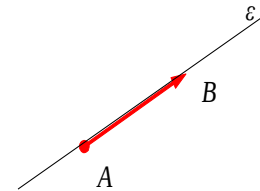


1. Εισαγωγή – Βασικοί Ορισμοί

- **Διάνυσμα** ορίζεται να είναι ένα **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται **διατεταγμένα**.

Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.

- Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.
- Το διάνυσμα με αρχή το B και πέρας το A συμβολίζεται με $\overrightarrow{BA}$.



Είναι προφανές ότι $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου βάζοντας ένα βελάκι από πάνω τους πχ. $\vec{a}, \vec{\beta}, \dots, \vec{u}, \vec{v}, \dots$.

- **Φορέας** του $\overrightarrow{AB}$ καλείται η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.
Το σύνολο όλων των ευθειών που είναι παράλληλες σε μια δοσμένη ευθεία λέμε ότι ορίζουν μια **διεύθυνση**. Η διεύθυνση αυτή είναι ορισμένη, αν δοθεί μια οποιαδήποτε από τις παράλληλες ευθείες η οποία λέγεται και αντιπρόσωπος της διεύθυνσης.
Σε καθεμία από τις ευθείες που έχουν την ίδια διεύθυνση διακρίνουμε δύο φορές.
Η μια θεωρείται αυθαίρετα ως η θετική φορά οπότε, η άλλη θα θεωρείται ως η αρνητική.
- **Μέτρο ή μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καλείται η απόσταση των άκρων του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.
- Επομένως θα ισχύει ότι: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$
- Ένα διάνυσμα $\vec{a}$ θα καλείται μοναδιαίο αν και μόνο αν έχει μέτρο 1.
- **Μηδενικό** καλείται το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό. Επομένως το μηδενικό διάνυσμα είναι στην πραγματικότητα ένα σημείο.
- Αν το διάνυσμά μας είναι το μηδενικό τότε εφόσον η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν θα έχει μέτρο 0. Επομένως $|\vec{0}| = 0$.
- Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$

Προσοχή:

Επομένως για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ θα ισχύει: $|\vec{a}| \geq 0$ με $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

- Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το Α.
- Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\vec{a}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ, τότε λέμε ότι το $\vec{a}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\vec{a} // \zeta$.
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, θα λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\vec{a} // \vec{\beta}$.

Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα:

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, λέγονται **ομόρροπα** όταν και μόνο όταν:
 - α. έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που ενώνει τις αρχές τους ή
 - β. έχουν τον ίδιο φορέα και η μία από τις ημιευθείες περιέχει την άλλη.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, λέγονται **αντίρροπα**, όταν και μόνο όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

Προσοχή:

Για να αναφερθούμε σε ομόρροπα ή αντίρροπα διανύσματα, είναι απαραίτητο αυτά να είναι $\vec{a}$ συγγραμμικά. Σε κάθε άλλη περίπτωση οι προηγούμενοι χαρακτηρισμοί δεν έχουν κανένα νόημα.

2. Ισότητα Διανυσμάτων

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται **ίσα** όταν και μόνο όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση (είναι ομόρροπα) και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\vec{a} = \vec{\beta}$.

Όλα τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ.

$$\text{Δηλαδή: } \vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \\ |\vec{a}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$$

Για την ισότητα των διανυσμάτων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες (που χαρακτηρίζουν όλες τις σχέσεις ισοδυναμίας):

- $\vec{a} = \vec{a}$ (ανακλαστική)
- Αν $\vec{a} = \vec{\beta}$ τότε και $\vec{\beta} = \vec{a}$ (συμμετρική)
- Αν $\vec{a} = \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ τότε $\vec{a} = \vec{\gamma}$ (μεταβατική)

Προσοχή:

- Αν τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ δεν έχουν τον ίδιο φορέα τότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow$ (το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο)
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow$ (τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο)
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta} & (\text{εναλλαγή μέσων}) \\ \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A} & (\text{εναλλαγή άκρων}) \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} & (\text{εναλλαγή θέσεων μέσα στο διάνυσμα}) \end{cases}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$ (τα σημεία Α και Γ ταυτίζονται)
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ (τα σημεία Α και Β ταυτίζονται)
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$ (το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ)

Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται **αντίθετα**, όταν και μόνο όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση (είναι αντίρροπα) και ίσα μέτρα.

