοιχεία του κόσμου, εννοούσαν ίσως ότι τα επίμερους πράγματα δεν είναι παρά συνδυασμοί και συνθέσεις μονάδων-σημείων (ατόμων, θα πουν αργότερα οι ατομικοί φιλόσοφοι). Οι αριθμοί δεν ήταν όμως ισότιμοι στην πυθαγόρεια αντίληψη. Υπήρχαν αριθμοί με ιδιάζουσες σημασίες. Έτσι, η μονάδα δεν ήταν αριθμός αλλά η αρχή της αρίθμησης και ταυτόχρονα γεννήτορας των αριθμών, άρα, σύμφωνα με την Πυθαγόρεια αντίληψη, και μια κοσμογονική αρχή. Η δημιουργία του 2

με την επανάληψη της μονάδας δεν σήμαινε απλά τη δημιουργία ενός ακόμα αριθμού αλλά και τη δημιουργία της ευθείας γραμμής, η δημιουργία του 3 τη δημιουργία του τριγώνου, του 4 τη δημουργία του τετραέδρου κ.λπ. Η ευθεία, το τρίγωνο, το τετράεδρο, δεν ήταν αφηρημένες γεωμετρικές κατασκευές, αλλά φυσικές οντότητες. Επομένως η επανάληψη της μονάδας δημιουργούσε όχι μόνο τους τρεις επόμενους αριθμούς αλλά και τις τρεις διαστάσεις του χώρου.

Η επιστημονική έρευνα των Πυθαγορείων αναπτύχθηκε ταυτόχρονα στα μαθηματικά και στη μουσική. Σκοπός ήταν να αποδειχθεί ότι ο κόσμος είναι αρμονία των αριθμών και, μαζί, μουσική αρμονία. Δεν είναι δυνατόν να ανασυγκροτήσου με με ακρίβεια τις πυθαγόρειες αντιλήψεις για τον ρόλο των μαθηματικών και της μουσικής στην ερμηνεία της δομής του σύμπαντος και να κατανοήσουμ ε την περίφημη ιδέα της “αρμονίας των σφαιρών” που αποδίδεται σε αυτούς. Θα πρέπει να ήταν μια κοσμολογική θεωρία που “αναγνώριζε” στα μέρη και τη διάταξη του σύμπαντος ιδιότητες των αριθμών και της μουσικής κλίμακας.

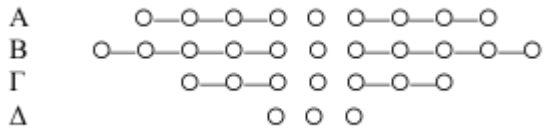
Ο τρόπος παράστασης των αριθμών με ψήφους, έδωσε τη δυνατότητα στους Πυθαγορείους να προβούν σε μια πρώτη βασική ταξινόμηση των αριθμών, σε άρτιους και σε περιττούς. Με βάση την αναπαράσταση που υιοθετήσαμε θα παριστάνουμε έναν άρτιο αριθμό με μια σειρά ψήφων η οποία μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη. Ένας περιττός αριθμός, αντίθετα, δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη γιατί πάντοτε περισσεύει μία ψήφος.

ο άρτιος αριθμός 6 ο περιττός αριθμός 5

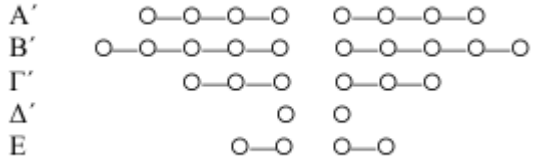
Με αυτόν τον τρόπο παράστασης των αριθμών είναι τετριμμένη υπόθεση η δικαιολόγηση μερικών απλών θεωρημάτων της στοιχειώδους αριθμητικής. Τα θεωρήματα που ακολουθούν περιέχονται στο ένατο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη:

IX 21: Το άθροισμα οσωνδήποτε άρτιων αριθμών είναι άρτιος.
IX 22: Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών αριθμών είναι άρτιος.
IX 23: Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός.
IX 24 & IX 26: Η διαφορά μεταξύ δύο αριθμών της αυτής αρτιότητας είναι άρτιος.
IX 25 & IX 27: Η διαφορά μεταξύ δύο αριθμών αντίθετης αρτιότητας είναι περιττός.
IX 28: Το γινόμενο περιττού αριθμού με άρτιο είναι άρτιος.
IX 29: Το γινόμενο περιττού αριθμού με περιττό είναι περιττός.

Όλα αυτά τα θεωρήματα μπορούν να δικαιολογηθούν εποπτικά χρησιμοποιώντας τον τρόπο παράστασης των αριθμών με ψήφους. Για παράδειγμα, το θεώρημα IX 22 θα μπορούσε να δικαιολογηθεί ως εξής: Έστω ότι προσθέτουμε τους περιττούς αριθμούς Α, Β, Γ, Δ που απεικονίζονται παρακάτω



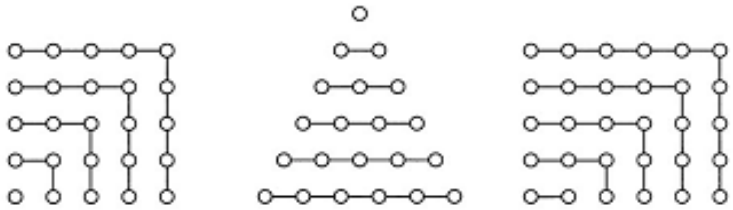
Αν αποσπάσουμε από τον κάθε αριθμό την κεντρική μονάδα, τότε σχηματίζονται οι αριθμοί Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ οι οποίοι είναι άρτιοι και, καθώς το πλήθος τους είναι άρτιο, μπορούμε να συγκεντρώσουμε τις μονάδες που αποσπάσαμε ώστε να σχηματισθεί ο αριθμός Ε ο οποίος εξ υποθέσεως είναι άρτιος. Σχηματίζονται έτσι οι αριθμοί



Το άθροισμα των αριθμών Α, Β, Γ, Δ είναι εκ κατασκευής ίσο με το άθροισμα των Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε και οι αριθμοί αυτοί είναι όλοι άρτιοι. Από το προηγούμενο θεώρημα όμως (θεώρημα IX 2 1), γνωρίζουμε ότι το άθροισμα οσονδήποτε άρτιων αριθμών είναι άρτιος αριθμός. Άρα, το άθροισμα των αριθμών Α, Β, Γ και Δ είναι άρτιος αριθμός.

Παρόμοιες αποδείξεις μπορούμε να δώσουμε για όλα τα θεωρήματα του ενάτου βιβλίου που παραθέσαμε πιο πριν. Είναι εύλογο, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι το τμήμα του ενάτου βιβλίου που απαρτίζεται από τα παραπάνω θεωρήματα (καθώς και τα θεωρήματα IX 30-34 & 36 τα οποία εντάσσονται επίσης στη θεωρία περί αρτίων και περιττών) προέρχεται από τη σχολή των Πυθαγορείων και αποτελεί ένα δείγμα της αριθμητικής τους.

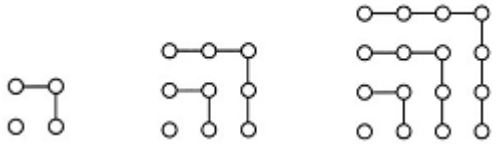
Ένα άλλο κεφάλαιο της αριθμητικής των Πυθαγορείων ήταν η θεωρία για τους "παραστατικούς" αριθμούς. Ένας παραστατικός αριθμός σχηματίζεται διευθετώντας καταλλήλως τις ψήφους που τον απαρτίζουν έτσι ώστε να προκύψει μια γεωμετρική μορφή. Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζονται τρεις παραστατικοί αριθμοί: ο τετράγωνος 25, ο τρίγωνος 21 και ο ετερομήκης 30 (ετερομήκεις ονομάζονταν οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων, δηλαδή οι αριθμοί της μορφής $n(n + 1)$· στην προκειμένη περίπτωση ο 30 γράφεται 5·6).



ο τετράγωνος 25 ο τρίγωνος 21 ο ετερομήκης 30

Το κλειδί για τη μελέτη των ιδιοτήτων των παραστατικών αριθμών ήταν η έννοια του "γνώμονα", δηλαδή του φυσικού αριθμού ο οποίος, όταν προστεθεί σε έναν όρο της ακολουθίας των παραστατικών αριθμών ενός ορισμένου είδους, παράγει τον επόμενο όρο της ακολουθίας. Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε ότι αν στον αριθμό 1 προσθέσουμε τον περιττό αριθμό 3 (ο οποίος είναι ο "γνώμων") σχηματίζεται ο τετράγωνος αριθμός 4(βλ. σχήμα αριστερά). Αν σε αυτόν τον αριθμό προσθέσουμε τον περιττό αριθμό 5 (που είναι ο επόμενος "γνώμων") σχηματίζεται ο

τετράγωνος 9βλ. σχήμα μέσον), κ.ο.κ. Διαπιστώνουμε έτσι ότι οι γνώμονες των τετραγώνων αριθμών είναι οι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί με πρώτον τον 3.



Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι οι γνώμονες των τρίγωνων αριθμών είναι οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί με πρώτον τον 2, ενώ οι γνώμονες των ετερομηκών αριθμών είναι οι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί με πρώτον τον 4.

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξαν οι Πυθαγόρειοι από τη μελέτη των παραστατικών αριθμών είναι η μέθοδος για την εύρεση των "πυθαγορείων τριάδων".

Τρεις φυσικοί αριθμοί Α, Β, Γ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα αν ικανοποιούν τη σχέση $A^2 + B^2 = \Gamma^2$.

Συγκεκριμένα, ο Πρόκλος αποδίδει στον Πυθαγόρα την εύρεση των πυθαγορείων τριάδων της μορφής $(N, \frac{N^2-1}{2}, \frac{N^2+1}{2})$, όπου N περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ως N τον αριθμό 3, θα σχηματιστεί η τριάδα $(3, \frac{3^2-1}{2}, \frac{3^2+1}{2})$ δηλαδή η (3, 4, 5), η οποία είναι πράγματι πυθαγόρεια τριάδα αφού ικανοποιεί τη σχέση $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ο Πρόκλος επίσης αποδίδει στον Πλάτωνα την εύρεση των πυθαγορείων τριάδων της μορφής $(N, (N/2)^2-1, (N/2)^2+1)$, όπου N άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ως N τον αριθμό 8, θα σχηματιστεί η τριάδα $(8, (8/2)^2-1, (8/2)^2+1)$, δηλαδή η (8, 15, 17), η οποία είναι πράγματι πυθαγόρεια τριάδα γιατί $8^2 + 15^2 = 17^2$. Από μια άλλη πηγή πάντως, ο δεύτερος τύπος αποδίδεται στον Πυθαγόρειο Αρχύτα (περ. 430-350 π.Χ.).

Οι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν αποδείξει ότι οι παραπάνω τύποι μπορούν να εξαχθούν και να δικαιολογηθούν με βάση τη θεωρία των παραστατικών αριθμών.

Πριν αφήσουμε τη σχολή των Πυθαγορείων πρέπει να σταθούμε σε ένα μείζον επίτευγμα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Αναφέραμε παραπάνω ότι το βασικό στοιχείο της Πυθαγόρειας διδασκαλίας είναι ότι ο κόσμος δομείται κατά τρόπο ***ρητό***. Θα πρέπει δηλαδή όλες οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος να είναι σχέσεις ***λόγων θετικών ακεραίων***. Αν ο κόσμος αποτελείται σε τελευταία ανάλυση, από διακριτές ψηφίδες, θα πρέπει κάθε δύο συγκρινόμενα μήκη να μπορούν να μετρηθούν με ένα ***κοινό μέτρο*** που δεν θα ήταν τίποτε άλλο παρά το μήκος μιας δεδομένης ελάχιστης χωρικής ψηφίδας. Κάθε δυάδα συγκρινόμενη θα έπρεπε να δίνει ***σύμμετρο*** αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια συγκρίνοντας δύο εκτεταμένα μήκη θα καταλήγαμε σε ένα λόγο της μορφής $\frac{x}{y}$ όπου x και y εκφράζουν πόσες φορές το ελάχιστο αυτό χωρικό μήκος (το κοινό τους μέτρο) χωράει στα συγκρινόμενα μήκη. Οι Πυθαγόρειοι ήταν λοιπόν

πεπεισμένοι ότι η συγκρισιμότητα δύο εκτεταμένων μεγεθών θα καταλήξει πάντα ύστερα από πεπερασμένα το πλήθος βήματα, στην εύρεση ενός κοινού μέτρου σύγκρισης των δύο μεγεθών. Αν α, β τα μήκη των δεδομένων συγκρινόμενων μεγεθών και ν το ελάχιστο χωρικό μήκος (το κοινό τους μέτρο), τότε οι θετικοί ακέραιοι **x**, **y** βρίσκονται σαν αποτέλεσμα της διαίρεσης **α/ν** και **β/ν**. Έτσι **α=x·ν** και **β=y·ν** άρα η σύγκριση των α, β θα δώσει το λόγο $\frac{x}{y}$. **Σύμμετρα** είναι λοιπόν τα μήκη για τα οποία μπορούμε να βρούμε ένα κοινό τους μέτρο. Η διαδικασία που χρησιμοποιούσαν οι αρχαιοέλληνες για την εύρεση του κοινού μέτρου ήταν η μέθοδος της αμοιβαίας αφαίρεσης. Αν λοιπόν βρίσκαμε δύο μήκη στα οποία η διαδικασία για την εύρεση του κοινού τους μέτρου συνεχίζεται επ' άπειρον τότε τα μήκη αυτά θα λέγονταν ***ασύμμετρα*** και δεν θα μπορούσαν να γραφούν σαν λόγοι θετικών ακεραίων δηλ. ρητών.

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

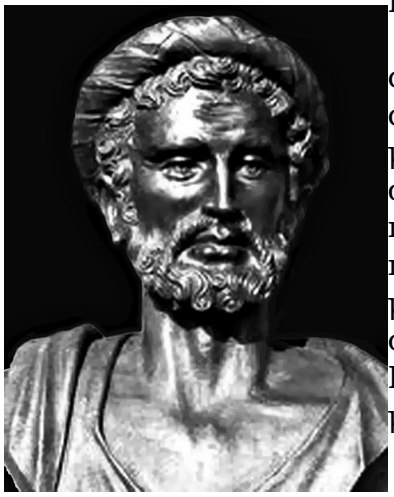
Η χρονολογία και ο τρόπος με τον οποίο ανακαλύφθηκε η ασυμμετρία αποτελούν ερωτήματα τα οποία οι υπάρχουσες μαρτυρίες δε μας επιτρέπουν να απαντήσουμε με απόλυτη βεβαιότητα. Ο Πρόκλος αποδίδει την ανακάλυψη στον ίδιο τον Πυθαγόρα· ένα σχόλιο όμως στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη που αποδίδεται στον έγκυρο σχολιαστή Πάππο από την Αλεξάνδρεια (4ος μ.Χ. αιώνας) είναι λιγότερο συγκεκριμένο και αναφέρει απλώς ότι η ασυμμετρία μελετήθηκε για πρώτη φορά από τους Πυθαγορείους: " Ἦλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως." ([Bulmer-] Thomas, τ. Ι, 1991, σ. 214). Το ίδιο σχόλιο, μάλιστα, προσθέτει ότι σύμφωνα με όσα οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι διηγούνται "τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν" (ό.π., σ. 216). Σήμερα οι ιστορικοί των μαθηματικών θεωρούν τη μαρτυρία του Πάππου ως πιο αξιόπιστη από αυτή του Πρόκλου. Θεωρούν ότι η ασυμμετρία ανακαλύφθηκε στη σχολή των Πυθαγορείων, δεν την αποδίδουν όμως προσωπικά στον ίδιο τον ιδρυτή της σχολής.

