Σημειώσεις Μαθηματικών Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

Οι σημειώσεις που ακολουθούν απευθύνονται κυρίως στους μαθητές της Γ Λυκείου με Προσανατολισμό Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.

Προσπάθησα αυτές να περιλαμβάνουν:

- ✓ **Αναλυτική Θεωρία** κάθε κεφαλαίου, μαζί με παρατηρήσεις και σχόλια που θεωρώ σημαντικά για την κατανόηση των εννοιών.
- ✓ **Μεθοδολογία** και τρόπους αντιμετώπισης διαφορετικών ασκήσεων
- ✓ **Προτεινόμενες Ασκήσεις** για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών

Όλα τα παρακάτω, προέρχονται από βιβλία καταξιωμένων συναδέλφων, οδηγίες για την διδασκαλία του μαθήματος από σχολικούς συμβούλους, παρατηρήσεις και επισημάνσεις από εξαιρετικούς συνάδελφους στο διαδίκτυο καθώς και ασκήσεις από τα σχολικά μου χρόνια των οποίων την προέλευση δεν γνωρίζω.

Στο τέλος των σημειώσεων παρατίθεται και η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την συγγραφή τους.

1. Εισαγωγή

Συνάρτηση f (function) καλούμε μια διαδικασία με την οποία **κάθε** στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται **σε ένα και μόνο ένα** στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B.

Για να εκφράσουμε την διαδικασία αυτή γράφουμε: $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$

Το σύνολο A καλείται **Σύνολο ή Πεδίο Ορισμού** και το συμβολίζουμε με D_f ή A_f ενώ το B **Σύνολο Άφιξης** της συνάρτησης f.

Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής λέγονται οι συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το $\mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A.

Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x\in\mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται στο $y\in\mathrm{B}$, τότε γράφουμε $y=f\left(x\right)$ και διαβάζουμε “y ίσον f του x”. Το x καλείται πρότυπο και το $f\left(x\right)$ λέγεται τιμή της f στο x ή εικόνα του x.

Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Σε μια συνάρτηση συνήθως η τιμή της εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο. Όταν το $f\left(x\right)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το **πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το “ευρύτερο” υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f\left(x\right)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.**

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f για κάθε στοιχείο που ανήκει στο σύνολο ορισμού της ονομάζεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με R_f ή με $f\left(\mathrm{A}\right)$.

Δηλαδή: $R_f=\left\{y\in\mathbb{R}\mid f\left(x\right)=y \text{ για κάποιο } x\in D_f\right\}$.

Διαφορετικά $R_f=\left\{y\in\mathbb{R}\mid f\left(x\right)=y \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ως προς } x\in D_f\right\}$

Γνωρίζουμε μία συνάρτηση όταν γνωρίζουμε:

1. Το πεδίο ορισμού της
2. Τον τύπο της.

Παρατηρήσεις:

1. Άμεσα από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτουν ότι:

- Αν $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 = x_2$ τότε υποχρεωτικά $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε υποχρεωτικά $x_1 \neq x_2$ (Αντιθετοαντίστροφη της προηγούμενης)

2. Η συνάρτηση $f(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ταυτοτική συνάρτηση.

3. Η συνάρτηση $f(x) = 0$ με $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται μηδενική. Έχει την ιδιότητα οποιοδήποτε στοιχείο να το αντιστοιχεί στην τιμή 0.

4. Το σύνολο τιμών είναι υποσύνολο του συνόλου άφιξης.

5. Αν $\varkappa \in f(\mathrm{A})$ τότε η εξίσωση $f(x) = \varkappa$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο A.

6. Συνήθως ο τύπος μιας συνάρτησης δίνεται. Συχνά όμως συναντάμε ασκήσεις στις οποίες δεν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, αλλά μια σχέση (συναρτησιακή) που τον περιέχει. Με την βοήθεια της σχέσης αυτής μπορούμε είτε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης, είτε να οδηγηθούμε στην πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Π.χ. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Εύρεση Συνόλου Ορισμού

Ισχύει ότι το σύνολο Ορισμού μιας συνάρτησης είναι το $A = D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$

1. Πολυωνυμικές συναρτήσεις: $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + a_{\nu-2}x^{\nu-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

Σε αυτές τις περιπτώσεις $A = \mathbb{R}$

2. Ρητές Συναρτήσεις: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

Σε αυτές τις περιπτώσεις $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$

3. Συναρτήσεις με Ριζικά: $f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)}$, $P(x)$ πολυώνυμο.

Σε αυτές τις περιπτώσεις $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \geq 0\}$

4. Λογαριθμικές Συναρτήσεις: $f(x) = \log_a h(x)$, όπου $h(x)$ συνάρτηση.

Σε αυτές τις περιπτώσεις $A=\{x\in\mathbb{R} \mid h(x)>0\}$

5. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις: $f(x)=\eta\mu x$ ή $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Σε αυτές τις περιπτώσεις $A=\mathbb{R}$.