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε $\vec{a} = -\vec{\beta}$

$$\text{Δηλαδή: } \vec{a} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \\ |\vec{a}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$$

Προσοχή:

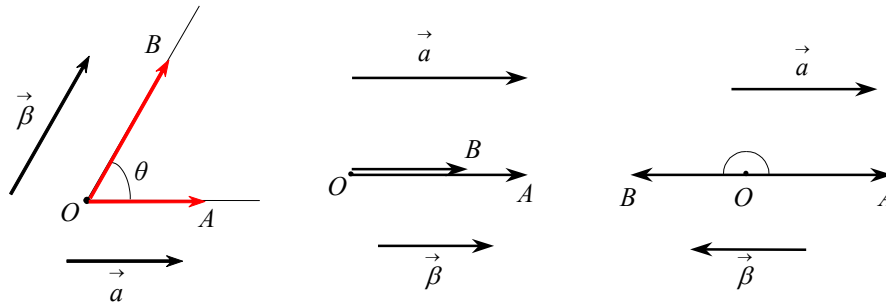
Προφανώς ισχύει:

- $-\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$
- $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$
- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

3. Γωνία Διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Με αρχή ένα σημείο O (αυθαίρετο και σταθερό) παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.



Την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$** και τη συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{\beta})$ ή $(\vec{\beta}, \vec{a})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ .

Η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O .

Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι :

- $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \theta \leq \pi$
- $\theta = 0$, αν και μόνο αν $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$.
- $\theta = \pi$, αν και μόνο αν $\vec{a} \updownarrow \vec{\beta}$.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$, αν και μόνο αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. (τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** μεταξύ τους).

Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$.

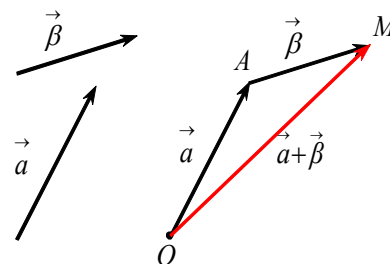
Άρα το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι παράλληλο, ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

4. Πρόξεις Διανυσμάτων

4.1. Πρόσθεση Διανυσμάτων

α' τρόπος – πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων

Προκειμένου να προσθέσουμε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο O και με παράλληλη μεταφορά, σχηματίζουμε το $\vec{OA} = \vec{a}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AM} = \vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{a} + \vec{\beta}$.



Επομένως αν κάνουμε διαδοχικά δυο διανύσματα, τότε το άθροισμα τους είναι ένα νέο διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου. Το παραπάνω εκφράζεται με τη διανυσματική σχέση του Chasles, που αναφέρει ότι:

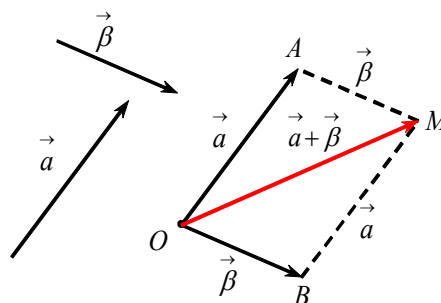
Για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ του επιπέδου θα ισχύει $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

Προσοχή:

Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O . (γιατί;)

β' τρόπος – πρόσθεση διανυσμάτων με κοινή αρχή (κανόνας παραλληλογράμμου)

Με αρχή ένα σημείο O (με παράλληλη μεταφορά) παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Τότε το άθροισμα $\vec{a} + \vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο $\vec{OM}$ του παραλληλογράμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

1. $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
2. $(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (Υπαρξη Ουδετέρου Στοιχείου)
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Υπαρξη Αντίθετου Στοιχείου)
5. $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{a} + \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ (Νόμος Διαγραφής)
6. $-(-\vec{a}) = \vec{a}$
7. $-(\vec{a} + \vec{\beta}) = -\vec{a} - \vec{\beta}$

Προσοχή:

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το ουδέτερο στοιχείο και το αντίθετο, είναι μοναδικά.

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$ και $\vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ με $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, ενώ η αντιμεταθετική μας επιτρέπει να τα προσθέτουμε με όποια σειρά θέλουμε.

Έτσι για να προσθέσουμε οποιονδήποτε αριθμό διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_v$, με $v \geq 3$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου.