Η αρχαιότερη σωζόμενη αναφορά στον τρόπο απόδειξης της ασυμμετρίας περιέχεται στα Αναλυτικά πρότερα του Αριστοτέλη. Είναι μια λακωνική περιγραφή μιας απόδειξης σύμφωνα με την οποία, εάν υποθέσουμε ότι η πλευρά και η διαγώνιος του τετραγώνου είναι σύμμετρες, τότε καταλήγουμε στην αντίφαση τα άρτια γίνονται ίσα με τα περιττά: "οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης" (ό.π., σ . 110). Η λακωνικότητα της αναφοράς του Αριστοτέλη δεν μας επιτρέπει να ανασυγκροτήσουμε με βεβαιότητα όλες τις λεπτομέρειες της απόδειξης.

Κατά τον von Fritz η ανακάλυψη ασύμμετρων μεγεθών πιθανώς να έγινε από Πυθαγόρειο Ίππασο και δεν αφορά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας μίας κάθετης πλευράς και της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου αλλά την ασυμμετρία της πλευράς ενός κανονικού πενταγώνου και της διαγωνίου. Ο Ίππασος ενδιαφερόταν για τα κανονικά δωδεκάεδρα και κατ' επέκταση για τις έδρες τους που είναι τα κανονικά πεντάγωνα.

Ένα τέτοιο ενδιαφέρον είναι κατά τον von Fritz, δικαιολογημένο μια και η Κάτω Ιταλία είναι γεμάτη κρυστάλλους πυριτίου που είναι κανονικά δωδεκάεδρα και οι Πυθαγόρειοι ενδιαφέρονταν για αριθμητικές αναλύσεις γεωμετρικών επίπεδων σχημάτων και γεωμετρικών στερεών.

Οι γνώσεις μας για τους πυθαγόρειους, όπως και για τον ίδιο τον Πυθαγόρα, αντλούνται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων, στους οποίους περιλαμβάνονται και οι λεγόμενοι «Νεοπυθαγόρειοι». Αναπόφευκτα λοιπόν, είναι αδύνατον να αποδειχθεί τι πραγματικά ανήκει στη σκέψη του ίδιου του Πυθαγόρα και τι στους μαθητές του. Το έργο τους όμως διασώζεται μέχρι τις μέρες μας και εφαρμόζεται όχι μόνο ως μαθηματική ή επιστημονική θεωρία αλλά και ως πράξη. Ο σημαντικότερος Πυθαγόρειος μετά τον θάνατο του Πυθαγόρα ήταν ο Αρχύτας ο Ταραντίνος.


Αρχύτας ο Ταραντίνος

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο κόσμος αποτελείται από διακριτά πράγματα,τους ακέραιους αριθμούς και περιγράφεται από τις μεταξύ τους σχέσεις. Υπάρχει όμως μια άλλη φιλοσοφική σχολή της Κάτω Ιταλίας που πρεσβεύει ότι ο κόσμος δεν αποτελείται από πολλά διακριτά πράγματα αλλά είναι όλος **ένα** μόνο. Η σχολή αυτή έμεινε στην ιστορία με το όνομα Ελεατική. Οι πιο σημαντικοί από την Ελεατική σχολή ήταν Παρμενίδης και ο μαθητής του Ζήνων.

Ελεατική Σχολή

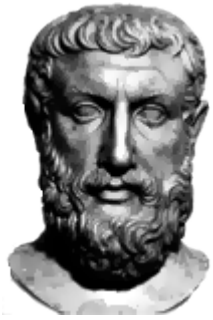
Η Ελέα, χτισμένη λίγο νοτιότερα από το σημερινό Σαλέρνο, ήταν αποικία των Φωκαέων, που έφθασαν εκεί διωγμένοι όταν οι Πέρσες κατέλαβαν την Ιωνία.

Ιδρυτής της Ελεατικής σχολής θεωρείται ο Ξενοφάνης ο Κολοφώνιος, για τον οποίο θα αναφερθούμε συνοπτικά όσων αφορά στη ζωή και το έργο του. Ο Ξενοφάνης γεννήθηκε το 570 π.Χ. και πέθανε σε πολύ μεγάλη ηλικία. Στα είκοσι πέντε του χρόνια εγκαταλείπει τον Κολοφώνα για να γλιτώσει από την εισβολή των Περσών, πηγαίνει αρχικά στην Ελλάδα κι αργότερα στην Ελέα και στις Συρακούσες. Πέρασε τη ζωή του περιπλανώμενος από πόλη σε πόλη και απαγγέλλοντας ποιήματα, ίσως μάλιστα να ήταν και ραψωδός. Όντας εξαιρετικά φτωχός, έγραφε ιάμβους και ελεγείες, μεταξύ των οποίων εποποιίες για την ίδρυση του Κολοφώνα και της Ελέας. Δεν μας απομένουν πια παρά ορισμένα αποσπάσματα από τις *Ελεγείες του* και τους *Σίλλους* (δηλ. σάτιρες), ενώ μια παράδοση του αποδίδει ακόμα ένα εκτενές ποίημα με τίτλο Περί Φύσεως. Γελοιοποιούσε τον Πυθαγόρα, γνωρίστηκε πιθανότατα με τον Αναξίμανδρο τον Μιλήσιο αλλά και εθεωρείτο από τον Ηράκλειτο πολύξερος δίχως μυαλό. Συχνά αναφέρεται ως ιδρυτής του ελεατισμού, ήδη από την αρχαιότητα όμως ορισμένοι τον θεωρούσαν σκεπτικιστή και παρέπεμπαν στο παρακάτω απόσπασμα : «Θνητός όμως κανείς δεν είδε την καθαρή αλήθεια ούτε θα ιδεί για τους θεούς και για όσα λέγω τούτα. Κι αν κάτι να πει τέλειο πιο πάνω απ' όλους τύχει, δεν το γνωρίζει: πλέκεται μέσα στα πάντα η γνώμη ». Για πρώτη ίσως φορά στην ελληνική φιλοσοφία, φαίνεται πραγματικά να αντιπαρατίθενται γνώση και επίφαση, καθώς ο Ξενοφάνης αποδίδει την πραγματική γνώμη στους θεούς και στους ανθρώπους την εικασία. Δεν λέει άλλωστε στο απόσπασμα αυτό ότι: «Δεν φανέρωσαν στους θνητούς οι θεοί απ' αρχής τα πάντα, μα το καλύτερο με τον καιρό ζητώντας βρίσκουν»; Δύο μαρτυρίες, που, είναι αλήθεια, έχουν ερμηνευτεί με διαφορετικό τρόπο, μια του Πλάτωνα κι η άλλη του Αριστοτέλη, θέλουν τον Ξενοφάνη ιδρυτή της Ελεατικής Σχολής: «Το γένος των Ελεατών, που ξεκίνησε από τον Ξενοφάνη κι απ' ακόμα πιο ψηλά, δεν βλέπει σ' αυτό που ονομάζουμε Όλον παρά μόνον ενότητα» (Σοφιστής 242)· ο Αριστοτέλης, από την άλλη, θεωρεί τον Ξενοφάνη τον παλαιότερο από τους οπαδούς της ενότητας και τον υποτιθέμενο δάσκαλο του Παρμενίδη (Μετά τα Φυσικά, 1,986 Β 21). Αποφεύγοντας να εμπλακούμε σε ανταγωνισμούς στείρας πολυμάθειας αλλά και δίχως να υποτιμούμε τις δυσκολίες, φαίνεται πως μπορούμε να δούμε στο πρόσωπο του Ξενοφάνη αν όχι τον πραγματικό ιδρυτή της Σχολής της Ελέας, τουλάχιστον όμως τον πιθανό εμπνευστή του Παρμενίδη.

Υπάρχει ωστόσο τουλάχιστον ένα σημείο για το οποίο κείμενα και κριτικές δεν αφήνουν κανένα περιθώριο αμφιβολίας: ότι ο Ξενοφάνης υπήρξε ο θεμελιωτής του πρώτου εγχειρήματος απομυθολογικοποίησης. Δεν παύει ούτε στιγμή να καταγγέλλει τις ανθρωπομορφικές και γελοιογραφικές παραστάσεις των ανθρώπων για το θείο. Σκανδαλίζεται κατ' αρχήν από τα αφηγήματα του Ομήρου και του Ησιόδου, που «όλα τα φόρτωσαν στους θεούς, ψεγάδια και ντροπές που βρίσκονται μέσα στους ανθρώπους, να κλέβουν, να μοιχεύουν, ν' απατούν ο ένας τον

άλλο» (απ. 11)· στη συνέχεια υπογραμμίζει πως οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται τους θεούς κατ' εικόνα τους: «Οι θνητοί θαρρούνε πως οι θεοί γεννιούνται σαν κι αυτούς και τη δικιά τους φορεσιά, φωνή, μορφή πως έχουν» (απ. 14). Οι απεικονίσεις των θεών είναι ανάλογες με την ανθρώπινη πηγή τους, γι' αυτό και «Οι Αιθίοπες λένε πως οι θεοί τους είναι σιμοί και μαύροι κι οι Θράκες κοκκινόμαλλοι, γαλανομάτες» (απ. 16). Κι ακόμα περισσότερο θα μπορούσαμε να πούμε πως «αν είχαν τα βόδια χέρια, τ' άλογα και τα λιοντάρια, για να μπορούν σαν τους θνητούς να ζωγραφίζουν έργα, τ' άλογα όμοια με τ' άλογα, τα βόδια με τα βόδια θα ζωγράφιζαν τις μορφές των θεών και σώματα θα έφτιαχναν τέτοια καθώς η είδη του καθενός τους θα 'ταν». Ο Ξενοφάνης λοιπόν καταφάσκει την ενότητα των πάντων, την ενότητα και τη μοναδικότητα του Είναι, ιδέες που με τον Παρμενίδη θα αποτελέσουν την καρδιά πλέον του ελεατικού δόγματος.

Παρμενίδης



Ο Παρμενίδης (περ. 515-440 π.Χ.) γεννήθηκε και μεγάλωσε στην Ελέα της Κάτω Ιταλίας. Τα όσα γνωρίζουμε για το έργο του είναι περισσότερα από αυτά για τη ζωή του. Διατύπωσε τις σκέψεις του με λόγο πολλές φορές αλληγορικό, ενώ επίσης του αποδίδεται η συγγραφή του ποιήματος Περί Φύσεως, από το οποίο έχουν σωθεί αποσπάσματα που ίσως μας δίνουν στοιχεία για την προσωπικότητα και τον χαρακτήρα του, αλλά και τις ιδέες του. Στο ποίημα αυτό, παρουσιάζεται ως έφηβος και η δίψα του για γνώση τον οδηγεί στην επικράτεια των θεών. Εκεί τον υποδέχεται μια θεά και υπόσχεται να τον μυήσει στη γνώσει και τον ξεναγεί στις οδούς της αλήθειας και των φαινομένων. Ο Παρμενίδης υιοθέτησε μέσα από το ποίημα αυτό τη ριζοσπαστική θέση ότι η μεταβολή είναι λογικά αδύνατη. Ξεκίνησε αρνούμενος στη βάση διαφόρων λογικών προκειμένων, τη δυνατότητα ενός πράγματος να μεταβεί από το μη-είναι στο είναι. Αν κάτι τέτοιο επρόκειτο να συμβεί, γιατί να συμβεί μια δεδομένη στιγμή και όχι κάποια άλλη και με τη βοήθεια ποιών μέσων ; Το συμπέρασμά του είναι ότι από το τίποτε μόνο το τίποτε μπορεί να προέλθει. Ο Παρμενίδης προχώρησε με ανάλογες προκείμενες στην άρνηση κάθε μορφής μεταβολής. Αρνήθηκε επίσης την ύπαρξη του χρόνου και της πολλαπλότητας με τη ρήση «το ον είναι ένα και παρόν».

Η άρνηση της μεταβολής από τον Παρμενίδη μπορεί να φαίνεται στον σύγχρονο αναγνώστη παράξενη. Το θέμα όμως, όπως καταλαβαίνει ο καθένας, δεν βρίσκεται εκεί. Το θέμα βρίσκεται στο πόση αξιοπιστία πρέπει να αποδίδει κανείς στα δεδομένα της εμπειρίας, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις εκείνες που τα δεδομένα αυτά δεν συμφωνούν με τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την προσεκτική επιχειρηματολογία με βάση τη λογική.

Το ερώτημα που εγείρεται είναι τι πρέπει να εμπιστεύεται κανείς: τα δεδομένα της εμπειρίας ή τα συμπεράσματα που συνάγονται με βάση τη λογική; Αυτό είναι ουσιαστικά το κρίσιμο ερώτημα που θέτει ο Παρμενίδης και γενικότερα η Ελεατική Σχολή. Η απάντησή του είναι απολύτως σαφής : η λογική πρέπει να υπερισχύει της πρακτικής ή

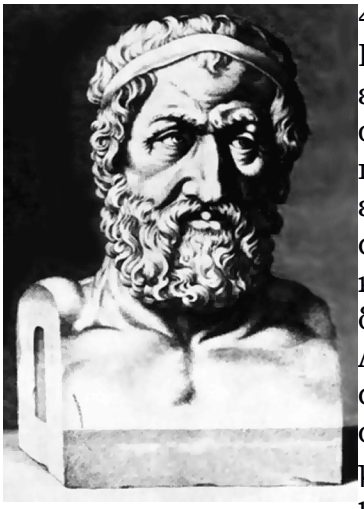
εμπειρικής γνώσης. Κατά τον Παρμενίδη, ο άνθρωπος δεν μπορεί να συλλάβει την αλήθεια με απατηλές αντιλήψεις, όπως τα συναισθήματα, παρά μόνο με την διάνοια (τον λόγο).

Κύριο χαρακτηριστικό του τρόπου συλλογισμού του Παρμενίδη και των μαθητών του (ιδίως του Ζήνωνος με τον οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια) ήταν η έμμεση αποδεικτική διαδικασία. Γιατί όλες οι προτάσεις διδασκαλίας των Ελεατών, δηλαδή το ότι δεν υπάρχει κίνηση, μεταβολή κτλ, μόνο εμμέσως μπορούν να αποδειχθούν. Ολόκληρη η Ελεατική διαλεκτική δεν είναι τίποτα άλλο παρά η τεχνική εφαρμογή της έμμεσης αποδεικτικής διαδικασίας.