Για τις συναρτήσεις

- $f(x)=\varepsilon\varphi P(x)$ ισχύει ότι $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid P(x)\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$ και
- $f(x)=\sigma\varphi P(x)$ ισχύει ότι $A=\{x\in\mathbb{R} \mid P(x)\neq \kappa\pi, \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$

6. Εκθετικές Συναρτήσεις: $f(x)=P(x)^{Q(x)}$

Σε αυτές τις περιπτώσεις $A=\{x\in\mathbb{R} \mid P(x)>0\}$

7. Συναρτήσεις Πολλαπλού Τύπου: $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x\in\Delta_1 \\ f_2(x) & \text{αν } x\in\Delta_2 \end{cases}$

Σε αυτές τις περιπτώσεις $\mathrm{A}=\Delta_1\cup\Delta_2$.

Προσοχή

1. Όταν γράφουμε, $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ εννοούμε ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο ορισμού το A αλλά δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το B είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Αυτό που ισχύει είναι ότι: $x\in\mathrm{A}$ και $f(x)\in\mathrm{B}$

Π.χ. όταν γράφουμε $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ εννοούμε ότι $x\in[a,\beta]$ και $f(x)\in\mathbb{R}$, ενώ όταν γράφουμε $f:\mathbb{R}\to[a,\beta]$ εννοούμε ότι $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\in[a,\beta]$.

2. Σε περιπτώσεις που εμφανίζονται πολλοί περιορισμοί τότε βλέπουμε που ικανοποιείται ο καθένας και συναληθεύουμε.

3. Το πεδίο ορισμού το βρίσκουμε στον αρχικό τύπο της συνάρτησης και όχι σε αυτόν που θα προκύψει από τυχόν απλοποιήσεις.

Π.χ. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{2\}$.

Αν όμως απλοποιήσουμε την συνάρτηση αυτή θα έχει την μορφή: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2$ η οποία είναι πολυωνυμική και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

4. Όταν μας ζητείται η εύρεση ενός συνόλου ορισμού μιας συνάρτησης με τύπο $f(x)$, στην πραγματικότητα μας ζητάνε για ποια $x \in \mathbb{R}$ η έκφραση $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Δηλαδή $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} \neq \varnothing$. Ένα τέτοιο σύνολο ορισμού είναι πλήρως ορισμένο όταν μας δοθεί ο τύπος της συνάρτησης.

Σιωπηρά έχουμε συμφωνήσει ότι κάθε σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης f θα το θέτουμε (αν μπορούμε) υπό μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων. Ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις που κάτι τέτοιο είναι αδύνατο.

Για παράδειγμα ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{x^7 - x^6 + 2x^4 + 3}$.

Είναι εξαιρετικά δύσκολο (και χρονοβόρο) να μπορέσουμε να βρούμε τα σημεία που μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Σε αυτήν την περίπτωση το σύνολο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^7 - x^6 + 2x^4 + 3 \neq 0\}$ το οποίο είναι πλήρως ορισμένο αλλά όχι υπό μορφή διαστήματος.

5. Όταν θέτουμε περιορισμούς για το σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης να θυμόμαστε ότι δεν χρησιμοποιούμε το **«πρέπει»** αλλά **«πρέπει και αρκεί»** γιατί είναι σχέση ισοδυναμίας.

6. Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου δεν απαιτούνται να θέσουμε εμείς περιορισμούς, αφού αυτοί έχουν συμπεριληφθεί στα αντίστοιχα διαστήματα, όμως καλό είναι να κάνουμε πάντα έναν έλεγχο μήπως και κάτι έχει «ξεφύγει».

Επιπλέον να τονίσουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in \Delta_1 \\ y_0 & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$, δεν είναι πολλαπλού τύπου εφόσον δεν υπάρχουν δυο τύποι. Ο δεύτερος κλάδος απλά δίνει την τιμή της f στο x_0.

3. Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Άθροισμα $f+g:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, με $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- Διαφορά $f-g:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, με $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- Εξωτερικό γινόμενο $\lambda\cdot f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, με $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$
- Γινόμενο $f\cdot g:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, με $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- Πηλίκο $\dfrac{f}{g}:\mathrm{A}-\{x\in\mathrm{A}:g(x)=0\}\to\mathbb{R}$, με $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Προσοχή

- Αν οι δυο συναρτήσεις δεν έχουν κοινό πεδίο ορισμού δηλαδή $\mathrm{A}_f=\mathrm{A}$ και $\mathrm{A}_g=\mathrm{B}$ με $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ τότε ορίζουμε τις παραπάνω πράξεις στην τομή των δύο συνόλων δηλαδή στο $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$. Αν $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$ τότε **δεν** ορίζεται καμία από τις παραπάνω πράξεις.
- Χρήσιμο είναι να θυμόμαστε ότι **οι συναρτήσεις δεν είναι αριθμοί** και δεν πρέπει να τους συμπεριφερόμαστε ως τέτοιους γιατί είναι πολύ πιθανό να κάνουμε σημαντικά λάθη.