Θα ισχύει δηλαδή, η γενικευμένη διανυσματική σχέση του Chasles, που αναφέρει:

Για οποιοδήποτε σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_v$ με $v \geq 3$ θα ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{v-1} A_v} = \overrightarrow{A_1 A_v}$$

Προσοχή:

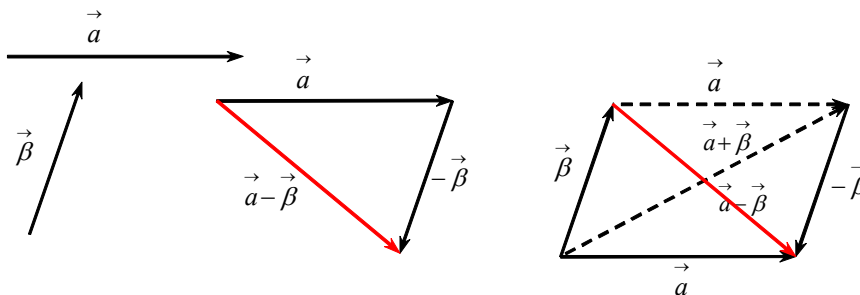
Το άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού διανυσμάτων δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

4.2. Αφαίρεση Διανυσμάτων

Η αφαίρεση διανυσμάτων ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $-\vec{\beta}$.

Δηλαδή

$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$



Αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{a}$.

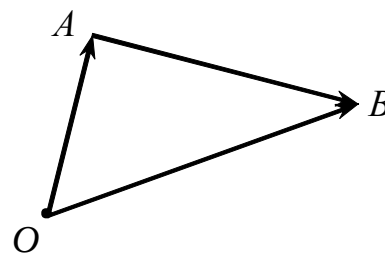
Πράγματι:

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{a} \Leftrightarrow (-\vec{\beta}) + (\vec{\beta} + \vec{x}) = (-\vec{\beta}) + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{a} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{\beta}.$$

4.3. Διάνυσμα Θέσεως

Έστω O ένα σταθερό και αυθαίρετο σημείο του χώρου.

Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του M** ή **διανυσματική ακτίνα του M** και είναι μοναδικό. Αντίστροφα, κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, ορίζει με το πέρας του ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου.



Το σημείο O , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτινών των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ και επομένως

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Δηλαδή:

“Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.

Προσοχή

Πλέον κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα δυο άλλων διανυσμάτων (παρεμβάλλοντας ένα σημείο) ή σε διαφορά δυο άλλων (με χρήση σημείου αναφοράς).

Δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} \text{ και } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

4.4. Ανισοτικές Σχέσεις στα Μέτρα Διανυσμάτων

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \quad (\text{τριγωνική ανισότητα})$$

Ισχύει:

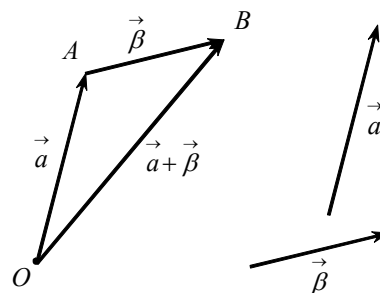
- Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά τότε:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| < |\vec{a} + \vec{\beta}| < |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$

- $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

- $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$

- Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε: $\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$



Επιπλέον για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ θα ισχύει $\left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{a} - \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

Αντίστοιχα θα ισχύουν:

- $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{\beta}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right|$

- $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a}| + |\vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$

4.5. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

Ορισμός:

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{a}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{a}$ ή $\lambda \vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$
- αντίρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{a}|$.
- αν $\lambda = 0$ τότε $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- αν $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Προσοχή:

Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$, το διάνυσμα $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ είναι μοναδιαίο και ομόρροπο του $\vec{a}$.

Πράγματι:

$$\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1 \text{ και εφόσον } \frac{1}{|\vec{a}|} > 0 \text{ θα έχουμε ότι: } \vec{a} \uparrow \uparrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Ιδιότητες

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε διάνυσμα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

1. $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
3. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
5. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$
6. $(-\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda\vec{a})$
7. $\lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{\beta}$
8. $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$
9. Αν $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
10. Αν $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

4.6. Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

Έτσι για παράδειγμα το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

4.7. Συνθήκη Παράλληλης Διανυσμάτων:

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω ότι $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

Τα διανύσματα $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ και $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι μοναδιαία, άρα έχουν ίσα μέτρα και επειδή είναι παράλληλα θα είναι

ίσα ή αντίθετα. Επομένως

- Αν $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \Rightarrow \vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta}$ οπότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$ ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta}$ οπότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$ ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\vec{0} = 0 \cdot \vec{\beta}$ οπότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda = 0$ ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$

Σε κάθε περίπτωση αν $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αντίστροφα,

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, για τα οποία υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$.

