ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επαναληπτικές Ασκήσεις Γ΄Λυκείου. Θέμα Γ

1. Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  και ισχύει .

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε .

Γ2. Αν η  είναι συνεχής στο και  να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε .

Γ3. Αν η  έχει σύνολο τιμών το  και δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης  που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  τέτοιο ώστε .

Λύση

Γ1. Αφού η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη στο  θα είναι και συνεχής στο .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  η οποία είναι συνεχής στο  και παραγωγίσιμη στο  με . Επίσης  και . Οπότε . Από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε

.

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση  η οποία είναι συνεχής στο .

Η συνάρτηση  είναι συνεχής και στο , όπου η ρίζα του Γ1 ερωτήματος.

Είναι  από την υπόθεση και , αφού .

Οπότε . Ισχύει, λοιπόν το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον τέτοιο ώστε

.

Γ3. Αφού η  έχει σύνολο τιμών το , θα ισχύει , (1) για κάθε .

Επίσης, αφού δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία , θα ισχύει  για κάθε .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  η οποία είναι συνεχής στο .

Είναι , από την (1) και , επίσης από την (1).

Τότε . Ισχύει το Θ. Bolzano για την  στο , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε

.

Επειδή , τότε  ή  οπότε η συνάρτηση  θα είναι γνησίως μονότονη. Άρα το  θα είναι μοναδικό.

1. Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση , όχι πολυωνυμική, δύο φορές παραγωγίσιμη στο  με  και  για κάθε .

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση , (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα .

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ρίζα  της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

Γ3. Αν τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  στο σημείο με τετμημένη το  διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

Λύση

Γ1. Είναι:





Θεωρούμε τη συνάρτηση . Αφού η  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο , τότε η συνάρτηση  θα είναι συνεχής στο  και παραγωγίσιμη στο  με .

Επίσης  και . Επομένως .

Ισχύει, λοιπόν το Θ.Rolle που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε:



.

Άρα η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα .

Γ2. Έστω ότι η εξίσωση  έχει 2 ρίζες  με .

Αν , τότε η συνάρτηση  είναι συνεχής στο και παραγωγίσιμη στο , αφού η  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο , με . Ακόμα .

Επομένως, από το Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  τέτοιο ώστε , που είναι **άτοπο**, αφού  για κάθε .

Άρα η εξίσωση  δεν έχει 2 ρίζες στο , οπότε η ρίζα  του Γ1 ερωτήματος είναι μοναδική.

Γ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  στο σημείο με τετμημένη το  έχει εξίσωση:





 (1).

Πρέπει το  να την επαληθεύει, οπότε για η (1) μας δίνει:



 που **ισχύει** σύμφωνα με το Γ1 ερώτημα.