  Ιδιαίτερα συνηθισμένα λάθη είναι τα παρακάτω:

  α. Αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

  Αυτό όμως **δεν ισχύει**.

  Π.χ. αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\geq 0\\ 0, & \text{αν } x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\geq 0\\ 1, & \text{αν } x<0\end{cases}$ τότε $f(x)\cdot g(x)=0$ αλλά καμία από τις παραπάνω συναρτήσεις δεν είναι η μηδενική. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι $f(x)=0$ για κάποια $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=0$ για όλα τα υπόλοιπα $x\in\mathbb{R}$.

  Αυτό που στην πραγματικότητα έχουμε, είναι ότι για το τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x_0)\cdot g(x_0)=0$ άρα $f(x_0)=0$ ή $g(x_0)=0$. Όχι όμως για όλα.

β. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x)$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x) = g(x)$ ή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x) = -g(x)$;

Όχι. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = |x|$ εύκολα παρατηρούμε ότι $f^2(x) = g^2(x) = x^2$ αλλά $f(x) \neq g(x)$ και $f(x) \neq -g(x)$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για κάποια $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -g(x)$ για όλα τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

Όμως ισχύει ότι αν $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Τα λάθη αυτά προκύπτουν από την λανθασμένη χρήση των ποσοδεικτών (για κάθε και υπάρχει) που καταργήθηκε από τα σχολικά βιβλία η συμβολική γραφή τους, αλλά όχι η ύπαρξη, η χρήση, ή οι ιδιότητές τους.

Τα σύμβολα $\forall$ (για κάθε) και $\exists$ (υπάρχει) δεν αποτελούσαν συντομογραφίες αλλά απαραίτητα στοιχεία της μαθηματικής Γλώσσας. Οι κανόνες τους στην Μαθηματική Λογική (που αυτήν χρησιμοποιούμε σε κάθε βήμα μας είτε το καταλαβαίνουμε είτε όχι) είναι οι παρακάτω.

Έστω ότι $p(x)$ και $q(x)$ είναι δύο προτασιακοί τύποι ορισμένοι επί ενός συνόλου Ω.

Οι παρακάτω προτάσεις **είναι αληθείς** (νόμοι ποσοδεικτών):

1. $\forall x, [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x, p(x)] \wedge [\forall x, q(x)]$
2. $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x, p(x)] \vee [\exists x, q(x)]$
3. $[\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)] \Rightarrow \forall x, [p(x) \vee q(x)]$
4. $\exists x, [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x, p(x)] \wedge [\exists x, q(x)]$

Οι παρακάτω προτάσεις **δεν είναι πάντοτε αληθείς:**

1. $\forall x, [p(x) \vee q(x)] \Rightarrow [\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)]$
2. $[\exists x, p(x)] \wedge [\exists x, q(x)] \Rightarrow \exists x, [p(x) \wedge q(x)]$

4. Ισότητα Συναρτήσεων

Δυο συναρτήσεις f,g είναι **ίσες αν και μόνο αν**

- έχουν κοινό Πεδίο Ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Προσοχή

1. Είναι λάθος η έκφραση «δυο συναρτήσεις f,g είναι ίσες **αν και μόνο αν** έχουν κοινό σύνολο ορισμού και κοινό τύπο».

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f,g:\{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=x$ και $g(x)=x^3$ είναι ίσες αν και δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

Αυτό που ισχύει είναι ότι αν 2 συναρτήσεις **έχουν το ίδιο σύνολο ορισμού και τον ίδιο τύπο**, τότε θα είναι ίσες.

2. Οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln x$ και $g(x)=\ln x^2$ δεν είναι ίσες εφόσον $D_f=(0,+\infty)$ ενώ $D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Έτσι δεν είναι σωστό να γράψουμε $g(x)=\ln x^2=2\ln x$ αλλά $g(x)=\ln x^2=\ln|x|^2=2\ln|x|$ που ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Ασφαλώς ισχύει ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Στις ασκήσεις που θα συναντήσουμε, όταν θα ζητείται να δειχτεί ότι $f(x)=g(x)$ θα δείχνουμε ότι έχουν το ίδιο σύνολο ορισμού και τον ίδιο τύπο μιας και θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που **ορίζονται σε διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων**.

3. Επιπλέον ο ορισμός της ισότητας είναι ένας τυπικός αριθμητικός ορισμός, δηλαδή δεν εξετάζει το μέγεθος (και τη μονάδα) που παριστάνει η μεταβλητή της συνάρτησης.

4. **Δυο συναρτήσεις f,g δεν είναι ίσες** (σύμφωνα με τον ορισμό του σχ. βιβλίου) αν έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού **ή** όταν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού Α και υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\xi\in A$ με $f(\xi)\neq g(\xi)$.