Αυτός είναι και ο λόγος που ο Αριστοτέλης θεωρεί τον Ζήνωνα, μαθητή του Παρμενίδη, ως τον δημιουργό της διαλεκτικής. Μα η έμμεση απόδειξη ανιχνεύεται και στο ίδιο το έργο του Παρμενίδη, ο τρόπος του σκέπτεσθαι του οποίου δεν παρουσιάζει καμία διαφορά ως προς το σημείο αυτό από τον τρόπο του σκέπτεσθαι του Ζήνωνος.

Το έργο του Παρμενίδη έμελλε να επηρεάσει έντονα τα κοσμολογικά συστήματα που δημιουργήθηκαν μετά από αυτό, καθώς απεύθυνε μια πρόκληση στην οποία οι επόμενες γενιές των φιλοσόφων αισθάνονταν υποχρεωμένες να απαντήσουν. Ο Εμπεδοκλής ο Ακραγαντίνος και ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος αποδέχθηκαν την άποψη του Παρμενίδη ότι τίποτα δεν μπορεί να προέλθει από το τίποτα, ενώ και για τους Ατομικούς φιλοσόφους Λεύκιππο και Δημόκριτο τα άτομα είναι απολύτως αμετάβλητα και δεν υπόκεινται καμία γένεση, αλλοίωση ή φθορά.

Ζήνων



Ο Ζήνων γεννημένος στην Ελέα της Κάτω Ιταλίας έζησε μεταξύ 490-415 π.Χ. και υπήρξε μαθητής του Παρμενίδη. Όπως και εκείνος, ήταν πλήρως εξοικειωμένος με την Πυθαγόρεια μαθηματική φιλοσοφία και γνωρίζουμε ελάχιστα για την προσωπική ζωή του. Ενδέχεται να ήταν επηρεασμένος αρχικά από Πυθαγόρειες αντιλήψεις και να έγινε αργότερα σφοδρότερος και πολέμιός τους. Από το έργο του έχουν διασωθεί ελάχιστα αποσπάσματα. Χάρη στον Αριστοτέλη και τον Σιμπλίκιο γνωρίζουμε μερικά από τα περίφημα «παράδοξα» που διατύπωσε, όπως πιστεύεται, προκειμένου να στηρίξει το μονιστικό φιλοσοφικό σύστημα του Παρμενίδη και να καταδείξει τον αντιφατικό χαρακτήρα των αντιπάλων προς αυτό το πλουραλιστικών συστημάτων.

Το ένα μέλος το αποτελούσαν τα επιχειρήματα (παράδοξα) εναντίον της ύπαρξης των πολλών και το άλλο σκέλος αυτά εναντίον της κίνησης, η οποία είναι αναγκαία συνέπεια της αποδοχής της ύπαρξης των πολλών. Αυτή η δεύτερη κατηγορία των παραδόξων επιχειρεί να καταδείξει τα λογικά προβλήματα που εμπεριέχει η έννοια της κίνησης, στον βαθμό που εμπλέκονται στην όλη προβληματική οι έννοιες του χώροι και του χρόνου εντός των οποίων λαμβάνει χώρο η κίνηση.

Τα παράδοξα εναντίων της κίνησης που διατύπωσε ο Ζήνων είναι τέσσερα και γνωστά με τα ονόματά τους : 1) Ο Αχιλλέας και η χελώνα, 2) η διχοτομία, 3) το βέλος και 4) το στάδιο. Στα δύο πρώτα προσπαθεί να καταδείξει το αδύνατο και αντιφατικό της κίνησης στην περίπτωση που ο χώρος και ο χρόνος υποτεθούν ως συνεχή και απείρως διαιρετά μεγέθη.

Το παράδοξο «του Αχιλλέα και της χελώνας» έχει ως εξής : ο ταχύς Αχιλλέας και η προπορευόμενη βραδυκίνητη χελώνα αρχίζουν να κινούνται επάνω στην ίδια γραμμή και προς την ίδια κατεύθυνση. Όμως ο Αχιλλέας δεν θα καταφέρει ποτέ να προσπεράσει την χελώνα, διότι πρέπει πρώτα να φθάσει στο σημείο όπου βρισκόταν αρχικά πριν να την προσπεράσει. Όταν όμως φθάσει στο σημείο αυτό, η χελώνα θα έχει προχωρήσει κατά κάποια απόσταση και επομένως θα εξακολουθεί να προπορεύεται. Με άλλα λόγια, κάθε φορά που ο Αχιλλέας θα καλύπτει την απόσταση που τον χωρίζει από την χελώνα, εκείνη θα απομακρύνεται εκ νέου. Η διαφορά που θα τη χωρίζει από τον Αχιλλέα θα γίνεται όλο και μικρότερη, αλλά ποτέ δεν θα μηδενιστεί τελείως.

Παρόμοιο είναι και το παράδοξο της «διχοτομίας». Ένας δρομέας που πρέπει να διατρέξει μία απόσταση ΑΒ κινούμενος σε ευθεία γραμμή από το Α προς το Β. Για να διανύσει την διαδρομή, πρέπει να περάσει πρώτα από το μέσο Β1, δηλαδή να διανύσει την απόσταση ΑΒ1. Για να φθάσει στο Β1 πρέπει να περάσει από το μέσο Β2 του ΑΒ1, και το ίδιο επαναλαμβάνεται συνεχώς. Από το παράδοξο αυτό προκύπτει ότι ο δρομέας όχι μόνο δεν θα φθάσει ποτέ στο τέλος Β, αλλά δεν θα μπορεί επίσης να εγκαταλείψει την αφετηρία.

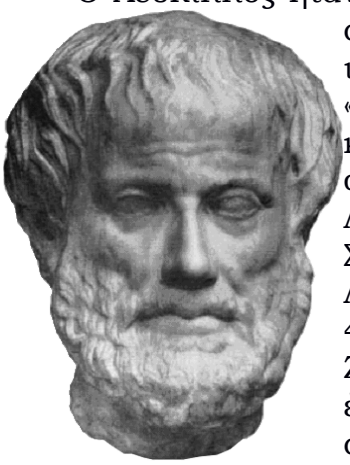
Το λογικό πρόβλημα αναφορικά με την κίνηση που εγείρεται κατά τον Ζήνωνα από τα δύο παράδοξα που περιγράψαμε θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής : στο πρώτο, σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα πρέπει να διανυθεί μια άπειρη ακολουθία διαστημάτων του χώρου, ενώ στο δεύτερο για να διανυθεί ένα πεπερασμένο διάστημα του χώρου πρέπει να παρέλθει μια άπειρη ακολουθία διαστημάτων του χρόνου.

Στα δύο τελευταία (στα οποία δεν θα αναφερθούμε), ο Ζήνων προσπαθεί να καταδείξει το αντιφατικό της κίνησης εάν ο χώρος και ο χρόνος υποτεθούν ότι σύγκεινται από έσχατες αδιαίρετες ψηφίδες (περατοκρατική υπόθεση) και εξετάζει τι θα συμβεί αν υποθέσουμε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα σε χώρο και χρόνο οι οποίοι νοούνται ότι είναι έσχατες αδιαίρετες ψηφίδες.

Ατομική Σχολή

Ο Λεύκιππος, θεωρείται πως ήταν Ελεάτης Φιλόσοφος και ο πρώτος που εισήγαγε αυτό που είναι γνωστό στην επιστημονική κοινότητα ως Ατομική Θεωρία. Στην Θράκη εμφανίζεται επίσημα η Ατομική σχολή με τον Δημόκριτο (460-370 π.χ.), μαθητή του Λεύκιππου. Πρώτος ανακάλυψε την οδό που οδηγεί προς το απειροστικό λογισμό, όπως αναφέρει ο Πλούταρχος και ότι εξέταζε ανά δύο γειτονικά επίπεδα τομών της σφαίρας αν είναι ίσα ή άνισα και συμπέρανε ότι αν είναι ίσα η σφαίρα είναι κύλινδρος αν είναι άνισα δαντελωτή. Γνώριζε να βρίσκει τον όγκο πυραμίδας και κώνου με γεωμετρική μέθοδο.

Λεύκιππος



Ο Λεύκιππος ήταν Έλληνας φιλόσοφος του β' μισού του 5ου π.Χ. αιώνα, ο οποίος υπέθεσε, κατά πληροφορία του ιατροφιλοσόφου Γαληνού (2ος μ.Χ. αιώνας), την «ύπαρξη των ατόμων» και έγινε έτσι εισηγητής και δημιουργός της θεωρίας που στην πρώτη φάση της εξέλιξής της, από τον μαθητή του Λεύκιππου Δημόκριτο ως τον Επίκουρο, τους Στωικούς φιλοσόφους και τον Λουκρήτιο. Ο Λεύκιππος γεννήθηκε στη Μίλητο, άκμασε στα 440/430 π.Χ. περίπου και υπήρξε μαθητής του Ζήνωνος του Ελεάτη. Η ζωή, η καταγωγή, το έργο του Λεύκιππου περιβάλλονται από αναπάντητα ερωτήματα και αμφισβητήσεις, ακόμη από την αρχαιότητα. Οι Επικούρειοι αμφισβητούν την ύπαρξή του, ο Αριστοτέλης ταυτίζει το Δημόκριτο με το Λεύκιππο, ενώ ο Διογένης ο Λαέρτιος ("Βίοι Φιλοσόφων", βιβλίο IX, παρ. 30-33) γράφει ότι:

"Ήταν Ελεάτης, κατ' άλλους Αβδηρίτης και κατ' άλλους Μιλήσιος. Άκουσε το Ζήνωνα".

Γενικά, οι αρχαίοι που δέχονται την ύπαρξη του Λεύκιππου, παραδέχονται ότι στα έργα του "Περί νου" και "Μέγας διάκοσμος" ο Λεύκιππος συνέλαβε τους άξονες της ατομικής θεωρίας, που επεξεργάστηκε στη συνέχεια ο μαθητής του Δημόκριτος. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Λεύκιππος πρώτος, για να εξηγήσει την ποικιλομορφία των όντων, υποστηρίζει την ύπαρξη του κενού που διαχωρίζει τα όντα. Δηλαδή, τις δύο αντίθετες δυνάμεις Φιλότης-Νείκος του Εμπεδοκλή τις αντικαθιστά με το πλήρες και το κενό, που δίνουν μια ποσοτική-επιστημονική διάσταση στο φιλοσοφικό στοχασμό και στην επιστήμη. Αναφέρει ο Διογένης ο Λαέρτιος:

"Το σύνολο των πραγμάτων - τα πάντα, είναι άπειρο και αυτά μεταβάλλονται το ένα στο άλλο. Το παν αποτελείται από κενό και από πλήρες μέρος ατόμων. Οι κόσμοι γίνονται από τα άτομα που πέφτουν στο κενό και περιπλέκονται μεταξύ τους. Από την κίνηση και την ένωση των ατόμων προέρχονται τα άστρα. Ο ήλιος έχει μεγαλύτερη κυκλική τροχιά από τη σελήνη. Πρώτος ο Λεύκιππος θεώρησε τα άτομα ως πρώτες αρχές"

Λευκίππου, "Περί νου"

Ο Λεύκιππος λέγει ότι όλα γίνονται σύμφωνα με την ανάγκη, και υπάρχει η ίδια μοίρα. Γιατί λέγει στο "Περί νου":

"Κανένα πράγμα δε γίνεται μάταια, μα όλα γίνονται και από λόγο και από ανάγκη".

Την αναγκαιότητα δεν συσχέτιζε ο Λεύκιππος με την κίνηση. Ο Λεύκιππος, όπως και ο Πλάτων, δέχεται την ύπαρξη σταθερής και αναλλοίωτης ενέργειας ως δράσης και αντίδρασης, γένεσης και φθοράς, από την οποία εκπηγάζει η κίνηση των ατόμων και των συνδυασμών (σχημάτων) τους (σφαιρών, στερεών, γωνιών, αγκιστροειδών εξογκώσεων).

Παράλληλα με τον ομοιόμορφο, ποιοτικά αδιαίρετο και χωρίς εσωτερική αλλαγή τρόπο ύπαρξης, έκρινε ότι η συνεχής οργανωμένη κίνηση αποτελεί φυσικό και πρωταρχικό χαρακτηριστικό των πραγμάτων που ερμηνεύει την εσωτερική τους δράση. Την κίνηση θεώρησε ως τρόπο ύπαρξης του «κενού».

Τα άτομα και το κενό ενυπάρχουν σε όλα τα πράγματα με απειρία συνδυασμών, οι οποίοι προσδιορίζονται βάσει τριών διαφορών με τις ονομασίες : ρυσμός, διαθιγή και τροπή. Οι συνδυασμοί αυτοί είναι αποτέλεσμα στροβιλώδους κίνησης, συνένωσης ή αποσύνθεσης, σύγκρουσης ή περιπλοκής, η οποία διέπεται από ορισμένες συμμετρίες ή ισορροπίες.

Δημόκριτος

Ο Δημόκριτος γεννήθηκε στα Άβδηρα της Θράκης γύρω στα 460 π.Χ από οικογένεια αριστοκρατικής καταγωγής, δημοκρατικών όμως πεποιθήσεων. Τα Άβδηρα, ανατολικά του ποταμού Νέστου στην ακτή της Θράκης, υπήρξαν ιωνική αποικία που ιδρύθηκε το 654 π.Χ. από κατοίκους των μικρασιατικών Κλαζομενών. Ήταν η τρίτη πλουσιότερη πόλη της Αθηναϊκής Συμμαχίας -έδινε φόρο 15 τάλαντα- και όφειλε τον πλούτο της στην άφθονη παραγωγή σιτηρών και στο γεγονός ότι αποτελούσε λιμάνι για τη διεξαγωγή του εμπορίου με το εσωτερικό της Θράκης. Στα Άβδηρα ο Ξέρξης ξεκούρασε το στρατό του το 480 π.Χ. κατεβαίνοντας προς τη νότια Ελλάδα. Σύμφωνα, μάλιστα, με μια μαρτυρία αυτός που φιλοξένησε τον Ξέρξη στην πόλη ήταν ο πατέρας του Δημόκριτου, αλλά γενικά η ιστορία αυτή θεωρείται από τους μελετητές ως πλαστή: το ανέκδοτο φαίνεται να προέκυψε από μια γενικότερη προσπάθεια σύνδεσης της ελληνικής φιλοσοφίας με την Ανατολή, αφού σύμφωνα μ' αυτό ο Ξέρξης άφησε στον πατέρα του Δημόκριτου κάποιους Μάγους, οι οποίοι μύησαν το Δημόκριτο στα μυστικά δόγματα της «φιλοσοφίας» τους.

Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Δημόκριτος στο Μικρό διάκοσμο, ήταν νέος όταν ο Αναξαγόρας ήταν γέρος. Με βάση αυτό το στοιχείο η ημερομηνία γεννήσεως που παραδίδει ο Απολλόδωρος (80η ολυμπιάδα=460-456 π.Χ.) φαίνεται λογικότερη από άλλες χρονολογίες που μας παραδόθηκαν.

