ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επαναληπτικές Ασκήσεις Γ΄Λυκείου. Θέμα Γ

1. Εκφώνηση  
     
   Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png η οποία είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.png και ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4a227c88604b967afd966a27b06c3fba.png.  
     
   Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png τέτοιο ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81c21cfb8509f18ccb49415c9ad3cc85.png.  
     
   Γ2. Αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/52670a1f735e4c82da92eff5ce52b229.png είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7683eb28fb10f659b5774e810b30e4da.png να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4291db93ecde4f716f8627cfa3baa1f9.png τέτοιο ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/35a77265bc9431b9428eba15924d24f9.png.  
     
   Γ3. Αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png έχει σύνολο τιμών το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49924a08fdfe1842837947c8b5ccae88.png και δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.png που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/30dd490f9109a16b832bca6fef4abf72.png, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ca64ba2c890aaea462f1587e8aa642d.png τέτοιο ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/57b507c5b7a48f485f8c9d10e27312f2.png.

Λύση  
  
Γ1. Αφού η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.png θα είναι και συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.png.  
  
Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0d9ef72b3cdd18345494a9d8c8149ff2.png η οποία είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f1b2ca6a82f6004fb4f7eda25abfe952.png και παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/03f9892e0ccfcd79e467bef5bcfa5745.png με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b25b2805b3d723c6975805d945d9a82a.png. Επίσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c6666728830638613c490f9e014f3f7c.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/786a5fed8e15b61d9f085246d4c35597.png. Οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3ca84df9fdac9ccaeefc86d77cf398b0.png. Από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png τέτοιο ώστε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aae7c6e7acd0770336ac200312d4aa40.png.  
  
Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a010459fe11e74d9377c6bf8978f12f8.png η οποία είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.png.  
  
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4a6cc52d57986f5c3a19f1b5b13f9ad0.png είναι συνεχής και στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1655400766beb2dff72d453ae53e07ec.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngη ρίζα του Γ1 ερωτήματος.  
  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f647092692b527218fc7d113b1d8c0c.png από την υπόθεση και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b8e25bd690e4d9b4222e458f3c22ac42.png, αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png.  
  
Οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a40a5ab212378700adbedf4c96889407.png. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d1d1a426975456b67d4a2cb02e931d26.pngτέτοιο ώστε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fed7406859ceb4108334963bd134c5be.png.  
  
Γ3. Αφού η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png έχει σύνολο τιμών το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49924a08fdfe1842837947c8b5ccae88.png, θα ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/55ed1ff65bc232c21275b4f15069592d.png, (1) για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/de4c4ff5002a243929bb07b254ea30f4.png.  
  
Επίσης, αφού δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngπου η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/30dd490f9109a16b832bca6fef4abf72.png, θα ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d5eeec49bd2708952e578a3e96710ea9.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/de4c4ff5002a243929bb07b254ea30f4.png.  
  
Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4952d96675c155dd085e50892ce3a9cf.png η οποία είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.png.  
  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ffeae31b11792e6ece41229fc96a20b6.png, από την (1) και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/514cfb7f7c49cecd008ad798f064589a.png, επίσης από την (1).  
  
Τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c77305a09358680613c404d897707608.png. Ισχύει το Θ. Bolzano για την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2510c39011c5be704182423e3a695e91.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8a3755409fe639299a7ab41e24cb75.png, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ca64ba2c890aaea462f1587e8aa642d.png τέτοιο ώστε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/da2bc03c650325dfb76b8a23405f3a75.png.  
  
Επειδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1eeee68b4db8da1d5653bbe7ee5da16a.png, τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5c1c0727f238086db0ed17d69d6ae0f0.png ή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2e75f73a775b8649817f1314b2b6ea48.png οπότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2510c39011c5be704182423e3a695e91.png θα είναι γνησίως μονότονη. Άρα το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ca64ba2c890aaea462f1587e8aa642d.png θα είναι μοναδικό.