Π.χ. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x^2$ και η συνάρτηση $g(x)=2\ln x$ δεν είναι ίσες μιας και η πρώτη έχει πεδίο ορισμού το $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ ενώ η δεύτερη $D_g=(0,+\infty)$.

5. Σύνθεση Συναρτήσεων

Έστω συναρτήσεις $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathrm{B}\to\mathbb{R}$.

Αν το σύνολο $\{x\in\mathrm{A}\,/\,f(x)\in\mathrm{B}\}$ δεν είναι το κενό, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f$ την οποία καλούμε **σύνθεση της συνάρτησης** f **με την συνάρτηση** g η οποία έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_{g\circ f}=\{x\in\mathrm{A}\,/\,f(x)\in\mathrm{B}\}$.
- ο τύπος της είναι: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

Προσοχή

1. Αν έχουμε σύνθετη συνάρτηση πρέπει πρώτα να βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της μετά τον τύπο της.

   Και αυτό βεβαίως γιατί είναι απαραίτητο το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $g\circ f$ να μην είναι το κενό σύνολο για να έχει νόημα η πράξη της σύνθεσης.

   Επιπλέον αν υπολογίσουμε πρώτα την $g\circ f$ και έπειτα υπολογίσουμε το πεδίο ορισμού της, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να παραλείψουμε αρκετούς περιορισμούς.

2. Για να θυμόμαστε καλύτερα τους περιορισμούς που ισχύουν για την εύρεση του συνόλου τιμών (μνημονικός κανόνας) είναι προτιμότερο να γράφουμε την συνάρτηση $g\circ f$ στην μορφή $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ και παρατηρώντας προσεκτικά το $2^{ο}$ μέλος της σχέσης είναι φανερό ότι θα πρέπει καταρχάς $x\in D_f$ για να μπορέσει να λειτουργήσει η εσωτερική συνάρτηση f και ασφαλώς έπειτα $f(x)\in D_g$ για να μπορέσει να λειτουργήσει η συνάρτηση g.

   Άρα τελικά $D_{g\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\}$

   Αντίστοιχα για την $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ισχύει ότι $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}$

3. Ισχύει ότι

   $D_{g\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\}=f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}$ και

   $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=g(\mathrm{B})\cap\mathrm{A}$

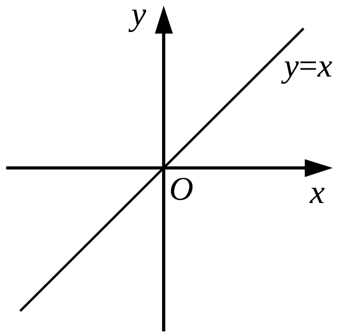
4. Γενικά αν f και g δυο συναρτήσεις τότε **δεν ισχύει υποχρεωτικά** ότι $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

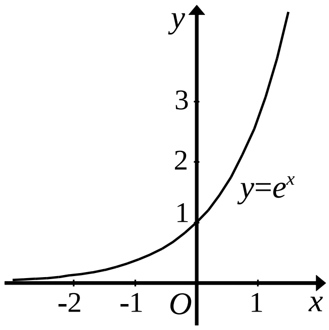
5. Αν f, g και h τρείς συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ\left(g\circ f\right)$ τότε θα ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα δηλαδή $\left(h\circ g\right)\circ f$.

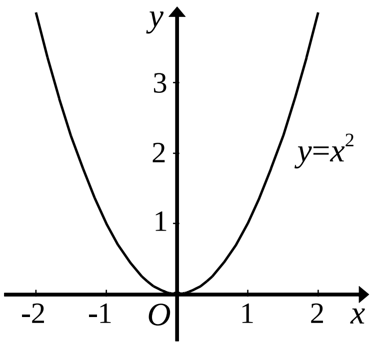
6. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

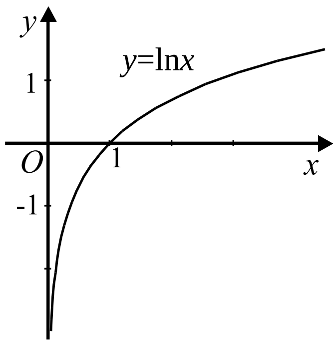
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}\left(x,y\right)$ για τα οποία ισχύει $y=f\left(x\right)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}\left(x,f\left(x\right)\right)$, λέγεται γραφική παράσταση (ή καμπύλη) της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f **(curve)** ή με G_f **(graph)**.