Τότε προφανώς (από ορισμό) $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$.

Προσοχή:

Έστω $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ είναι μοναδικός.

Απόδειξη

Έστω $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, για τα οποία ισχύει ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \mu \vec{\beta}$ και $\mu \neq \lambda$.

Τότε θα ισχύει ότι:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \\ \vec{a} = \mu \vec{\beta} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \vec{\beta} = \mu \vec{\beta} \Rightarrow \lambda \vec{\beta} - \mu \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda - \mu) \vec{\beta} = \vec{0} \xRightarrow{\vec{\beta} \neq \vec{0}} \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$$

Άρα ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ είναι μοναδικός.

Πρόταση

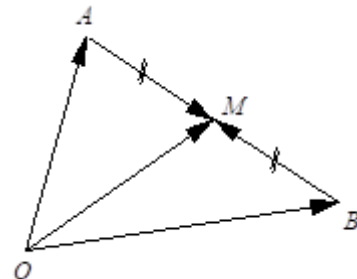
Για τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda = \mu = 0)$$

4.8. Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O . Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

**4.9. Διανυσματική Ακτίνα Σημείου M που χωρίζει το τμήμα AB σε απλό λόγο λ με $\lambda \neq 0, -1$**

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M εσωτερικό του, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ με

$$\lambda \neq 0, -1. \text{ Για το τυχαίο και αυθαίρετο σημείο } O \text{ ισχύει ότι: } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{\lambda + 1}$$

Απόδειξη

Για την διανυσματική ακτίνα του σημείου M ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad (1) \text{ και } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \quad (2)$$

$$\text{Έχουμε: } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \Rightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BM} \quad (3)$$

$$\text{Από } (1) + (3) \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \lambda \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BM} \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\lambda \cdot \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \lambda \cdot \overrightarrow{BM} = \vec{0} \quad (5)$$

$$\text{Έτσι: } (4) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} (1 + \lambda) \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$$

5 Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων – Συντεταγμένες στα Διανύσματα

Μια ευθεία $x'x$ στην οποία έχουμε ορίσει ένα σημείο O και στην ημιευθεία Ox ένα σημείο I με $|\overrightarrow{OI}| = 1$ ονομάζεται άξονας με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

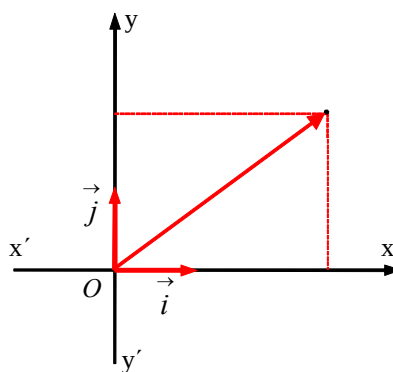
Συμβολίζεται με xOx' ή ακόμα απλούστερα με $x'x$.

Η ημιευθεία Ox που περιέχει το σημείο I ονομάζεται θετικός ημιάξονας και η ημιευθεία Ox' ονομάζεται αρνητικός ημιάξονας. Η φορά που έχει το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$ ορίζεται να είναι η θετική φορά του άξονα και η αντίθετη, δηλαδή η φορά του $-\vec{i}$ ορίζεται να είναι η αρνητική.

Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο M πάνω στον άξονα $x'x$, τότε θα ισχύει ότι $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{i}$ οπότε θα υπάρχει ένας μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$. Αντίστροφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα υπάρχει μοναδικό σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε αντιστοιχίσει κάθε σημείο M του άξονα $x'x$ με έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό x τον οποίο θα ονομάζουμε τετμημένη του σημείου M .

Ας θεωρήσουμε τώρα τους κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή το O , στους οποίους έχουμε ορίσει τα (ισομήκη) μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Λέμε τότε ότι έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο επίπεδο ή ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο ή ένα καρτεσιανό επίπεδο και το συμβολίζουμε με Oxy .



Προσοχή: Όπως στον $x'x$, έτσι και στον $y'y$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε σημείο N του άξονα $y'y$ με έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό y τον οποίο θα ονομάζουμε τετμημένη του σημείου N και για τον οποίο θα ισχύει ότι $\overrightarrow{ON} = y \cdot \vec{j}$.