Από τη νεανική του ηλικία ο Δημόκριτος έδειξε την κλίση του προς τη μελέτη και την έρευνα της φύσης. Χαρακτηριστικό είναι το ανέκδοτο που παραδίδει ο Διογένης Λαέρτιος (9, 36) και το οποίο φανερώνει το

βαθμό αφοσίωσης του Δημοκρίτου στο στοχασμό: «(Ο Δημήτριος) αναφέρει ότι ήταν τόσο φιλόπονος, ώστε χώρισε ένα δωμάτιο στον κήπο του σπιτιού και κλείστηκε εκεί μέσα. Όταν κάποτε ο πατέρας του οδήγησε ένα βόδι για να το θυσιάσει και το έδεσε σ' εκείνο το μέρος, ο Δημόκριτος για αρκετή ώρα δεν τον αντιλήφθηκε, έως ότου ο πατέρας του τον σήκωσε με πρόφαση τη θυσία και του ανέφερε τα σχετικά με το βόδι».

Κατά τη μοιρασιά της πατρικής περιουσίας ανάμεσα στο Δημόκριτο και τα δύο αδέρφια του ο πρώτος, σύμφωνα με μια μαρτυρία, προτίμησε να λάβει το μικρότερο μερίδιο σε χρήματα (100 τάλαντα). Αυτά τα χρήματα τα ξόδεψε ταξιδεύοντας σε όλο σχεδόν τον τότε γνωστό κόσμο. Τα ταξίδια του στην Αίγυπτο, την Περσία και τη Βαβυλώνα θεωρούνται σχεδόν σίγουρα, ενώ τα ταξίδια στην Αιθιοπία και την Ινδία είναι λιγότερο βέβαιο ότι πραγματοποιήθηκαν. Όπως αναφέρει και ο ίδιος: «Εγώ, λοιπόν περιπλανήθηκα σε περισσότερους τόπους της γης απ' τους ανθρώπους της εποχής μου, ερευνώντας τα πιο μακρινά μέρη, και γνώρισα πάρα πολλές χώρες και κλίματα και άκουσα πάρα πολλούς μορφωμένους ανθρώπους, αλλά στη σύνθεση σχημάτων που συνοδεύονται από απόδειξη κανείς ως τώρα δε με ξεπέρασε, ούτε ακόμη και αυτοί από τους Αιγυπτίους που ονομάζονται Αρπεδονάπτες. Μαζί και με την παραμονή μου σ' αυτούς, έζησα συνολικά οχτώ χρόνια σε ξένη χώρα».

Στη διάρκεια αυτών των περιπλανήσεων θα πρέπει σίγουρα να επισκέφτηκε τα μεγάλα πνευματικά κέντρα της Ιωνίας, κυρίως την Έφεσο και τη Μίλητο, όπου θα γνώρισε από κοντά τη φιλοσοφία του Θαλή, του Αναξίμανδρου, του Αναξιμένη και του Ηράκλειτου. Στη Μίλητο ίσως να συνάντησε για πρώτη φορά τον άνθρωπο που έμελλε να σημαδέψει η ζωή του, το Λεύκιππο. Απ' αυτόν θα πρέπει να διδάχτηκε τη φιλοσοφία του Παρμενίδη, του Εμπεδοκλή, του Πυθαγόρα. Μάλιστα, για τον τελευταίο θα συντάξει ο Δημόκριτος αργότερα ειδική πραγματεία. Δεν παρέλειψε να επισκεφτεί και το μεγαλύτερο πνευματικό κέντρο της εποχής του, την Αθήνα, φαίνεται όμως ότι η παρουσία του εκεί πέρασε σχετικά απαρατήρητη. Σύμφωνα με μια εκδοχή αυτό αποτελούσε επιλογή του ίδιου του Δημόκριτου, επειδή ένιωθε μεγάλη περιφρόνηση προς τη δόξα. Η επίσκεψη του Δημόκριτου στην Αθήνα ήταν κάτι φυσιολογικό, αφού η πόλη αποτελούσε την πνευματική πρωτεύουσα της Ελλάδας, ενώ και τα Άβδηρα ήταν μέλος της Αθηναϊκής Συμμαχίας. Ίσως, όμως, η εμπόλεμη κατάσταση, στην οποία βρισκόταν τότε η Αθήνα λόγω του Πελοποννησιακού πολέμου, να οδήγησε το Δημόκριτο στην απόφαση να ιδρύσει τη σχολή του στα Άβδηρα. Πάντως, ο φιλόσοφος σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να περιφρονούσε την Αθήνα, αφού ο ίδιος ήταν δημοκρατικός, ενώ πολλές από τις απαντήσεις που έδωσε σε φιλοσοφικά προβλήματα υποβάλλουν την εντύπωση ότι γνώριζε καλά τη φιλοσοφία του Σωκράτη, του Πλάτωνα, του Αντισθένη, του Αρίστιππου και του Αναξαγόρα.

Όταν ο Δημόκριτος επέστρεψε κάποτε στα Άβδηρα, είχε αναλώσει πια όλο το μερίδιό του της πατρικής κληρονομιάς. Τη φροντίδα του και τη συντήρησή του ανέλαβε ο αδερφός του Δάμασος. Ο Δημόκριτος αποδείχτηκε χρήσιμος για τον αδερφό του: σύμφωνα με μια μαρτυρία

προέβλεψε επικείμενη νεροποντή και τον συμβούλεψε να μαζέψει την παραγωγή του από τους αγρούς. Όσοι από τους Αβδηρίτες τον πίστεψαν έσωσαν τις περιουσίες τους, οι άλλοι καταστράφηκαν. Το ανέκδοτο αυτό φαίνεται ότι πλάστηκε, για να απαντήσει στις κατηγορίες ότι η μελέτη της φιλοσοφίας είναι άχρηστη σε πρακτικά ζητήματα της ανθρώπινης ζωής. Το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για την ακόλουθη ιστορία: ο Δημόκριτος προέβλεψε μελλοντική ανατίμηση του λαδιού και αγόρασε όλη την ντόπια ελαιοπαραγωγή πολύ φθηνά. Όταν η ανατίμηση πράγματι έγινε, ο ίδιος απέδωσε τα κέρδη του στους συμπολίτες του, επειδή περιφρονούσε τα πλούτη.

Φαίνεται ότι η εκτίμηση που απολάμβανε ο Δημόκριτος από τους συμπατριώτες του προκάλεσε το φθόνο ορισμένων απ' αυτούς, οι οποίοι σκέφτηκαν να ζητήσουν στην περίπτωση του φιλοσόφου την ενεργοποίηση ενός πατροπαράδοτου νόμου, ο οποίος προέβλεπε την απαγόρευση της ταφής στην πατρίδα όποιου είχε σπαταλήσει την πατρική περιουσία. Ο Δημόκριτος απάντησε διαβάζοντας στους συμπολίτες του το Μέγα διάκοσμο. Το έργο αποτιμήθηκε από τους συμπολίτες του στα 500 τάλαντα, ενώ ορίστηκε να του αφιερωθούν και 20 ανδριάντες από χαλκό. Και η ιστορία αυτή φαίνεται πλαστή, αφού ο Μέγας διάκοσμος πρέπει να είναι έργο του Λεύκιππου. Η δημιουργία της ίσως να αποτελεί και πάλι μια απάντηση στην κατηγορία ότι η μελέτη της φιλοσοφίας είναι άχρηστη: ο Δημόκριτος όχι μόνο δε σπατάλησε την πατρική περιουσία, αλλά την πολλαπλασίασε (από 100 την έκανε 500 τάλαντα), αφού δημιούργησε ένα πολύτιμο φιλοσοφικό έργο.

Στα Άβδηρα ο Δημόκριτος αφοσιώθηκε στη διδασκαλία και τη συγγραφή των έργων του. Η προκοπή του στη σοφία ήταν τέτοια, ώστε αποκλήθηκε Σοφία ή Φιλοσοφία.

Φαίνεται ότι πέθανε σε πολύ προχωρημένη ηλικία, αφού κατατασσόταν στους μακροβιότερους Έλληνες στοχαστές. Διάφορες πηγές παραδίδουν ότι έζησε από 90 ως και 109 χρόνια. Δε γνωρίζουμε την ακριβή χρονολογία του θανάτου του, η οποία τοποθετείται συμβατικά στο 370 ή 360 π.Χ.

Τα έργα του Δημόκριτου

Τα ενδιαφέροντα του Δημόκριτου ήταν εξαιρετικά πλατιά. Ασχολήθηκε σχεδόν με όλους τους τομείς της ανθρώπινης γνώσης: μαθηματικά, φυσική, κοσμολογία, αστρονομία, βιολογία, γεωλογία, γεωγραφία, λογική, ηθική, θεολογία, αισθητική, ιστορία, παιδεία. Από αυτήν την άποψη υπήρξε κατά κάποιο τρόπο πρόδρομος του Αριστοτέλη, ένας καθολικός νους, ένα πνεύμα εγκυκλοπαιδικό. Μεταγενέστεροι μελετητές του στην αρχαιότητα (ίσως ήδη ο Καλλίμαχος) χώρισαν το έργο του σε δεκατρείς τετραλογίες, ενταγμένες σε πέντε ομάδες έργων: τα ηθικά (δύο τετραλογίες), τα φυσικά (τέσσερις τετραλογίες), τα μαθηματικά (τρεις), τα μουσικά (δύο), τα τεχνικά (δύο). Σ' αυτές τις τετραλογίες πρέπει να προστεθούν εννιά αταξινόμητα έργα και εννιά που φέρουν τον τίτλο Αιτίαι, σύνολο 70 έργα. Κατάλογο των έργων του μας παραδίδει ο Διογένης Λαέρτιος, ενώ κάποιοι επιπλέον τίτλοι σώζονται στη Σούδα, το Σέξτο και τον Απολλώνιο Δύσκολο.

Από τα αποδιδόμενα στο Δημόκριτο έργα είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο Μέγας διάκοσμος ήταν στην πραγματικότητα έργο του Λεύκιππου. Η πληροφορία αυτή προέρχεται από την Περιπατητική Σχολή και μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη, αφού έχει την αφετηρία της στις ειδικές πραγματείες για το Δημόκριτο, που συνέταξαν τόσο ο Αριστοτέλης όσο και ο Θεόφραστος. Ο πρώτος που επινόησε την ατομική θεωρία, ή την δέχτηκε από το δάσκαλό του Λεύκιππο, για να τη διαμορφώσει και να την επεκτείνει σε όλα τα φυσικά φαινόμενα, θεμελιώνοντας τη θεωρία επιστημονικά, και ανοίγοντας τις πύλες στις Φυσικές επιστήμες. Στο Λεύκιππο αποδίδεται από τον Αέτιο και ένα άλλο έργο, το Περί νου. Δεν έχουμε λόγους να αμφιβάλλουμε γι' αυτήν την πληροφορία. Το περιεχόμενο του έργου μπορεί να αποτελούσε μια επίθεση κατά της αναξαγόρειας θεωρίας για το Νου που διακοσμεί τα πράγματα.

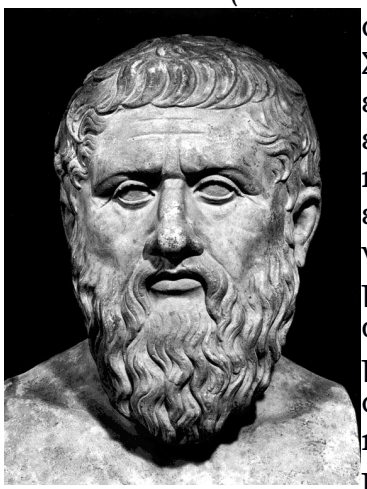
Αν κρίνουμε από τον αριθμό των έργων του Δημόκριτου, η συγγραφική του δραστηριότητα πρέπει να εκτεινόταν σε μια μεγάλη χρονική περίοδο. Δεν μπορούμε, ωστόσο, να αποδώσουμε διαφορετικά έργα σε διαφορετικές περιόδους της ζωής του, αφού κανένα απ' αυτά τα έργα δε σώθηκε ακέραιο. Ούτε και η δήλωσή του ότι έγραψε το Μικρό διάκοσμο 730 χρόνια μετά την πτώση της Τροίας (απ. Ι) μας βοηθά ιδιαίτερα στη χρονολόγηση του έργου, αφού αγνοούμε πότε τοποθετούσε τον τρωικό πόλεμο ο φιλόσοφος.

Το ύφος του Δημόκριτου επαινούνταν πολύ στην αρχαιότητα και αξιολογούνταν στο ίδιο επίπεδο μ' αυτό του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Ήταν ποιητικό, αν και όχι σε στίχο, γοργό και με διαυγή εκφραστικά μέσα, διακρινόταν για τη μορφική του τελειότητα, την εύστοχη χρήση των λέξεων και τη σαφήνεια.

Από τον τεράστιο όγκο των γραπτών του σώζονται ελάχιστα αποσπάσματα, κυρίως ηθικού περιεχομένου, τα οποία ανευρίσκονται σε μεταγενέστερους συγγραφείς ως παραθέματα ή παραφράσεις. Κύριες πηγές μας για τη φιλοσοφία του είναι ο Αριστοτέλης, ο Θεόφραστος, ο Σέξτος ο Εμπειρικός, ο Αλέξανδρος από την Αφροδισιάδα, ο Ιωάννης Φιλόπονος, ο Σιμπλίκιος. Οι ερμηνείες της φιλοσοφίας του Δημόκριτου, οι οποίες δίνονται απ' αυτούς τους συγγραφείς, αποτελούν οδηγό και για τη σύγχρονη έρευνα. Η τελευταία πρέπει πάντα να είναι προσεκτική κυρίως στην περίπτωση του Αριστοτέλη (και των σχολιαστών του), αφού ο τελευταίος έχει την τάση να παρουσιάζει τις απόψεις των προγενεστέρων του φιλοσόφων μέσα από το πρίσμα της δικής του τελολογικής φιλοσοφίας.

Πολλοί προσπάθησαν να εξηγήσουν το λόγο, για τον οποίο χάθηκαν τα έργα του Δημόκριτου. Άλλοι απέδωσαν την απώλεια στην τύχη, άλλοι στους Επικούρειους, οι οποίοι θα ωφελούνταν από την απώλεια του έργου του Δημόκριτου, καθώς μ' αυτόν τον τρόπο δε θα ήταν πια φανερή η έλλειψη πρωτοτυπίας της θεωρίας τους. Άλλοι θεώρησαν την απώλεια συνέπεια της κακής φήμης που είχε ο Δημόκριτος ως πρόδρομος των Επικουρείων. Η τρίτη εκδοχή φαίνεται πλησιέστερη στην αλήθεια, αφού ως γνωστόν χάθηκε και το έργο των ίδιων των Επικουρείων.