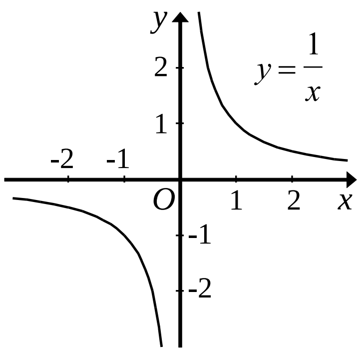
Οι γραφικές παραστάσεις των πιο γνωστών συναρτήσεων είναι:

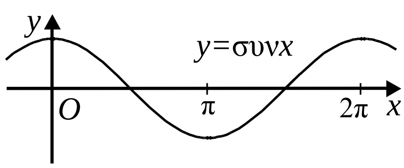


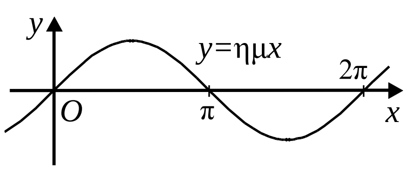








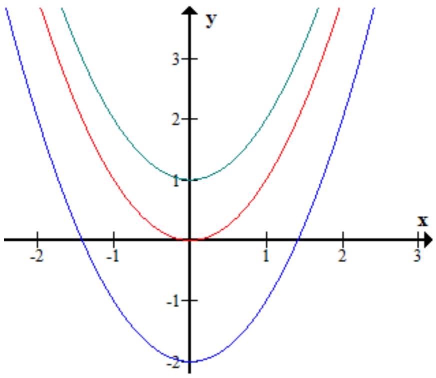




Προσοχή

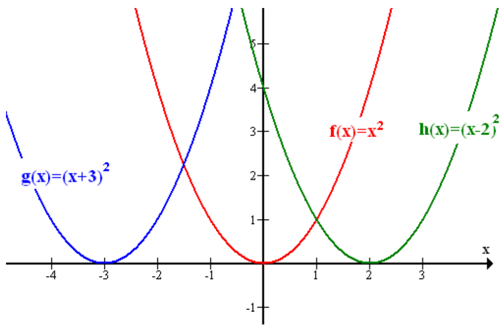
1. Όταν έχουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τότε η προβολή του γραφήματος πάνω στον οριζόντιο άξονα μας δίνει το σύνολο ορισμού της συνάρτησης ενώ η προβολή του γραφήματος πάνω στον κάθετο άξονα μας δίνει το σύνολο τιμών της.
2. Κάθε ευθεία της μορφής $x = x_0$ (κατακόρυφη ευθεία) μπορεί να έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ ένα κοινό σημείο.
3. Ένα σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $x_0 \in \mathrm{A}$ και $f(x_0) = y_0$.
4. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) > 0$ ενώ βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) < 0$.
5. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ για τα οποία ισχύει $f(x_0) = 0$.
6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$.
7. Όποτε σχεδιάζουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων καλό είναι να συμβολίζουμε με x την εξαρτημένη και y την ανεξάρτητη μεταβλητή κάθε συνάρτησης ασχέτως με ποιο γράμμα αυτή εμφανίζεται στην συνάρτηση.
8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x) + c$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα πάνω αν $c > 0$ και κατά c μονάδες προς τα κάτω αν $c < 0$.

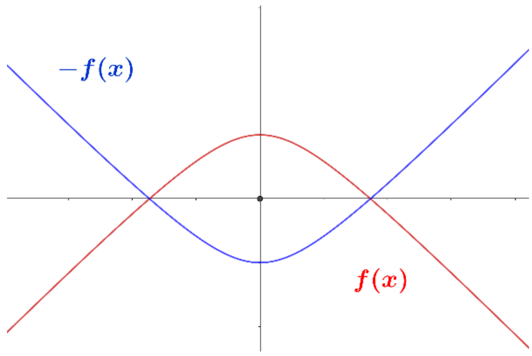
   Δίπλα δίνονται τα γραφήματα των $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ και $h(x) = x^2 - 2$.



9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x + c)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα αριστερά αν $c > 0$ και κατά c μονάδες προς τα δεξιά αν $c < 0$.

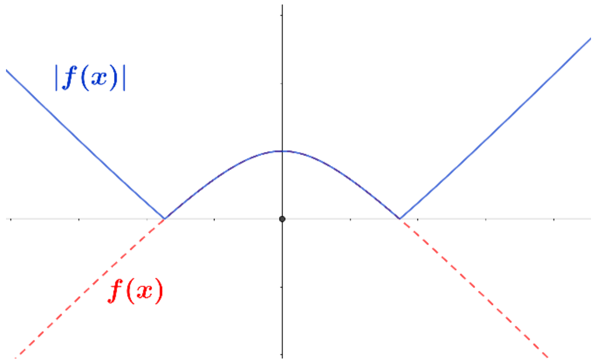
   Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές των $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+3)^2$ και $h(x) = (x-2)^2$.