Τότε από κάθε σημείο A του επιπέδου, μπορούμε να φέρουμε παράλληλες στους δυο άξονες οι οποίες θα τέμνουν τον $x'x$ στο σημείο M και τον $y'y$ στο σημείο N για τα οποία θα ισχύει $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$ και $\overrightarrow{ON} = y \cdot \vec{j}$. Τους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$ θα τους καλούμε συντεταγμένες του σημείου A . Ο x θα καλείται τετμημένη του σημείου A και ο y τεταγμένη. Έτσι κάθε σημείο A του επιπέδου καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από ένα ζεύγος αριθμών (x, y) που θα καλούνται συντεταγμένες του και αντίστροφα κάθε τέτοιο ζεύγος αριθμών θα καθορίζει με μοναδικό τρόπο την θέση ενός σημείου στο επίπεδο.

Έτσι για κάθε σημείο A του επιπέδου, ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ και το οποίο γράφεται με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ ως εξής: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$.

Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται συνιστώσες του $\vec{a}$, ενώ οι αριθμοί x, y λέγονται συντεταγμένες του $\vec{a}$. (x : τετμημένη, y : τεταγμένη). Γράφουμε $\vec{a} = (x, y)$.

Για το μηδενικό διάνυσμα ισχύει ότι $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} = (0, 0)$.

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ ισχύει: $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$.

5.1. Ισότητα Διανυσμάτων

Δυο διανύσματα θα είναι ίσα, αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες.

Δηλαδή, αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δυο διανύσματα τότε θα έχουμε $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Προσοχή:

Ισχύει $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Συντεταγμένων

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δυο διανύσματα τότε:

- $\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\vec{a} - \vec{\beta} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) - (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
- $\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
- $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$
- $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου τότε: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Πράγματι:

Έστω $\overrightarrow{AB} = (x, y)$. Έχουμε $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.

$$\text{Ισχύει } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow (x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow (x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 - x_1 \\ y = y_2 - y_1 \end{cases}$$

Επομένως $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Δηλαδή: $\overrightarrow{AB}$ = τετμημένη τέλους – τετμημένη αρχής

$\overrightarrow{AB}$ = τεταγμένη τέλους – τεταγμένη αρχής

5.2. Συντεταγμένες του Μέσου AB

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου τότε το σημείο $M(x_M, y_M)$ είναι το μέσον του

ευθυγράμμου τμήματος AB αν και μόνο αν $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Πράγματι:

Το σημείο M είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB αν και μόνο αν $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Έχουμε: $\overrightarrow{OM} = (x_M, y_M)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) &\Leftrightarrow (x_M, y_M) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_M, y_M) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \Leftrightarrow \\ (x_M, y_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

5.3. Συντεταγμένες Σημείου M που χωρίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σε απλό λόγο λ.

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου και το σημείο $M(x_M, y_M)$ εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Τότε $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ με $\lambda \neq 0, -1$ αν και μόνο αν $x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ και $y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Πράγματι:

Έχουμε αποδείξει ότι για $\lambda \neq 0, -1$ ισχύει $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{\lambda + 1}$.

Ακόμα $\overrightarrow{OM} = (x_M, y_M)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.

Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{\lambda + 1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda + 1} (\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow (x_M, y_M) = \frac{1}{\lambda + 1} [(x_1, y_1) + \lambda (x_2, y_2)] \Leftrightarrow \\ (x_M, y_M) &= \frac{1}{\lambda + 1} [(x_1, y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2)] \Leftrightarrow (x_M, y_M) = \frac{1}{\lambda + 1} (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \Leftrightarrow \\ (x_M, y_M) &= \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1} \right) \Leftrightarrow \left(x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1} \text{ και } y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1} \right)\end{aligned}$$

5.4. Μέτρο Διανύσματος

Έστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα διάνυσμα, και Α το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (x, y)$.

Τότε το μέτρο του $\vec{a}$ είναι: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Πράγματι:

Έστω το σημείο Α του επιπέδου για το οποίο ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (x, y)$. Αν θεωρήσουμε τις προβολές του Α στους άξονες $x'x$ και $y'y$ ότι είναι τα σημεία $M(x, 0)$ και $N(0, y)$. Ισχύει ότι $|\overrightarrow{OM}| = |x|$ και $|\overrightarrow{ON}| = |y|$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OAM θα έχουμε:

$$|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

5.5. Απόσταση Σημείων

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου τότε η απόστασή τους είναι:

$$d(A, B) = (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Πράγματι:

Τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζουν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Ισχύει επομένως ότι $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

5.6. Συνθήκη Παραλληλίας δυο Διανυσμάτων

Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

Ισχύει ότι: $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$, όπου $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

Πράγματι:

Έστω $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{\beta} = (0, 0)$ οπότε $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \cdot 0 - 0 \cdot y_1 = 0$
- Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε εφόσον $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ θα υπάρχει μοναδικός $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$.
Έτσι: $\vec{a} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = \lambda (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2) \Leftrightarrow (x_1 = \lambda x_2 \text{ και } y_1 = \lambda y_2)$

Άρα έχουμε: $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x_2 & \lambda y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda x_2 y_2 - x_2 \lambda y_2 = 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$.