Ο Κόσμος των Ιδεών
Πλάτων



Ο Πλάτων (427 π.Χ. - 347 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος από την Αθήνα, ο πιο γνωστός μαθητής του Σωκράτη και δάσκαλος του Αριστοτέλη. Το έργο του με τη μορφή φιλοσοφικών διαλόγων έχει σωθεί ολόκληρο (του αποδίδονται ακόμα και μερικά νόθα έργα) και άσκησε τεράστια επιρροή στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία και γενικότερα στη δυτική φιλοσοφική παράδοση μέχρι τις ημέρες μας. Κύριος οικοδόμος της φιλοσοφίας, οδηγητής είτε προάγγελος μεταγενεστέρων προβάσεών της, εμπνευστής άμεσα ή έμμεσα των σπουδαιότερων κοινωνικοπολιτικών οραματισμών. Ο Πλάτων, μεταξύ άλλων, έγραψε την *Απολογία του Σωκράτους*, η οποία θεωρείται ως μια σχετικά ακριβής καταγραφή της απολογίας του Σωκράτη στη δίκη που τον καταδίκασε σε θάνατο, το *Συμπόσιο* όπου μιλά για τη φύση του έρωτα,, τον «Πρωταγόρα» όπου μεταξύ άλλων θεμελιώνεται θεωρητικά η αρχή της «πρόληψης» που δεν λαμβάνει την ποινή ως απολύτως «ανταποδοτική», τον «Παρμενίδη» και τον «Θεαίτητο» όπου θεμελιώνει την αντικειμενικότητα του λόγου και της ιδέας, ενώ σε δύο μακρούς διαλόγους, την *Πολιτεία* και τους *Νόμους*, περιέγραψε την ιδανική πολιτεία.

Πληροφορίες για τη ζωή του Πλάτωνος αντλούμε κυρίως από αρχαίες βιογραφίες. Σημαντικότερες θεωρούνται εκείνες του Απουλήιου (*De platone et eius dogmate*, 2ος αι. μ.Χ.), του Διογένη Λαέρτιου (*Βίοι καὶ γνῶμαι τῶν ἐν φιλοσοφίᾳ εὐδοκιμησάντων*) και του Ολυμπιόδωρου (*Βίος Πλάτωνος*, 6ος αι. μ.Χ.). Όπως παραδίδεται από τη βιογραφική παράδοση, γεννήθηκε το 427 π.Χ. στην Αθήνα ή, κατά τον Διογένη, στην Αίγινα. Καταγόταν από εύπορη αριστοκρατική αθηναϊκή οικογένεια. Πατέρας του ήταν ο Αρίστων, από το γένος του βασιλιά Κόδρου, και μητέρα του η Περικτιόνη, η οποία ήταν αδερφή του Χαρμίδη, ενός από τους Τριάκοντα τύραννους, και ανιψιά του Κριτία, επίσης μέλος των Τριάκοντα, με καταγωγή από το γένος του νομοθέτη Σόλωνος. Αδέρφια του ήταν οι Αδείμαντος και Γλαύκων. Το πρώτο του όνομα ήταν Αριστοκλής, αλλά αργότερα ονομάστηκε Πλάτων επειδή είχε ευρύ στέρνο και πλατύ μέτωπο. Όταν ο πατέρας του πέθανε, η Περικτιόνη παντρεύτηκε το θείο της, Πυρίλαμπη, ο οποίος συνδεόταν φιλικά με τον Περικλή. Ο Πλάτων γνώρισε τον Σωκράτη σε ηλικία 20 ετών και έμεινε κοντά του μέχρι τον θάνατο του μεγάλου δασκάλου (399 π.Χ.).

Μετά τη θανάτωση του Σωκράτη παρέμεινε στην Αθήνα για περίπου τρία χρόνια και κατόπιν κατέφυγε στα Μέγαρα, κοντά στον συμμαθητή του Ευκλείδη και άλλους σωκρατικούς. Ύστερα γύρισε στην Αθήνα, όπου για 10 χρόνια ασχολήθηκε με τη συγγραφή φιλοσοφικών έργων, τα οποία φέρουν τη σφραγίδα της σωκρατικής φιλοσοφίας. Στη συνέχεια εικάζεται πως ταξίδεψε στην Αίγυπτο και στην Κυρήνη, όπου σχετίστηκε με τον μαθηματικό Θεόδωρο, ωστόσο τα στοιχεία που διαθέτουμε για το ταξίδι αυτό θεωρούνται επισφαλή. Αντιθέτως,

βεβαιότητα υπάρχει για τα ταξίδια του στη Σικελία και στην Κάτω Ιταλία. Στον Τάραντα 387 π.Χ. γνώρισε τους πυθαγόρειους, από τη φιλοσοφική σκέψη των οποίων επηρεάστηκε αποφασιστικά. Στην αυλή του βασιλιά των Συρακουσών Διονυσίου του πρεσβύτερου γνώρισε τον βασιλικό γυναικάδελφο Δίωνα, με τον οποίον συνδέθηκε φιλικά. Η φιλία όμως αυτή προκάλεσε τις υποψίες του Διονυσίου για συνωμοσία, γι' αυτό έδιωξε τον Πλάτωνα από τη Σικελία. Στην Αίγινα οδηγήθηκε προς πώληση σε σκλαβοπάζαρο όπου ο Κυρηναίος φίλος του Αννίκερις εξαγόρασε την ελευθερία του.

Επιστρέφοντας στην Αθήνα ίδρυσε τη φιλοσοφική σχολή του, την Ακαδημία (περ. 387 π.Χ.). Το 367 π.Χ ο Διονύσιος Β' ο νεότερος διαδέχτηκε τον Διονύσιο Α' στην εξουσία. Με προτροπή του Δίωνα, ο Διονύσιος προσκάλεσε τον Πλάτωνα ως σύμβουλό του και εκείνος αποδέχτηκε την πρόσκληση με την ελπίδα πως θα εφάρμοζε τα πολιτικά του ιδεώδη. Ταξίδεψε στις Συρακούσες το 366 ωστόσο σύντομα επήλθε ρήξη με τους άλλους συμβούλους του βασιλιά. Ο Δίων εξορίστηκε και ο Πλάτωνας παρέμεινε στην αυλή του Διονύσιου ως φιλοξενούμενος και αιχμάλωτος μέχρι το 365. Για τρίτη φορά ήρθε στην αυλή των Συρακουσών το 362, μετά τη συμφιλίωση του Δίωνα με τον Διονύσιο, ωστόσο νέες προστριβές μεταξύ τους οδήγησαν τον Πλάτωνα στην απόφαση να εγκαταλείψει τις Συρακούσες το 361. Επέστρεψε στην Αθήνα όπου μέχρι το θάνατό του ασχολήθηκε με τη διδασκαλία και με τη συγγραφή φιλοσοφικών έργων. Μέχρι τον 1ο αιώνα π.Χ, [Νεότερη περίοδος] υπό την διεύθυνση του Αντίοχου του Ασκαλωνίτη η Ακαδημία αποτελούσε το κέντρο της πλατωνικής φιλοσοφίας. Στις αρχαίες βιογραφικές πηγές διακρίνονται ετερόκλητες κρίσεις για το χαρακτήρα του Πλάτωνα, καθώς σε ορισμένες παρουσιάζεται ως σοφός και θείος (θεϊκός), ενώ άλλες τον περιγράφουν ως υπερόπτη και ζηλόφθονο υπηρέτη των τυράννων, που σχεδίασε εσφαλμένα την εικόνα του Σωκράτη και των σοφιστών

Το συγγραφικό έργο του Πλάτωνα είναι αρχικά μνήμη και φήμη, εξιδανικευτική, του βίου και του θανάτου και του ήθους του Σωκράτη, αλλά και ανάπτυξη, ευμέθοδη και πολύπτυχη της διδασκαλίας του, πιστή ως κάποιο βαθμό στο πνεύμα του. Τα έργα του Πλάτωνα (36) εκτός από την *Απολογία* και τις *Επιστολές* είναι γραμμένα σε μορφή διαλόγου. Ως κεντρικό πρόσωπο στους διαλόγους, εκτός από έναν, τους Νόμους, παρουσιάζεται ο Σωκράτης, ακόμη και όταν σε κάποιον διάλογο σαν να παραμερίζεται σε θέση ακροατή. Σε κανένα διάλογο δεν εμφανίζεται ο ίδιος ο Πλάτων. Οι συζητήσεις ονομάζονται με το όνομα ιστορικά υπαρκτών προσώπων και μόνο σε τρεις διαλόγους της τελευταίας περιόδου: στον Σοφιστή, στον Πολιτικό και στους Νόμους εμφανίζεται ως κύριος συζητητής δίχως μνεία ονόματος ο «Ελεάτης Ξένος» στον πρώτο, ο «Ξένος» στο δεύτερο, ο «Αθηναίος Ξένος» στον τρίτο. Στον Πλάτωνα αποδίδονται και 13 επιστολές, η γνησιότητα των οποίων γενικά αμφισβητείται, εκτός από την Ζ' Επιστολή όπου περιγράφει ο Πλάτωνας τη δραστηριότητά του στη Σικελία.[16] Και στη συγγραφή ο φιλόσοφος μιμήθηκε τη διδασκαλία του Σωκράτη, ο οποίος δίδασκε διαλογικά. Οι διάλογοί του επιγράφονται συνήθως με το όνομα κάποιου από τα διαλεγόμενα πρόσωπα, π.χ. *Τίμαιος*, *Γοργίας*, *Πρωταγόρας* κ.λπ. Έξι

μόνο διάλογοι, το *Συμπόσιον*, η *Πολιτεία*, ο Σοφιστής, ο Πολιτικός, οι *Νόμοι* και η Επινομίς τιτλοφορούνται από το περιεχόμενό τους. Στους παλαιότερους διαλόγους διατηρεί την εικόνα του πραγματικού Σωκράτη, ενώ στους νεότερους, όπως εικάζουν οι φιλόλογοι, κάτω από το πρόσωπο του δάσκαλου κρύβεται ο ίδιος ο μαθητής.

Στον Πλάτωνα αποδίδονται περί τα τριάντα επιγράμματα της Παλατινής Ανθολογίας, πολλά από τα οποία αμφισβητούμενα. Γεγονός πάντως είναι ότι ο φιλόσοφος στα νιάτα του έγραψε αρκετά ποιήματα, τα οποία όμως έκαψε όταν γνώρισε τον Σωκράτη και εξόρισε τους ποιητές από την Πολιτεία του.

Θα αναφερθούμε στην συνέχεια με λίγα λόγια στο φιλοσοφικό σύστημα του Πλάτωνα, το οποίο αποτελεί κατά τον Δ. Αναπολιτάνο την κορυφαία στιγμή της αρχαίας ελληνικής σκέψης, όχι γιατί αυτό παρέμεινε σταθερό και αναλλοίωτο κατά την διάρκεια των αιώνων , αλλά γιατί για πρώτη φορά η διάσταση ανάμεσα στα όντα και στην γνώση που έχουμε γι' αυτά τέθηκε με τόσο δραματικό τρόπο.

Αυτό που απασχόλησε έντονα τον Πλάτωνα ήταν το γεγονός οτι μπορούμε στο νου μας να συλάβουμε μια τέλεια εικόνα για μία ιδέα, π.χ. την ιδέα του Ωραίου, όμως στον κόσμο που μας περιβάλλει, στον κόσμο που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας, δεν υπάρχει κάτι που να πραγματώνει το απόλυτο Ωραίο. Τίποτα στον περιβάλλοντα κόσμο δεν είναι τέλειο όπως είναι στον κόσμο των ιδεών.

Έτσι ο Πλάτωνας αποδέχεται δύο είδη κόσμων: «**ο κόσμος των Ιδεών**» και «**ο κόσμος του Γίγνεσθαι**». Ο πρώτος περιέχει τα τέλεια είδη τις Ιδέες, όπως το Αγαθό, η Δικαιοσύνη, το Καλό, η Ομορφιά με τις οποίες συγκρίνουμε τα αντικείμενα του δεύτερου κόσμου, του φυσικού κόσμου που μας περιβάλλει. Αν στο αντικείμενο αναγνωρίσουμε τις παραπάνω Ιδέες, αν δηλαδή το αντικείμενο μοιάζει ή μετέχει της Ιδέας τότε προσεγγίζει την Ιδέα του Καλού, του Ωραίου κ.λ.π. Έτσι ενώ έχουμε την κατανόηση των τέλειων Μορφών-Ιδεών αυτές δεν τις βρίσκουμε στον φυσικό κόσμο.

Τα περιεχόμενα του δεύτερου κόσμου, τα φυσικά αντικείμενα υπόκεινται σε διαρκή αλλαγή και φθορά. Ο κόσμος βρίσκεται σε μία συνεχή μεταβολή και ροή όπως διακύρηξε ο Ηράκλειτος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα και τα δεδομένα των αισθήσεων να αλλάζουν οπότε θα πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί με τα συμπεράσματα που βγάζουμε στηριζόμενοι μόνο σ' αυτά. Πραγματική γνώση δεν μπορούμε να έχουμε μέσω των αισθήσεών μας.

Για τον Πλάτωνα ο **Κόσμος των Ιδεών** είναι ο **πραγματικός** κόσμος και ό φυσικός κόσμος που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας είναι μια **ατελής προσέγγιση** του πρώτου.

Το δε αντικείμενο των Μαθηματικών για τον Πλάτωνα είναι το τμήμα του κόσμου των Ιδεών που περιέχει τις Αριθμητικές και Γεωμετρικές Ιδέες. Ειδικά για την Γεωμετρία ο Πλάτωνας αναφέρεται σε σημεία χωρίς διάσταση, τέλειες ευθείες γραμμές που δεν έχουν πλάτος και τέλειους κύκλους.

Πως όμως ο Πλάτωνας έφτασε στην σύλληψη της έννοιας της Ιδέας όπως την περιγράψαμε παραπάνω;

Ήδη οι φιλόσοφοι και μαθηματικοί πριν τον Πλάτων είχαν έρθει αντιμέτωποι με μία έννοια που είναι η πιο δύσκολη αλλά ταυτόχρονα και δημιουργική στην ιστορία των Μαθηματικών. Η έννοια του απείρου, είτε αφορά το απείρως μικρό είτε το απείρως μεγάλο.

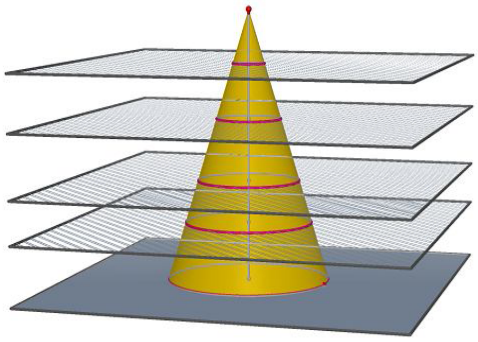
Ένα θέμα ζωτικής σημασίας πού αποτέλεσε αντικείμενο διαμάχης μεταξύ των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων ήταν η δομή του μικρόσμου. Η καθημερινή εμπειρία έδειχνε ότι αν πάρουμε ένα πήλινο αγγείο και το πετάξουμε θα σπάσει σε καμια δεκάδα περίπου κομμάτια. Αν όμως το κτυπήσουμε επανελειμένως με ένα βαρύ αντικείμενο, θα το κονιορτοποιήσουμε σε δεκάδες χιλιάδες σωματίδια σκόνης. Υπάρχει λοιπόν όριο στην διαιρετότητα των υλικών σωματιδιών;

Ορισμένοι φιλόσοφοι, με πρώτο τον Αναξαγόρα που διατύπωσε την συναφή με το άπειρο έννοια της συνέχειας, δέχτηκαν ότι η ύλη είναι επ' άπειρον διαιρετή. Ο Αναξαγόρας πίστευε ότι το συνεχές δεν είναι δυνατόν να αποτελείται από διακριτά στοιχεία «χωρισμένα μεταξύ τους, σαν να είναι αποκομμένα με πελέκι»

Η άλλη σχολή επηρεάστηκε από τούς Πυθαγορείους οι οποίοι υποστήριζαν ότι ο κόσμος αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς ως δομικά υλικά. Οι ιδέες αυτές αναπτύχθηκαν όπως είδαμε από τον Λεύκιππο και τον Δημόκριτο που κατέληξαν ότι ο κόσμος αποτελείται από ελάχιστα αδιαίρετα σωματίδια τα ***άτομα.***

Την αντίθεση ανάμεσα στις δύο σχολές ήρθε να οξύνει στα μέσα του 5^{ου} αιώνα π.Χ. ο Ζήνων ο Ελεάτης, ο οποίος κατέδειξε τις παράδοξες συνέπειες στις οποίες φτάνει κανείς αν δεχτεί αβασάνιστα την επ' άπειρον διαίρεση του χρόνου και του χώρου. Έτσι μετά το Ζήνωνα άρχισε προοδευτικά μια περίοδος όπου η έννοια του απείρου εξαλείφθηκε από τα μαθηματικά.

