

Ασκήσεις στα Διανύσματα

- Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Ναδειχτεί ότι $\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΝΜ}$
- Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
Ναδειχτεί ότι: $\overrightarrow{ΜΝ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΒΓ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ})$.
- Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
Ναδειχτεί ότι: $4\overrightarrow{ΜΝ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΑΔ}$.
- Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Ναδειχτεί ότι: $\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΓ} = 2\overrightarrow{ΜΝ}$
- Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν κοινό μέσο να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΑΕ} + \overrightarrow{ΑΖ} = 2\overrightarrow{ΑΔ}$
- Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Μ και Ν τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΒΜ} = 2\overrightarrow{ΑΓ} - 3\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΓΝ} = \overrightarrow{ΑΓ} - 2\overrightarrow{ΑΒ}$.
Να δείξετε ότι τα σημεία Μ και Ν ταυτίζονται.
- Αν για τα σημεία Α, Β και Γ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΒΓ} + 3\overrightarrow{ΓΑ} = \vec{0}$ να δείξετε ότι είναι συνευθειακά.
- Δίνονται τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ώστε: $6\overrightarrow{ΟΑ} - 13\overrightarrow{ΟΒ} + 7\overrightarrow{ΟΓ} = \vec{0}$. Ναδειχτεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
- Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{a} + 3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΟΓ} = 3\vec{a} - 5\vec{\beta}$.
Ναδειχτεί ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ του επιπέδου ώστε: $\overrightarrow{ΑΔ} + 3\overrightarrow{ΒΔ} - 2\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΕΒ} = 3\overrightarrow{ΑΖ}$.
Ναδειχτεί ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.
- Για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει η σχέση: $2\kappa \cdot \overrightarrow{ΟΑ} + (1 - 2\kappa) \cdot \overrightarrow{ΟΒ} = 3 \cdot \overrightarrow{ΟΓ} - 2 \cdot \overrightarrow{ΟΒ}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
α. Ναδειχτεί ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά αν Ο τυχαίο σημείο αναφοράς.
β. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του κ τα σημεία είναι διακεκριμένα.
- Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Ο ένα σημείο αναφοράς. Ναδειχτεί ότι η σχέση: $\overrightarrow{ΟΒ} = \lambda \overrightarrow{ΟΑ} + (1 - \lambda) \overrightarrow{ΟΓ}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ΑΔ} = x\overrightarrow{ΑΒ} + y\overrightarrow{ΑΓ}$ με $x + y = 1$. Να δείξετε ότι το Δ είναι σημείο της ευθείας που ορίζουν τα Β και Γ.
- Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη παράλληλα (μη συγγραμμικά) τότε:
α. αν $\kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\kappa = \lambda = 0$
β. $\kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta} = \kappa' \vec{a} + \lambda' \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \kappa' \\ \lambda = \lambda' \end{cases}$
- Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά τότε ναδειχτεί ότι:

α. τα $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{a} - 3\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

β. τα $\vec{k} = 9\vec{a} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{m} = 3\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

16. Δίνονται τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

17. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x} = \vec{a} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

18. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Να προσδιορίσετε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{y} = 3\vec{a} - (\lambda - 1)\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

19. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, και M. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = 2\vec{AM} - \lambda\vec{BM} + \vec{\Gamma M}$ να είναι σταθερό (ανεξάρτητο του σημείου M)

20. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M του επιπέδου, το διάνυσμα $\vec{x} = 4\vec{MA} - 7\vec{MB} + 3\vec{MG}$ είναι σταθερό.

21. Δίνεται ένα τρίγωνο ABΓ. Να βρείτε τα σημεία M για τα οποία ισχύει $\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MG} = \vec{AG}$

22. Δίνεται πεντάπλευρο ABΓΔΕ και ζητείται σημείο M τέτοιο ώστε: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{MD} + \vec{ME}$.

23. Δίνεται ένα τρίγωνο ABΓ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M του επιπέδου για το οποίο $2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MG} = \vec{0}$

24. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\alpha. |\vec{MA}| = |\vec{BG}| \quad \beta. |\vec{MA}| = |\vec{MB}| \quad \gamma. |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + \vec{MG}|$$

25. Έστω A, B, Γ, Δ σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δυο διαφορετικά μεταξύ τους για τα οποία ισχύει η σχέση $|2 \cdot \vec{MA} + 5 \cdot \vec{MB}| = |3 \cdot \vec{MG} + 4 \cdot \vec{MD}|$ (1) όπου M μεταβλητό σημείο του επιπέδου.

α. Να βρεθεί σημείο E της AB ώστε $2 \cdot \vec{MA} + 5 \cdot \vec{MB} = 7 \cdot \vec{ME}$

β. Να βρεθεί σημείο Θ της ΓΔ ώστε $3 \cdot \vec{MG} + 4 \cdot \vec{MD} = 7 \cdot \vec{M\Theta}$

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η (1)

26. Έστω A, B σταθερά σημεία του επιπέδου, διαφορετικά μεταξύ τους για τα οποία ισχύει η σχέση $|5 \cdot \vec{MA} + 3 \cdot \vec{MB}| = 16$ (1) όπου M μεταβλητό σημείο του επιπέδου.

α. Να βρεθεί σημείο Λ της AB ώστε $5 \cdot \vec{MA} + 3 \cdot \vec{MB} = 8 \cdot \vec{ML}$

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η (1)

27. Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B και Γ του επιπέδου. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{AG}|$

28. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ του επιπέδου.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο H του επιπέδου για το οποίο ισχύει: $5\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HG} = \vec{0}$

β. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο K του επιπέδου για το οποίο ισχύει: $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{5MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG}|$

29. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{a}| = x$, $|\vec{\beta}| = 3x - 4$ και $|\vec{a} + \vec{\beta}| = x^2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του αριθμού x

β. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

30. Αν ξέρουμε για τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ότι $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και ότι $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$ να δείχτεί ότι: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \downarrow \uparrow \vec{\gamma}$

31. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\alpha. |\vec{a} - \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \quad \beta. |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{a} - \vec{\beta}|$$

32. Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2$ ισχύει $|\vec{a} + 3\vec{\beta}| + |2\vec{a} + 5\vec{\beta}| \geq 1$

33. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει ότι $|\vec{a}| = 60$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 10$ να αποδείξετε ότι $\vec{a} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma} \neq \vec{0}$

34. Αν ξέρουμε για τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ότι $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και ότι $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$ να δείχτεί ότι: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \downarrow \uparrow \vec{\gamma}$

35. Με βάσεις τις πλευρές τριγώνου ABΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα παραλληλόγραμμα ΒΓΔΕ, ΓΑΖΗ και ΑΒΘΙ.

Να δείχτεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{IZ}$, $\overrightarrow{E\Theta}$ και $\overrightarrow{H\Delta}$ σχηματίζουν τρίγωνο.

36. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και δυο χορδές του AB και ΓΔ που τέμνονται κάθετα στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KO}$$