Άρα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad (1)$.

- Αν $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{\beta} \parallel \vec{a}$.
- Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0} \Rightarrow (x_2 \neq 0 \text{ ή } y_2 \neq 0)$.

Για $x_2 \neq 0$ (αντίστοιχα για $y_2 \neq 0$) έχουμε από την (1) $\Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{x_2} y_2 \quad (2)$.

Θέτω $\frac{x_1}{x_2} = \lambda \in \mathbb{R}$ οπότε $x_1 = \lambda x_2$ και $y_1 = \lambda y_2$.

Έτσι: $\vec{a} = (x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda (x_2, y_2) = \lambda \vec{\beta}$.

Άρα $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$.

Προσοχή:

- Από την παραπάνω συνθήκη προκύπτει άμεσα, ότι $\vec{a} \not\parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq 0$
- $\vec{a} = (x_1, y_1) \parallel x'x \Leftrightarrow y_1 = 0$ (γιατί;)
- $\vec{a} = (x_1, y_1) \parallel y'y \Leftrightarrow x_1 = 0$ (γιατί;)

5.7. Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Έστω το διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου $\vec{a} = (x, y)$ με $x \neq 0$.

Τότε ο πραγματικός αριθμός $\lambda_a = \frac{y}{x}$ καλείται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a}$.

Ισχύουν:

- Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{a} // x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a} = (x, 0)$ είναι ο $\lambda = 0$.
- Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{a} // y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a}$.
- Αν $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ τότε $\lambda_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Προσοχή:

Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$ (δηλαδή ορίζεται για αυτά συντελεστής διεύθυνσης) με συντελεστές διεύθυνσης λ_a και $\lambda_{\vec{\beta}}$ αντίστοιχα. Τότε θα ισχύει ότι: $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_a = \lambda_{\vec{\beta}}$.

6. Εσωτερικό Γινόμενο

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \phi$, όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$.

Ισχύει:

- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \geq 0$ αν και μόνο αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) < 90^\circ$
- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \leq 0$ αν και μόνο αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) > 90^\circ$
- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ αν και μόνο αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 90^\circ$

Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = (\lambda \vec{\beta}) \cdot \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ και $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$
- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{a} \updownarrow \vec{\beta}$
- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ αν και μόνο αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$

6.1. Αναλυτική Έκφραση του Εσωτερικού Γινομένου

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ισχύει ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων των δυο διανυσμάτων.

6.2. Συνθήκη Καθετότητας δυο Διανυσμάτων

Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$ (δηλαδή ορίζεται για αυτά συντελεστής διεύθυνσης) με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\vec{a}}$ και $\lambda_{\vec{\beta}}$ αντίστοιχα. Τότε θα ισχύει ότι: $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$.

Πράγματι:

Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1 x_2 \neq 0$.

Ισχύει ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = -y_1 y_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$.

Προσοχή:

Δεν ισχύουν πάντοτε οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

- $\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \\ \vec{\gamma} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \not\Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ (Νόμος Διαγραφής).

Όμως αν $\vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

- $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \neq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

- $(\vec{a}, \vec{\beta})^2 \neq \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$

6.3. Συνημίτονο Γωνίας δυο Διανυσμάτων

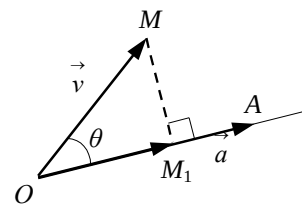
Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Αν είναι φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τότε θα ισχύει ότι:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|} \quad \text{ή διαφορετικά} \quad \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

6.4. Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{\beta}$. Προβάλλουμε το σημείο M στην ευθεία OA και έστω M_1 η προβολή του.



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{a}$** και συμβολίζεται

με $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$. Δηλαδή, $\overrightarrow{OM_1} = \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$.

Αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του σημείου O .

Βασική Πρόταση

Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων δεν μεταβάλλεται αν το ένα από αυτά αντικατασταθεί με την προβολή του στο άλλο (το οποίο υποθέτουμε μη μηδενικό).

Δηλαδή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$