Στον Δημόκριτο οφείλεται η απελπισμένη προσπάθεια να καταργηθούν οι άπειρες διαδικασίες. Προσπάθησε να θεμελιώσει τη γεωμετρία στο πλαίσιο της ατομικής θεωρίας του. Όμως η ασυμμετρία της κάθετης πλευράς του ορθογωνίου τριγώνου και της υποτείνουσας που είχαν ήδη ανακαλύψει οι Πυθαγόρειοι δεν θα μπορούσε να υπάρξει αν η κάθετη πλευρά και η υποτείνουσα αποτελούνταν από ένα πεπερασμένο πλήθος αδιαίρετων μερών. Ο Δημόκριτος είχε αντιληφθεί σε βάθος τη σημασία και τη δυσκολία της έννοιας του απειροελάχιστου. Αυτό προκύπτει από ένα ενδιαφέρον παράδοξο, γνωστό ως «**παράδοξο του κώνου**» Ας τμήσουμε μέσω ενός επιπέδου παραλλήλου προς την βάση, ένα κώνο σε δύο μέρη. Οι δύο κύκλοι – που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της τομής, στα δύο μέρη (στον άνω μικρότερο κώνο και τον κάτω κόλουρο) – είναι ίσοι ή άνισοι; Αν είναι άνισοι τότε αφού το ίδιο θα ισχύει και για κάθε άλλη παρόμοια τομή, η κυρτή επιφάνεια του κώνου να μην είναι λεία αλλά κλιμακωτή˙ αν, ωστόσο, οι δύο κύκλοι είναι ίσοι, δεν θα σήμαινε για το ίδιο λόγο, ότι όλες οι παράλληλες τομές είναι ίσες και άρα ο κώνος είναι κύλινδρος.



Ήδη ο Πρωταγόρας είχε προβάλλει προβάλλει ενστάσεις για το ότι μια πραγματική σφαίρα που ηρεμεί στο επίπεδο δεν έχει ένα σημείο επαφής με αυτό, αλλά μια ολόκληρη μικρή περιοχή "σχεδόν" επαφής. Πως αντιμετώπισε αυτά τα προβλήματα και το παράδοξο του κώνου ο Δημόκριτος; Ο μεγάλος νομπελίστας φυσικός και θεμελιωτής της κβαντομηχανικής Ε. Schrödinger, στηριζόμενος σε μια παρατήρηση του Σιμπλίκιου, ο οποίος αναφέρει ότι κατά τον Δημόκριτο τα φυσικώς αδιαίρετα άτομά του, ήταν υπό την μαθηματική έννοια απείρως διαιρετά, λέει στο βιβλίο του "Η Φύση και οι Έλληνες", ότι ο Δημόκριτος «έχει καταλήξει σε μια σαφή διάκριση μεταξύ, αφενός των γεωμετρικών εννοιών ενός στερεού και αφετέρου των, περισσότερο ή λιγότερο , ατελών πραγματώσεων αυτών των εννοιών μέσω ή επί ενός φυσικού σώματος. Εκατό χρόνια αργότερα **ο Πλάτωνας συμπεριέλαβε την πρώτη κατηγορία στις ''Ιδέες'' του˙ πολύ περισσότερο η κατηγορία αυτή αποτέλεσε, όπως πιστεύω, το αρχέτυπο των ''Ιδεών'' του** και κατ' αυτόν τον τρόπο το όλο ζήτημα αναμίχθηκε με τη Μεταφυσική».

Στο παραπάνω απόσπασμα ο Schrodinger δίνει ένα πολύ πειστικό πλαίσιο των προβλημάτων και αναζητήσεων που είχε ο Πλάτωνας αρχικά και που τον βοήθησε να καταλήξει στην σύλληψη της έννοιας της Πλατωνικής Ιδέας. Μία πολλή ενδιαφέρουσα ανάλογη πρόταση αναφέρει ο Σ. Νεγρεπόντης. Παραθέτουμε αυτούσιο το σχετικό απόσπασμα:

«Υπάρχει μια επίπτωση της ύπαρξης ασύμμετρων προς την κατεύθυνση της φιλοσοφίας, η οποία μετά τα όσα έχουμε ήδη αναφέρει, είναι ιδιαίτερα προσβάσιμη, και θα είναι κρίμα να την προσπεράσουμε, καθώς είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Το γεγονός ότι η επιστήμη των Μαθηματικών είναι σε θέση, με την αφηρημένη σκέψη, να ανακαλύπτει οντότητες που δεν συναντώνται στην ορατή, αισθητή πραγματικότητα, όπως για παράδειγμα τους άρρητους αριθμούς, οδήγησε τους αρχαίους 'Έλληνες στο φιλοσοφικό συμπέρασμα ότι πίσω και υπεράνω της αισθητής πραγματικότητας υπάρχει η νοητή. Αυτή είναι η βάση της Πλατωνικής φιλοσοφίας, που είχε και εξακολουθεί να έχει μια τεράστια επίδραση στην ανθρώπινη σκέψη. Ο Πλάτων, βαθιά επηρεασμένος από τα Μαθηματικά, πίστευε στην ύπαρξη των Ιδεών, νοητών οντοτήτων ανωτέρων από τον αισθητό κόσμο στον οποίο ζούμε. Θα προσπαθήσω να σας περιγράψω τόσο τη μαθηματική φύση αυτών των Ιδεών, καθώς και τη στενή σχέση τους με πράγματα σύγχρονα.

Η έννοια που θα προσπαθήσουμε να σας περιγράψουμε είναι αυτή της Μονάδας. Τι είναι μονάδα; Λέμε συχνά 'μονάδα μέτρησης', π.χ. στα χρήματα έχουμε ως μονάδα 'το ένα ευρώ', το οποίο όμως υποδιαιρείται σε 100 λεπτά. Έτσι η πραγματική μονάδα χρημάτων είναι το ένα λεπτό, το οποίο δεν υποδιαιρείται σε καμιά μικρότερη μονάδα. Το σημείο στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε είναι ότι όταν λέμε ότι κάτι είναι μονάδα, εννοούμε, με κάποια έννοια, ότι αυτή η Μονάδα είναι αδιαίρετη. Ποια όμως είναι αυτή η έννοια;

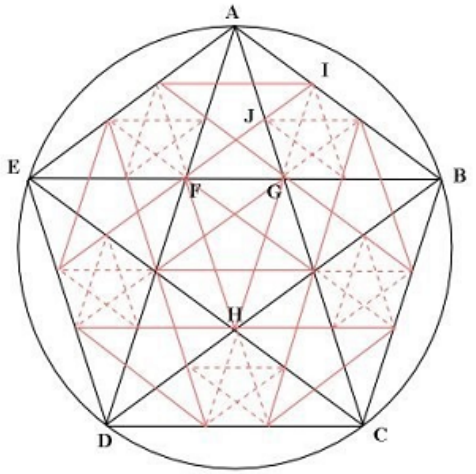
Αναζητούμε μια ενοποιητική οντότητα που ελέγχει και καθοδηγεί τον αισθητό κόσμο, ο οποίος χαρακτηρίζεται από έλλειψη ενότητας, από ποικιλία και κατακερματισμό.

Έτσι αναζητούμε ένα αντικείμενο που συγχρόνως κατακερματίζεται (ώστε να είναι σε θέση να περιγράψει όλη την ποικιλία των αισθητών φαινομένων) και παραμένει ενωμένο (ώστε να αξίζει της ονομασίας Μονάδα). Αυτό φαίνεται αληθινά κάτι το παράδοξο, και ασφαλώς δεν έχουμε κάτι αντίστοιχο στον κόσμο που ζούμε. Όμως αν σκεφθούμε μπορεί να βρούμε μια σοβαρή προσέγγιση σε μια τέτοια έννοια της Μονάδας, στο DNA κάθε ζώντος οργανισμού. Ο μεν ζων οργανισμός μπορεί να τεμαχισθεί σε πολλά μέρη, πολύ διαφορετικά το ένα από το άλλο, όμως κάθε μέρος, σχεδόν όσο μικρό και αν είναι, έχει ακριβώς το ίδιο DNA.
Ακόμη και μια λεπτή ανθρώπινη τρίχα περιέχει όλο το DNA, από όπου θεωρητικά τουλάχιστον είναι δυνατόν να επιχειρηθεί η πλήρης ανασύσταση του ατόμου με κλωνοποίηση. Έτσι η πανταχού παρουσία του DNA στον διαιρούμενο σε πολλά μέρη ζώντα οργανισμό δρα ενοποιητικά. Βέβαια η διαίρεση ενός ζώντος οργανισμού δεν μπορεί να προχωρήσει επ' άπειρον, καθώς μετά από κάποιο στάδιο διαίρεσης θα αναγκασθούμε να διαιρέσουμε το ίδιο το DNA.

Την Πλατωνική Ιδέα θα πρέπει να την φαντασθούμε ως μια τέλεια τέτοια μονάδα.

Είναι μια Μονάδα που έχει πολλά, άπειρα το πλήθος, μέρη, κάθε ένα όμως μέρος είναι όπως το όλο—και με αυτή την έννοια η Ιδέα είναι αδιαίρετη. Βέβαια ένα τέτοιο αντικείμενο θα μπορούσε κάποιος να το σκεφθεί μόνο αν προϋπήρχε το μαθηματικό μοντέλο.
Τίθεται έτσι το ερώτημα: προϋπήρχε άραγε ένα τέτοιο μαθηματικό μοντέλο στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά?

Θέλω να σας προτείνουμε ότι η χρυσή τομή, που εξετάσαμε παραπάνω, είναι ακριβώς ένα τέτοιο μοντέλο, στην πιο απλή μορφή του.



Σύμφωνα με την Πρόταση 11 του τέταρτου βιβλίου των Στοιχείων, η διάμετρος και η πλευρά του κανονικού πενταγώνου ευρίσκονται σε σχέση χρυσής τομής.

Στο κανονικό πεντάγωνο γίνεται εμφανής η αυτό-ομοιότης της χρυσής τομής (όπως τόνισε ο von Fritz, στην εργασία του [F]): Το αρχικό πεντάγωνο δημιουργεί ένα μικρότερο πεντάγωνο, και αυτό ένα μικρότερο, επ' άπειρον, ώστε κάθε μέρος του πενταγώνου είναι το ίδιο με το όλον.

Και άρα κάθε μέρος της χρυσής τομής είναι, με αντίστοιχη έννοια, το ίδιο όπως το όλον

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, αναφέρουμε μόνο ότι και τα περίφημα παράδοξα του Ζήνωνος (όπως εκείνο του Αχιλλέα και της χελώνας) ερμηνεύονται με βάση την αυτό-ομοιότητα».

Πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει η κοσμογονία του Πλάτωνος, που εκτίθεται στον διάλογο «Τίμαιος». Εκεί ο Πλάτων δεν εμφανίζεται ως αστρονόμος ή ως μαθηματικός ή ως φυσικός, αλλά ως φιλόσοφος, που χρησιμοποιεί για τη θεωρία του τις κατά την εποχή του γνώσεις στα Μαθηματικά, την Αστρονομία και την Φυσική. Η επίδραση των Πυθαγορείων στις Πλατωνικές θεωρίες είναι καταφανής. Η όλη αστρονομική θεωρία στηρίζεται στην επινόηση του μεγάλου μαθηματικού της Ακαδημίας, του Ευδόξου του Κνιδίου. Οι αστρονόμοι της εποχής εκείνης είχαν παρατηρήσει ανωμαλίες στις τροχιές των πλανητών Ερμή και Αφροδίτης. Κατά την παράδοση ο Πλάτων ανέθεσε στον Εύδοξο να βρει γεωμετρικό τόπο, κατά τον οποίο να ερμηνεύονται οι φαινόμενες αυτές ανωμαλίες. Ο Εύδοξος κατόρθωσε με το σύστημα των ομόκεντρων σφαιρών να ερμηνεύσει τις ανωμαλίες των κινήσεων του Ερμή και της Αφροδίτης.

Μετά την ίδρυση της Ακαδημίας μέχρι και το θάνατό του ο Πλάτωνας αναγνωρίζοντας την σπουδαιότητα της Γεωμετρίας, ως προπαίδεια, για την κατανόηση της Φιλοσοφίας, έδωσε τις κατευθύνσεις συνεργαζόμενος με σπουδαίους μαθηματικούς, για την ανάπτυξή της. Ένα πολύ μεγάλο μέρος από αυτά που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης για το έργο του είναι αποτελέσματα αυτών των ερευνών.

Στο υπέρθυρο της Ακαδημίας υπήρχε η επιγραφή: *«**Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω μου την στέγην**»*, δηλαδή δεν επιτρεπόταν να φοιτήσει κάποιος στην Ακαδημία, εάν δεν γνώριζε Γεωμετρία, τουτέστιν Μαθηματικά. Όταν κάποιος νέος εξέφρασε την επιθυμία να παρακολουθήσει μαθήματα στην Ακαδημία, ο Ξενοκράτης, ο οποίος υπήρξε μετά τον Πλάτωνα και το Σπεύσιππο διευθυντής της Ακαδημίας, τον ρώτησε, εάν γνωρίζει Γεωμετρία. Στην αρνητική απάντηση του είπε: *«Πορεύου· λαβάς γαρ ουκ έχεις φιλοσοφίας»*, δηλαδή *«πήγαινε, δεν έχεις την απαιτούμενη προπαίδεια, για να μάθεις Φιλοσοφία»*. (Διογένης, Λ. IV, 10.)

Ότι ο Πλάτων πίστευε βαθύτατα, ότι, για να ασχοληθεί κάποιος με την Φιλοσοφία, πρέπει να γνωρίζει Μαθηματικά, φαίνεται εκ του ότι στους περισσότερους διαλόγους του έχει μνημονεύσει πολλές μαθηματικές προτάσεις.