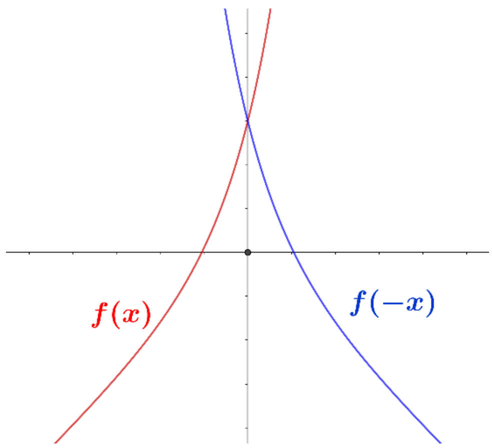


10. Η γραφική παράσταση της $g(x)=-f(x)$ είναι η συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

11. Η γραφική παράσταση της $g(x)=|f(x)|$, αποτελείται από όλα τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$, καθώς και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, τμήματα της της C_f που βρίσκονται κάτω από αυτόν.



12. Η γραφική παράσταση της $g(x)=f(-x)$ είναι η συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της f.



13. Έστω οι συναρτήσεις f,g και C_f,C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα, τότε για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των 2 συναρτήσεων (αν υπάρχουν) λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

14. Έστω οι συναρτήσεις f,g και C_f,C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα, τότε για να βρούμε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων σχηματίζουμε την διαφορά τους $h(x)=f(x)-g(x)$ και εξετάζουμε το πρόσημο της. Στα διαστήματα όπου $f(x)-g(x)>0$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g, ενώ όταν $f(x)-g(x)<0$ τότε η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f.

15. Δεν είναι δυνατόν να παραστήσουμε κάθε συνάρτηση γραφικά.

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet $f(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Εύκολα παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από τα άπειρα σημεία της μορφής $(\varrho,1)$ με $\varrho\in\mathbb{Q}$ τα οποία ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y=1$, και από τα άπειρα σημεία της μορφής $(a,0)$ με $a \notin \mathbb{Q}$, τα οποία ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y=0$.

Η δυσκολία στον σχεδιασμό της έγκειται στο ότι: οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει, ότι σε κάθε διάστημα (a,β) υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι. Έτσι η «εικόνα» της γραφικής παράστασης της συνάρτησης Dirichlet παραμένει εξ' ολοκλήρου στη φαντασία μας.

7. Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ θα ονομάζεται

- **άρτια** αν και μόνο αν για κάθε $x\in A \Rightarrow -x\in A$ και $f(x)=f(-x)$
- **περιττή** αν και μόνο αν για κάθε $x\in A \Rightarrow -x\in A$ και $f(x)=-f(-x)$

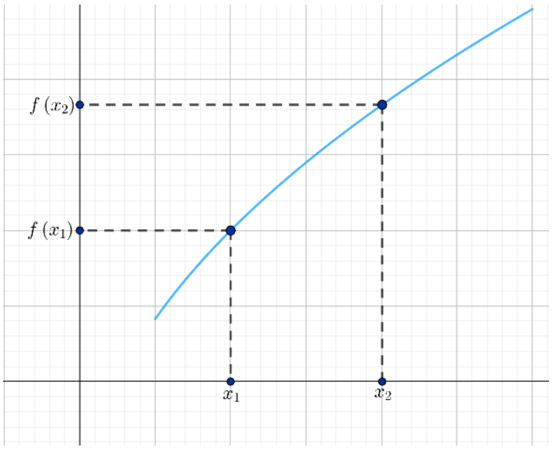
Προσοχή

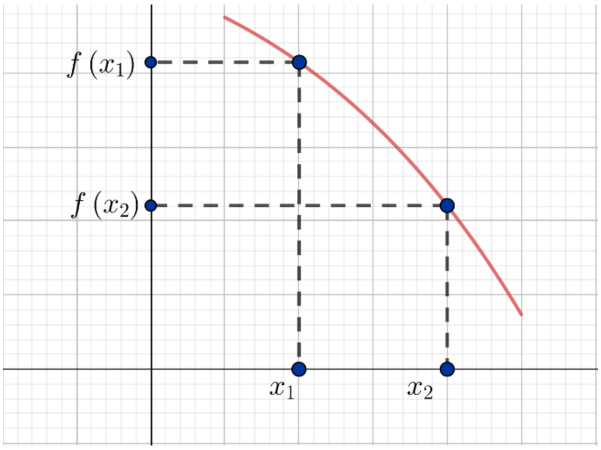
1. Μια συνάρτηση για να χαρακτηριστεί είτε άρτια είτε περιττή **πρέπει** το σύνολο ορισμού της να είναι συμμετρικό ως προς το 0.
2. Κάθε περιττή συνάρτηση διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν το 0 είναι στοιχείο του συνόλου ορισμού της.

   Πράγματι, αν $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathbb{R}$ περιττή και $0\in A$ τότε θα ισχύει ότι αν θέσω όπου x το 0 παίρνω $f(0)=-f(0)\Rightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.
3. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ ενώ η γραφική παράσταση μια περιττής είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

8. Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, **αν και μόνο αν** για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, **αν και μόνο** αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.





Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

Επιπλέον μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$, και φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται μονότονη.

Προσοχή

1. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε θα ισχύει ότι αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) < f(x_2)$ θα ισχύει $x_1 < x_2$.

   Πράγματι αν $f(x_1) < f(x_2)$ και $x_2 \leq x_1$ θα ισχύει ότι εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ υποχρεωτικά $f\left(x_2\right) \leq f\left(x_1\right)$. Άτοπο.

   Άρα $x_1 < x_2$.

2. Αντίστοιχα αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε θα ισχύει ότι αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) > f(x_2)$ θα ισχύει $x_1 < x_2$.

Άρα πλέον μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

- Αν f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Αν f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στην επίλυση ανισώσεων και στην απόδειξη ανισοτήτων.

3. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται **πάντα** σε συγκεκριμένα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και δεν κληρονομείται **πάντα** στην ένωση των διαστημάτων της.

Για παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα που ορίζεται αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}^*$.

4. Αν έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, δεν είναι υποχρεωτικό να υπάρχει διάστημα της μορφής (α, β) στο οποίο η f, να είναι γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, η οποία δεν διαθέτει αυτήν την ιδιότητα.

5. Η μονοτονία μιας συνάρτησης μελετάται με τους ακόλουθους τρόπους:

α. Σύνθεση (Κατασκευαστική Μέθοδος).

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$ και προχωρώντας κατασκευαστικά καταλήγουμε σε μια ανισοτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Για να γίνει αυτό απαιτείται πολύ καλή γνώση των ιδιοτήτων της διάταξης στο $\mathbb{R}$ που διδαχτήκαμε στην Α' Λυκείου καθώς και η μονοτονία των συναρτήσεων $e^x, \ln x$ που είναι γνωστές από Β Λυκείου. Είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά στις θεωρητικές ασκήσεις.

β. Λόγος μεταβολής.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2$ και σχηματίζουμε τον λόγο μεταβολής της συνάρτησης f, με $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

- $\lambda > 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A_f.

- $\lambda < 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.
- $\lambda \geq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι αύξουσα στο A_f.
- $\lambda \leq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο A_f.
- $\lambda = 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι σταθερή στο A_f.

γ. Αποσυνθετική μέθοδος.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) < f(x_2)$ και με ισοδυναμίες προσπαθούμε να αποσυνθέσουμε τον τύπο της f καταλήγοντας σε μια ανισοτική σχέση της μορφής $x_1 < x_2$ οπότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως αύξουσα, ή $x_1 > x_2$ οπότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.

δ. Με χρήση του προσήμου της διαφοράς $f(x_2) - f(x_1)$

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$ και σχηματίζουμε την διαφορά $\delta = f(x_2) - f(x_1)$ και έχουμε:

- $\delta > 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A_f.
- $\delta < 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.
- $\delta \geq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι αύξουσα στο A_f.
- $\delta \leq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο A_f.
- $\delta = 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι σταθερή στο A_f.

Θεωρήματα που ισχύουν για τις γνησίως μονότονες συναρτήσεις

Τα παρακάτω θεωρήματα – σχέσεις, πρέπει να αποδεικνύονται όποτε χρησιμοποιούνται μιας και δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο. Ωστόσο οι αποδείξεις τους είναι μικρές και εύκολες.

Θεώρημα 1: Μονοτονία και Σύνθεση

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A και η συνάρτηση g ορισμένη σε κάποιο σύνολο B. Με την προϋπόθεση ότι $A \cap g(B) \neq \varnothing$ ορίζεται η $f \circ g$ στο σύνολο $\Delta = \{x \in B / g(x) \in A\}$.

Να δείξετε ότι:

α. Αν οι f και g έχουν την ίδια μονοτονία στα σύνολα ορισμού τους, τότε και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β. Αν οι f και g έχουν διαφορετική μονοτονία στα σύνολα ορισμού τους, τότε και η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Απόδειξη

α 1. Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow$ (εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα)

$f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow$ (εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα)

$(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$.

Άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

α 2. Αν οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow$ (εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα)

$f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow$ (εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα)

$(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$.

Άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β 1. Αν f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow$ (εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα)

$f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$ (εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα)

$(f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$.

Άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

β 2. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και g είναι γνησίως αύξουσα.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow$ (εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα)

$f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$ (εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα)

$(f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$.

Άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Θεώρημα 2: Μονοτονία και Πράξεις Συναρτήσεων

(I) Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ που είναι γνησίως μονότονη στο A.

Να αποδείξετε ότι η $-f$ είναι επίσης γνησίως μονότονη στο A, με την αντίθετη μονοτονία.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A. (αντίστοιχα για γνησίως φθίνουσα)

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ (εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα)

$-f(x_1) > -f(x_2)$ (πολλαπλασιάζω με -1)

Άρα η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

(II) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν:

α. οι f και g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη

α. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1) (εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα)

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ (2) (εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα)

Από (1) + (2) έχω: $f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2) \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$.