1. Εκφώνηση  
     
   Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, όχι πολυωνυμική, δύο φορές παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49924a08fdfe1842837947c8b5ccae88.png με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a5f409d5f94eafcc80b31f039187e90e.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d04b94468b272147cfe8d5c29c01f3a5.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/54fbbec65d27d381a99d764b04b4b27f.png.  
     
   Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/25da86283e0c4fd6bf06e5ae74ec66f4.png, (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png.  
     
   Γ2. Να αποδείξετε ότι η ρίζα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.  
     
   Γ3. Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/604dd965ef81451e51d9aa4c773b84b5.pngτότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.png στο σημείο με τετμημένη το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3dd5397bc381adbe514dcddd5d8eb7b9.png διέρχεται από την αρχή των αξόνων http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1a4a5d17d115344f6d17306f3ccfee4.png.

Λύση  
  
Γ1. Είναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50526e1b4468fa6efe9efa0d88dd4080.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f11349d3adbe0e74b6b29c6ccaf582b0.png  
  
Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/73486e2090d0229794fddf8e473780e4.png. Αφού η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49924a08fdfe1842837947c8b5ccae88.png, τότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2510c39011c5be704182423e3a695e91.png θα είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49924a08fdfe1842837947c8b5ccae88.png και παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/03f9892e0ccfcd79e467bef5bcfa5745.png με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7d6c1eaf099e80425c9bb6e077087f1c.png.  
  
Επίσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08ac28a1ac936a5ea77c571bb5bf5a64.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dd57d9173f9fb2aba5ad4228d0cde30e.png. Επομένως http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bc67205c0d6ee6595d7815ad8c40331e.png.  
  
Ισχύει, λοιπόν το Θ.Rolle που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png τέτοιο ώστε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2487efb48464bee77e992bb5669875a0.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/97915b797246a53a8e1d3937ab0fdb82.png.  
  
Άρα η εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/25da86283e0c4fd6bf06e5ae74ec66f4.pngέχει μία τουλάχιστον ρίζα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png.  
  
Γ2. Έστω ότι η εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/25da86283e0c4fd6bf06e5ae74ec66f4.png έχει 2 ρίζες http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b604af373947dca4ef58bef4b1007476.png με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/02f1dc8b85e12a15907277cf2dfa0407.png.  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5346df55937305856ca076c991e19ea7.png, τότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e358efa489f58062f10dd7316b65649e.png είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9775b86181515c8abcb4edb5409280af.pngκαι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/36cbd406747e79159d7b81537ff01f76.png, αφού η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49924a08fdfe1842837947c8b5ccae88.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e4179d5e97733a9d4ffdc16aed8a4216.png. Ακόμα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/90749997fda4d21b3e32b82319fdf0c7.png.  
  
Επομένως, από το Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d5e4de6224a019157ee4c5e51b589593.png τέτοιο ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a8f6647d621bb875522ddb8f017f151.png, που είναι **άτοπο**, αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d04b94468b272147cfe8d5c29c01f3a5.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/54fbbec65d27d381a99d764b04b4b27f.png.  
  
Άρα η εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/831a2fc82a17f2da566404e5f38e37c9.png δεν έχει 2 ρίζες στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/03f9892e0ccfcd79e467bef5bcfa5745.png, οπότε η ρίζα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfe285fd8167f8ced8d809e8df40c3bb.png του Γ1 ερωτήματος είναι μοναδική.  
  
Γ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/604dd965ef81451e51d9aa4c773b84b5.png στο σημείο με τετμημένη το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png έχει εξίσωση:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/54e005004466370dbb0f2c4bdd423b60.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/756e3e0925a602c57045e392bed40a5b.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6e03e3a56ca4247039d49258010ff1d1.png (1).  
  
Πρέπει το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1a4a5d17d115344f6d17306f3ccfee4.png να την επαληθεύει, οπότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c84538ac04d51943e695237f607876b.pngη (1) μας δίνει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/60f98e50d1bd591fa62e4306f2a189f6.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6947aededbb1afbed90d9d76d06245e5.png που **ισχύει** σύμφωνα με το Γ1 ερώτημα.