Πλησιάζουμε στο τέλος του ταξιδιού (ή μήπως είναι η αρχή του...)
Ευκλείδης

Ο **Ευκλείδης** από την Αλεξάνδρεια (~325 π.Χ. - 265 π.Χ.), ήταν Έλληνας μαθηματικός, που δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, περίπου κατά την διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ (~325 π.Χ. - 283 π.Χ.). Το όνομα του Ευκλείδη είναι συνώνυμο με την γεωμετρία. Στις μέρες μας είναι γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης δεν ήταν ακριβώς ένας μεγάλος καινοτόμος αλλά κυρίως οργανωτής που συστηματοποίησε και έθεσε σε στέρεες θεωρητικές βάσεις τα συμπεράσματα στα οποία έφτασαν ο Θαλής, ο Εύδοξος και άλλες φωτεινές διάνοιες της εποχής. Ο Ευκλείδης είχε την ικανότητα να ανασυντάξει τις αποδείξεις των θεωρημάτων σε σύντομους αυστηρούς όρους.

Το πιο γνωστό έργο του είναι τα «**Στοιχεία**», που αποτελείται από 13 βιβλία. Τα Στοιχεία είναι ένα από τα πιο σημαντικά έργα στην ιστορία των μαθηματικών. Έχουν χρησιμοποιηθεί σαν βάση για την γεωμετρική εκπαίδευση όλης της Δύσης για τα τελευταία 2000 χρόνια. Εκεί, οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και των ακεραίων αριθμών προκύπτουν από ένα σύνολο αξιωμάτων, εμπνέοντας την αξιωματική μέθοδο των μοντέρνων μαθηματικών. Παρ' ότι πολλά από τα θεωρήματα που περιέχονταν στα Στοιχεία ήταν ήδη γνωστά, ένα από τα επιτεύγματα του Ευκλείδη ήταν ότι τα παρουσίασε σε ένα ενιαίο, λογικά συμπαγές πλαίσιο. Το έργο του Ευκλείδη ήταν τόσο σημαντικό ώστε η γεωμετρία που περιέγραψε στα Στοιχεία του (η βάση της οποίας είναι: έστω μία ευθεία ε και ένα σημείο Α όχι πάνω σε αυτήν την ευθεία, τότε υπάρχει μόνο μία ευθεία, παράλληλη της ε, που διέρχεται από το Α ονομάστηκε Ευκλείδεια, ενώ τα Στοιχεία σήμερα θεωρούνται ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών. Στα δεκατρία βιβλία των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης παρουσιάζει όλη την στοιχειώδη Ελληνική γεωμετρική γνώση. Περιλαμβάνει θεωρήματα και σύνταξη της επίπεδης και στερεάς γεωμετρίας, μαζί με την θεωρία των αναλογιών, συμμετριών, αριθμών και έναν τύπο γεωμετρικής άλγεβρας. Δεν ήταν ο μόνος που έγραψε στοιχεία γεωμετρίας. Υπήρχαν και άλλοι πριν από αυτόν όπως ο Ιπποκράτης από τη Χίο και άλλοι. Ωστόσο τα έργα του Ευκλείδη αναγνωρίστηκαν γρήγορα ως ανώτερα. Δεν είναι γνωστό κατά πόσο όλα τα θεωρήματα ήταν δικά του. Υπάρχουν επιρροές από τον Θαλή, τον Ιπποκράτη και τον Πυθαγόρα. Παρόλα αυτά η διαμόρφωση των στοιχείων είναι αποκλειστικά δική του. Γενικότερα στο χώρο διακρίνουμε τα σημεία (χωρίς καμία διάσταση), τις γραμμές (με μία διάσταση) και τις επιφάνειες (με δύο διαστάσεις). Άλλα έργα του εκτός από τα στοιχεία είναι τα «δεδομένα», τα «τμήματα των αριθμών», τα «φαινόμενα» και τα «οπτικά».

Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό σχετικά με την ζωή του Ευκλείδη εκτός από αυτά που αναφέρονται στα βιβλία του και ελάχιστες βιογραφικές πληροφορίες που προέρχονται από αναφορές τρίτων. Αν και

υπάρχουν αμφιβολίες λέγεται ότι μαθήτευσε στην ακαδημία του Πλάτωνα και έμεινε εκεί μέχρις ότου ο Πτολεμαίος Ά τον προσκάλεσε να διδάξει στο νέο του πανεπιστήμιο στην Αλεξάνδρεια. Εκεί ο Ευκλείδης ίδρυσε τη μαθηματική σχολή του και έμεινε μέχρι το τέλος της ζωής του και ήταν ενεργό μέλος της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Φημίστηκε στην πόλη της Παλλάδα για τις μαθηματικές του εργασίες, ο λόγος που προσκλήθηκε από τον Πτολεμαίο Ά στην Αλεξάνδρεια. Οι μέθοδοι διδασκαλίας του είχαν εμπνευστεί από αυτές του Αρχιμήδη. Είχε τη φήμη ότι ήταν δίκαιος, υπομονετικός, έντιμος και ευγενικός. Παρόλα αυτά ήταν και σαρκαστικός:

Μια ιστορία λέει ότι ένας από τους σπουδαστές του παραπονέθηκε ότι δεν είχε κανένα κέρδος από τα μαθηματικά που μάθαινε. Τότε ο Ευκλείδης κάλεσε γρήγορα στο σκλάβο του για να δώσει στο αγόρι ένα νόμισμα επειδή "έπρεπε να κερδίσει από αυτά που μαθαίνει."

Μια άλλη ιστορία λέει ότι ο Πτολεμαίος τον ρώτησε εάν υπάρχει κάποιος ευκολότερος τρόπος να μάθει γεωμετρία απ' ό,τι με την εκμάθηση όλων των θεωρημάτων. Ο Ευκλείδης απάντησε ότι «δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος στη γεωμετρία» και έστειλε το βασιλιά στη μελέτη.

Στα στοιχεία, υπάρχουν ελλιπείς περιοχές που συμπλήρωσαν οι επόμενοι μαθηματικοί. Επιπλέον έχουν βρεθεί κάποιες αμφισβητήσιμες ιδέες. Οι πιο γνωστή είναι αυτά στο πέμπτο αξίωμα του, επίσης γνωστό ως παράλληλο αξίωμα. Η πρόταση δηλώνει ότι για μια ευθεία γραμμή και ένα σημείο έξω από τη γραμμή, υπάρχει μόνο μια γραμμή που περνά μέσω του σημείου παράλληλη στην αρχική γραμμή. Ο Ευκλείδης δεν μπόρεσε να αποδείξει αυτήν την δήλωση και επειδή το χρειαζόταν για τις περαιτέρω αποδείξεις του, το υπέθεσε σαν αληθινό. Οι μελλοντικοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να δεχτούν ότι μια τέτοια δήλωση δεν έχει αποδειχθεί και ξόδεψαν πολλά χρόνια ψάχνοντας την απόδειξη η οποία όμως δεν έχει βρεθεί μέχρι σήμερα. Εντούτοις, παρά αυτά τα προβλήματα, ο Ευκλείδης κρατά τη διάκριση ως ένα από τα πρώτα πρόσωπα που προσπάθησαν να τυποποιήσουν τα μαθηματικά και τα καθορίσουν επάνω σε ένα ίδρυμα των αποδείξεων. Η εργασία του ενέργησε ως αφετηρία για τις μελλοντικές γενεές. Η διάρκεια της ζωής του, όπως και ο τόπος γέννησής του μας παραμένουν άγνωστα. Κατά τον Μεσαίωνα, πολλοί δυτικοί συγγραφείς τον ταύτισαν λανθασμένα με έναν κατά ένα αιώνα προγενέστερο Σωκρατικό φιλόσοφο, αποκαλώντας τον Ευκλείδη από τα Μέγαρα.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία θεμελιώνεται σύμφωνα με τις αρχές και τα αξιώματα που καθιέρωσε ο Ευκλείδης. Σήμερα, η Ευκλείδεια Γεωμετρία θεμελιώνεται με αυστηρότερο τρόπο, με ένα «σύνολο» αξιωμάτων που πρότεινε ο Γερμανός μαθηματικός D. Hilbert (1862-1943).

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Μετά το θάνατο του Μεγάλου Αλεξάνδρου στα 323 π.Χ., η αχανής μακεδονική αυτοκρατορία διαιρέθηκε σε τρεις περιοχές. Η περιοχή πού περιλάμβανε την Αίγυπτο περιήλθε κάτω από την άξια ηγεμονία του ικανού στρατηγού του Αλεξάνδρου Πτολεμαίου του Σωτήρος, ο οποίος σύντομα κέρδισε τη βασιλεία της περιοχής. Ο Πτολεμαίος επέλεξε για

πρωτεύουσα της περιοχής του την Αλεξάνδρεια, λίγα μόνο μίλια από τις εκβολές του ποταμού Νείλου και γύρω στα 300 π.Χ. άνοιξε τις πόρτες του περίφημου πανεπιστημίου της Αλεξάνδρειας. Ανάμεσα στους μελετητές που κλήθηκαν να επανδρώσουν το νέο ίδρυμα ήταν και ο μαθηματικός Ευκλείδης, που πιθανότατα υπήρξε μαθητής της Ακαδημίας του Πλάτωνα στην Αθήνα.

Ο Ευκλείδης, από τη στιγμή που ανέλαβε τα καθήκοντα του στην Αλεξάνδρεια, όρισε ανάμεσα στους στόχους του τη συγκρότηση του μνημειώδους και ιστορικά σημαντικού έργου του, των Στοιχείων. Αυτή η

αξιόλογη και εκτεταμένη εργασία, γραμμένη σε δεκατρία βιβλία ή μέρη, αποτελεί την αρχαιότερη εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου που έχει φτάσει στα χέρια μας. Θεωρείται ο πρώτος μεγάλος σταθμός στην ιστορία της οργάνωσης των μαθηματικών και η μετέπειτα επίδραση της στον επιστημονικό τρόπο γραφής πολύ δύσκολα μπορεί να περιγραφεί.

Ο Πρόκλος, ένας κατοπινός σχολιαστής των μαθηματικών που έζησε στον 5ο αιώνα, έχει δώσει μια εξήγηση της έννοιας του όρου «στοιχεία». Τα στοιχεία μιας αποδεικτικής μελέτης είναι τα πιο σημαντικά θεωρήματα ή τα θεωρήματα κλειδιά που χρησιμοποιούνται συχνά και πλατιά στο αντικείμενο της μελέτης· είναι τα θεωρήματα που χρειάζονται για την απόδειξη όλων ή των περισσότερων από τα άλλα θεωρήματα. Η λειτουργία τους συγκρίνεται με αυτή των γραμμάτων του αλφαβήτου σε σχέση με τη γλώσσα· τα γράμματα στα ελληνικά ονομάζονται και στοιχεία. Η επιλογή των προτάσεων που θα λειτουργήσουν ως στοιχεία κάποιου θέματος μελέτης απαιτεί μεγάλη ικανότητα και κρίση από το συγγραφέα.

Δεν υποτιμά καθόλου την αίγλη του έργου του Ευκλείδη το γεγονός ότι είχαν προηγηθεί ανάλογες προσπάθειες. Σύμφωνα με τον Πρόκλο η πρώτη προσπάθεια να γραφτούν Στοιχεία έγινε από τον Ιπποκράτη το Χίο στα μέσα του πέμπτου π.Χ. αιώνα. Η επόμενη προσπάθεια ήταν του Λέοντα που χρονολογικά τοποθετείται κάπου ανάμεσα στον Πλάτωνα και τον Εύδοξο. Όπως μαθαίνουμε, η εργασία του Λέοντα περιείχε μια μεγαλύτερη και πιο χρήσιμη επιλογή προτάσεων

από τον Ιπποκράτη. Το βιβλίο που χρησιμοποιούνταν στην Ακαδημία του Πλάτωνα είχε επιμεληθεί ο Θεύδιος από τη Μαγνησία και θεωρούνταν μια θαυμάσια συλλογή στοιχείων. Η εργασία του Θεύδιου ήταν ασφαλώς ο άμεσος πρόδρομος της εργασίας του Ευκλείδη, ο οποίος την είχε χωρίς αμφιβολία στη διάθεση του, ειδικά αν, όπως πιστεύουν, σπούδασε στην Ακαδημία του Πλάτωνα.

Ο Ευκλείδης γνώριζε επίσης την εργασία του Θεαίτητου και του Εύδοξου. Δεν είναι καθόλου υποτιμητικό ότι η εργασία του Ευκλείδη αποτελεί σε μεγάλο βαθμό συγκέντρωση και επιμέλεια των εργασιών των προγενεστέρων του, αφού η ουσιαστική αξία των Στοιχείων βρίσκεται ακριβώς στην τέλεια επιδεξιότητα με την οποία επιλέχτηκαν και τοποθετήθηκαν σε λογική σειρά οι προτάσεις, ξεκινώντας από μια μικρή ομάδα αρχικών υποθέσεων. Ούτε είναι υποτιμητικό το. γεγονός ότι η εξονυχιστική μελέτη των σύγχρονων κριτικών έχουν αποκαλύψει ορισμένα μειονεκτήματα στη δομή της εργασίας του Ευκλείδη· δε θα μπορούσε κανείς να περιμένει μια τέτοια αρχική και κολοσσιαία προσπάθεια με την αξιωματική μέθοδο να μην παρουσιάζει καμία ατέλεια.

Δε σώζεται κανένα αντίγραφο των Στοιχείων από την εποχή του ίδιου του Ευκλείδη. Όλες οι σύγχρονες εκδόσεις στηρίζονται σε μια επανέκδοση που έκανε ο Θεωνάς από την Αλεξάνδρεια, ένας Έλληνας σχολιαστής που έζησε εφτακόσια περίπου χρόνια μετά τον Ευκλείδη. Μόνο στις αρχές του 19ου αιώνα ανακαλύφθηκε ένα παλιότερο αντίγραφο. Στα 1808, όταν ο Ναπολέοντας διέταξε να μεταφερθούν όλα τα αξιόλογα χειρόγραφα από τις ιταλικές βιβλιοθήκες στο Παρίσι, ο Φ. Πέιραρντ (F. Peyrard) ανακάλυψε στη βιβλιοθήκη του Βατικανού ένα αντίγραφο των Στοιχείων από έκδοση προγενέστερη από του Θεωνά. Η μελέτη όμως αυτής της παλιότερης έκδοσης αποκάλυψε δευτερεύουσες μόνο διαφορές από τον Θεωνά.

Οι πρώτες πλήρεις μεταφράσεις των Στοιχείων στα λατινικά δεν έγιναν από τα ελληνικά αλλά από τα αραβικά. Τον 8ο αιώνα οι Άραβες μετέφρασαν έναν αριθμό βυζαντινών χειρογράφων με ελληνικές εργασίες και στα 1120 ο Άγγλος μελετητής Άντελαρντ (Adelard) από το Μπαθ μετέφρασε τα Στοιχεί στα λατινικά χρησιμοποιώντας μια απ' αυτές τις παλιότερες αραβικές μεταφράσεις. Άλλες λατινικές μεταφράσεις από τα αραβικά έκαναν ο Γκεράρντο από την Κρεμώνα (Gherardo, 1114-1187) και, 150 χρόνια μετά τον Άντελαρντ, ο Γιοχάννες Καμπάνους (Johannes Campanus). Η πρώτη τυπωμένη έκδοση των Στοιχείων έγινε στη Βενετία στα 1482 η έκδοση αυτή ήταν η μετάφραση του Καμπάνους. Αυτό το πολύ σπάνιο βιβλίο ήταν θαυμάσια τυπωμένο και ήταν το πρώτο αξιόλογο μαθηματικό βιβλίο που τυπώθηκε. Μια σημαντική λατινική μετάφραση από τα ελληνικά έγινε από τον Κομμαντίνο (Commandino) στα 1572. Αυτή η μετάφραση χρησιμοποιήθηκε ως βάση για πολλές άλλες μεταφράσεις που ακολούθησαν ανάμεσα σ' αυτές και η εργασία του Ρόμπερτ Σίμσον (Robert Simson) που άσκησε σημαντική επιρροή και αποτέλεσε με τη σειρά της τη βάση για πάρα πολλές αγγλικές εκδόσεις.

Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός Αντριέν-Μαρί Λεζάντρ (Adrien-Marie Legendre, 1752-1833), γνωστός στην ιστορία των μαθηματικών

κυρίως από τις εργασίες του πάνω στη θεωρία αριθμών, τις ελλειπτικές συναρτήσεις, τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων και τα ολοκληρώματα, ενδιαφερόταν επίσης για παιδαγωγικά ζητήματα. Στο πολύ γνωστό έργο του Elements de geometric [Στοιχεία γεωμετρίας] προσπάθησε να πετύχει μια παιδαγωγική βελτίωση των Στοιχείων του Ευκλείδη, κάνοντας μια αναδιάταξη και απλοποίηση των προτάσεων του Ευκλείδη σε μεγάλη έκταση. Η εργασία αυτή έγινε ευνοϊκά δεκτή στην Αμερική και αποτέλεσε στη χώρα αυτή το πρότυπο για τα γεωμετρικά βιβλία. Πραγματικά, η πρώτη αγγλική μετάφραση της γεωμετρίας του Λεζάντρ έγινε στα 1819 από τον Τζων Φαράρ (John Farrar) του Πανεπιστημίου του Χάρβαρντ. Τρία χρόνια αργότερα μια άλλη αγγλική μετάφραση έγινε από το διάσημο φιλόλογο Τομάς Καρλάιλ (Thomas Carlyle) ο οποίος σ' ένα πρώιμο στάδιο της ζωής του ήταν καθηγητής μαθηματικών. Η μετάφραση του Καρλάιλ, που αργότερα αναθεωρήθηκε από άλλους, έκανε 33 εκδόσεις στην Αμερική. Μέχρι πολύ πρόσφατα, τα περισσότερα βιβλία γεωμετρίας της μέσης εκπαίδευσης στην Αμερική ήταν διαμορφωμένα σύμφωνα με την αναθεώρηση του Λεζάντρ.

Στην έκδοση του Θεωνά, τα Στοιχεία περιλαμβάνουν δεκατρία βιβλία ή μέρη και περιέχουν συνολικά 465 προτάσεις. Αντίθετα με την εντύπωση που επικρατεί, ένα μεγάλο μέρος του υλικού αφορά όχι τη γεωμετρία αλλά τη στοιχειώδη θεωρία αριθμών και την ελληνική άλγεβρα.

Το Βιβλίο Ι αρχίζει με τους απαραίτητους αρχικούς ορισμούς και τις επεξηγήσεις, τα αιτήματα και τα αξιώματα (Σημ. 2). Αν και σήμερα οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν τις λέξεις «αξίωμα» και «αίτημα» σαν συνώνυμα, οι αρχαίοι Έλληνες έκαναν κάποια διάκριση που υιοθέτησε και ο Ευκλείδης' σύμφωνα μ' αυτή, αξίωμα φαίνεται πως είναι μια αρχική υπόθεση που, είναι κοινή σε όλα τα πεδία μελέτης, ενώ το αίτημα είναι μια αρχική υπόθεση ειδικά για το συγκεκριμένο αντικείμενο μελέτης. Ανάμεσα στις προτάσεις του Βιβλίου Ι βρίσκονται τα γνωστά θεωρήματα για την ισότητα τριγώνων, τις παράλληλες ευθείες και τα ευθύγραμμα σχήματα. Οι προτάσεις 47 και 48, οι δύο τελευταίες προτάσεις του βιβλίου, περιέχουν το πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του, και μας θυμίζουν μια ιστορία που λέγεται για τον Άγγλο φιλόσοφο Τομάς Χομπς (Thomas Hobbes, 1588-1679). Μια μέρα που άνοιξε τα Στοιχεία του Ευκλείδη και έπεσε κατά τύχη πάνω στο θεώρημα του Πυθαγόρα, ο Χομπς αναφώνησε: «Μα το Θεό, αυτό είναι αδύνατο!» και προχώρησε στην ανάγνωση των αποδείξεων του Βιβλίου Ι με αντίστροφη σειρά. Όταν όμως έφτασε στα αξιώματα και τα αιτήματα, τότε πραγματικά πείστηκε.

Το Βιβλίο ΙΙ, ένα μικρό βιβλίο με 14 μόνο προτάσεις, ασχολείται κυρίως με τη γεωμετρική άλγεβρα της σχολής των πυθαγορείων. Έχουμε ήδη αναφέρει στη Διάλεξη 4 ότι οι προτάσεις 12 και 13 αυτού του βιβλίου είναι ουσιαστικά η γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος, που σήμερα είναι γνωστή ως νόμος των συνημίτονων.

Το Βιβλίο ΙΙΙ, με 39 προτάσεις, περιέχει τα γνωστά θεωρήματα σχετικά με κύκλους, χορδές, τέμνουσες, εφαπτόμενες και μετρήσεις γωνιών, θεωρήματα που βρίσκουμε στα σύγχρονα βιβλία γεωμετρίας της μέσης εκπαίδευσης. Το Βιβλίο IV, με 16 μόνο προτάσεις, ασχολείται με

την κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, ορισμένων κανονικών πολυγώνων, την εγγραφή τους σε δεδομένο κύκλο και την περιγραφή τους γύρω από δεδομένο κύκλο.

Το Βιβλίο V, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη διάλεξη, παρουσιάζει με άψογο τρόπο τη θεωρία της αναλογίας του Εύδοξου. Το βιβλίο αυτό θεωρείται ένα από τα αριστουργήματα της μαθηματικής βιβλιογραφίας. Αν θυμόμαστε την προηγούμενη διάλεξη, η ανάγνωση αυτού του βιβλίου θεράπευσε τον Μπολτζάνο από την κατάπτωση από την οποία υπέφερε ενώ βρισκόταν σε διακοπές στην Πράγα. Το Βιβλίο VI, ένα από τα πιο πλούσια βιβλία των Στοιχείων, εφαρμόζει τη θεωρία του Εύδοξου στη μελέτη όμοιων σχημάτων.

Τα Βιβλία VII, VIII και IX, που περιέχουν συνολικά 102 προτάσεις, ασχολούνται με τη στοιχειώδη θεωρία αριθμών. Το Βιβλίο VII αρχίζει με τη διαδικασία που σήμερα είναι γνωστή ως αλγόριθμος του Ευκλείδη, με την οποία βρίσκουμε το μέγιστο κοινό ακέραιο διαιρέτη δύο ή περισσότερων ακεραίων. Στο ίδιο βιβλίο υπάρχει επίσης μια παρουσίαση της αρχαίας θεωρίας των αναλογιών των πυθαγορείων. Το Βιβλίο VIII αναφέρεται κυρίως σε συνεχείς αναλογίες και στις σχετικές με αυτές γεωμετρικές προόδους. Αν έχουμε τη συνεχή αναλογία α:β = β:γ = γ:δ, τότε οι αριθμοί α, β, γ, δ αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Στο Βιβλίο IX υπάρχουν πολλά σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας αριθμών. Η Πρόταση IX 14 είναι ισοδύναμη με το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής, που λέει ότι κάθε ακέραιος μεγαλύτερος από το 1 μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών με έναν και ουσιαστικά μόνο έναν τρόπο. Στην Πρόταση IX 20 βρίσκουμε μια μοναδικά κομψή απόδειξη για το γεγονός ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο. Η Πρόταση IX 35 παρέχει μια γεωμετρική παραγωγή του τύπου που δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου, και η τελευταία πρόταση του βιβλίου, η IX 36, αποδεικνύει ένα σημαντικό τύπο που δίνει άρτιους τέλειους αριθμούς.

Το Βιβλίο X, ένα δύσκολο στην ανάγνωση βιβλίο, ασχολείται με άρρητους, δηλαδή με ευθύγραμμα τμήματα που είναι ασύμμετρα ως προς κάποιο δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Τα άλλα τρία βιβλία, τα XI, XII και XIII αναφέρονται στη στερεομετρία και καλύπτουν ένα μεγάλο μέρος της ύλης, με εξαίρεση τη σφαίρα, που συνήθως υπάρχει στα σύγχρονα βιβλία του σχολείου.

Η ύλη που υπάρχει σήμερα στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας του επιπέδου και του χώρου είναι σε μεγάλο βαθμό αυτή που βρίσκουμε στα βιβλία I, III, IV, VI, XI και XII του Ευκλείδη. Η ύλη των σύγχρονων σχολικών βιβλίων που αναφέρεται στη μέτρηση του κύκλου και της σφαίρας και η ύλη της στερεομετρίας που αναφέρεται στα σφαιρικά τρίγωνα έχουν μεταγενέστερη προέλευση και δεν περιέχονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα καταγράφοντας τα αξιώματα και τα αιτήματα του Ευκλείδη.

Τα αιτήματα

1. Από κάθε δύο σημεία μπορούμε να φέρουμε ευθεία γραμμή.
2. Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθύγραμμα.

3. Με οποιοδήποτε σημείο ως κέντρο και με οποιαδήποτε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.
4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
5. Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δυο άλλες ευθείες γραμμές έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε, όταν οι δύο ευθείες προεκταθούν απεριόριστα, θα συναντηθούν από εκείνο το μέρος όπου σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες.

Τα αξιώματα ή οι κοινές έννοιες

1. Πράγματα που είναι ίσα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα.
2. Αν ίσα προστεθούν με ίσα, τότε το άθροισμα θα είναι ίσα.
3. Αν ίσα αφαιρεθούν από ίσα, τότε τα υπόλοιπα θα είναι ίσα.
4. Πράγματα που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο, είναι ίσα μεταξύ τους.
5. Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.

Παρατηρήστε ότι τα τρία πρώτα αιτήματα περιορίζουν τις κατασκευές σε εκείνες που μπορούν να γίνουν με διαβήτη και αβαθμολόγητο κανόνα. Για το λόγο αυτόν τα δύο αυτά εργαλεία λέγονται συχνά ευκλείδεια εργαλεία και οι κατασκευές που γίνονται με αυτά λέγονται ευκλείδειες κατασκευές. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε τις κατασκευές ως θεωρήματα ύπαρξης, για να αποδείξει δηλαδή την πραγματική ύπαρξη ορισμένων οντοτήτων. Έτσι μπορεί κανείς να ορίσει τη διχοτόμο μιας δεδομένης γωνίας ως μια γραμμή του επιπέδου της γωνίας η οποία περνά από την κορυφή της γωνίας και τη διαιρεί σε δύο ίσες γωνίες. Ο ορισμός όμως δεν εγγυάται την ύπαρξη αυτού που ορίζεται — αυτό απαιτεί απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι μια γωνία έχει πραγματικά διχοτόμο, πρέπει να αποδείξουμε ότι μπορούμε να την κατασκευάσουμε. Τα θεωρήματα ύπαρξης είναι πολύ σημαντικά στα μαθηματικά και η πραγματική κατασκευή μιας οντότητας είναι ο πιο ικανοποιητικός τρόπος απόδειξης της ύπαρξης της. Μπορεί κανείς να ορίσει έναν τετραγωνικό κύκλο ως ένα σχήμα που είναι ταυτόχρονα τετράγωνο και κύκλος, αλλά δεν μπορεί ποτέ να αποδείξει την ύπαρξη του η κλάση των τετραγωνικών κύκλων δεν έχει μέλη. Στα μαθηματικά είναι καλό να ξέρουμε πως το σύνολο των στοιχείων που ικανοποιούν κάποιον ορισμό δεν είναι το κενό σύνολο.

Το γεγονός ότι υπάρχουν κατασκευές που γίνονται και με εργαλεία άλλα από τα ευκλείδεια έχει προσδώσει ζωντάνια σ' αυτό το μέτωπο της γεωμετρίας. Επίσης οι άκαρπες προσπάθειες να πραγματοποιηθούν κατασκευές που σήμερα γνωρίζουμε πως δεν μπορούν να γίνουν με αυτά τα εργαλεία οδήγησε στην ανακάλυψη ενός μεγάλου και ενδιαφέροντος μέρους της γεωμετρίας.

Αργότερα το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη οδήγησε το 19ο αιώνα σε αποτελέσματα τεράστιας σημασίας για την ανάπτυξη των μαθηματικών. Ο Κ. Κέισερ (Cassius J. Keyser) έχει χαρακτηρίσει το αίτημα αυτό ως «την πιο φημισμένη μεμονωμένη πρόταση στην ιστορία της επιστήμης».

Βιβλιογραφία

Αναπολιτάνος,Δ.: Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, Αθήνα, Εκδόσεις Νεφέλη, 1985.
Hanson,V.D. & Heath,J.: Ποιος σκότωσε τον Όμηρο, μτφρ. Ρ.Καρακατσάνη, Αθήνα, Εκδόσεις Κάκτος, 1999.
Schrödinger,Ε.: Η φύση και οι Έλληνες, μτφρ. Δρ Θ. Γραμμένος, Αθήνα, Εκδόσεις Π. Τραυλός - Ε.Κωσταράκη Ο.Ε., 1995.
Szabó,A.: Απαρχαί των ελληνικών μαθηματικών, μτφρ. Α. Τεγοπούλου, Αθήνα, Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, 1973.
Τσιμπουράκης,Δ.: Μαθηματικές μετρήσεις στην Αρχαία Ελλάδα, Αθήνα, Εκδόσεις Αίολος,2002.
Vilenkin,N.Ya.: Αναζητώντας το άπειρο, μτφρ. Α. Μουζακίτης & Γ. Μπούκης, Αθήνα, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 1997.
Waerden,B.L. van der: Η αφύπνιση της επιστήμης, μτφρ. Γ.Χριστιανίδης, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

Άλλες πηγές

Κολλινιάτη,Γ.: ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ "Ο Κονστρουκτιβισμός ως θεωρία της Διδακτικής των Μαθηματικών σε αντίθεση με το μαθηματικό ρεαλισμό (Πλατωνισμό)"
Χριστιανίδης Γιάννης, Δημήτρης Διαλέτης, Γεώργιος Παπαδόπουλος, Κώστας Γαβρόγλου: *Οι Επιστήμες στην Αρχαία Ελλάδα, στο Βυζάντιο, και στο Νεώτερο Ελληνισμό*, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο-Σπουδές στον Ελληνικό Πολιτισμό Ελληνική Φιλοσοφία και Επιστήμη- Αθήνα 2001

Ιστότοποι

http://el.wikipedia.org/wiki
http://grmath4.phpnet.us/index.htm
http://www.evprattein.gr/index.php/2011-06-13-09-23-01/104-2011-06-10-13-11-21