Άρα η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα

β. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (1) (εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα)

$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ (2) (εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα)

Από (1) + (2) έχω:

$$f(x_1)+g(x_1) > f(x_2)+g(x_2) \Rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2).$$

Άρα η $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα

(III) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα τότε

α. η $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα

β. η $g-f$ είναι γνησίως φθίνουσα

Απόδειξη

α. Εφόσον g είναι γνησίως φθίνουσα τότε η $-g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $f-g=f+(-g)$ είναι γνησίως αύξουσα, ως άθροισμα γνησίως αυξουσών συναρτήσεων.

β. Ομοίως, εφόσον f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως η $g-f=g+(-f)$ είναι γνησίως φθίνουσα, ως άθροισμα γνησίως φθινουσών συναρτήσεων.

(IV) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in A$.

α. Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες (αντίστοιχα αύξουσες) στο A τότε και η $f\cdot g$ θα είναι ομοίως γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα αύξουσα) στο A.

β. Αν οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες (αντίστοιχα φθίνουσες) στο A τότε και η $f\cdot g$ θα είναι ομοίως γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) στο A.

Απόδειξη

α. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1<x_2\Rightarrow 0<f(x_1)<f(x_2)$ (1) (εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα)

$x_1<x_2\Rightarrow 0<g(x_1)<g(x_2)$ (2) (εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα)

Από $(1)\times(2)$ έχω: $f(x_1)\cdot g(x_1)<f(x_2)\cdot g(x_2)\Rightarrow(f\cdot g)(x_1)<(f\cdot g)(x_2)$.

Άρα η $f\cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα

β. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)>0$ (1) (εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα)

$x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)>0$ (2) (εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα)

Από $(1)\times(2)$ έχω: $f(x_1)\cdot g(x_1)>f(x_2)\cdot g(x_2)\Rightarrow(f\cdot g)(x_1)>(f\cdot g)(x_2)$.

Άρα η $f\cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα

(V) Έστω η γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα αύξουσα) συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$.

α. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) στο A.

β. Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A$ τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) στο A.

Απόδειξη

α. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

Τότε εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ (διαιρέσαμε και τα 2 μέλη με $0 < f(x_1) \cdot f(x_2)$).

Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

Τότε εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύουν τα ακόλουθα:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ (διαιρέσαμε και τα 2 μέλη με $0 < f(x_1) \cdot f(x_2)$). Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(VI) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

α. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα αύξουσα) τότε και η $\sqrt{f}$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα αύξουσα) στο A.

β. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) τότε και η $\sqrt{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) στο A.

Απόδειξη

α. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

Τότε εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{f(x_1)} < \sqrt{f(x_2)}$$

Άρα η $\sqrt{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β. Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

Τότε εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)}$$

Άρα η $\sqrt{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

Προσοχή:

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, είναι γνησίως μονότονη σε αυτό και υπάρχει $\varrho \in \Delta$ τέτοιο ώστε $f(\varrho) = 0$, τότε αυτός ο αριθμός είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε θα ισχύει ότι:

- για κάθε $x \in \Delta$ με $x < \varrho \Rightarrow f(x) < f(\varrho) \Rightarrow f(x) < 0$
- για κάθε $x \in \Delta$ με $x > \varrho \Rightarrow f(x) > f(\varrho) \Rightarrow f(x) > 0$

άρα δεν υπάρχει άλλο $x \in \Delta$ το οποίο να είναι ρίζα της συνάρτησης.

9. Ακρότατα Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.

Λέμε ότι η f **εμφανίζει** στο $x_1 \in A$ **μέγιστο** ίσο με $f(x_1)$, **αν και μόνο αν** $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε $x \in A$ και **ελάχιστο** στο $x_2 \in A$ ίσο με $f(x_2)$, **αν και μόνο αν** $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε $x \in A$.

Παρατήρηση

Η Αλγεβρική εύρεση των (ολικών) ακροτάτων μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους τρόπους:

α. Με χρήση των γνωστών ανισοταυτοτήτων.

β. Με την βοήθεια της μονοτονίας σε κλειστό διάστημα.

γ. Με την βοήθεια του συνόλου τιμών της συνάρτησης.

Προσοχή (Ακρότατα και Φράγματα)

Είναι σημαντικό να εξηγήσουμε την διαφορά μεταξύ ενός ακρότατου και ενός φράγματος.

Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι υπάρχει αριθμός $\varkappa \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) \le \varkappa$ για κάθε $x \in A$ δεν σημαίνει απαραίτητα ότι ο αριθμός $\varkappa$ είναι η μέγιστη τιμή της f.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το $\varkappa \in \mathbb{R}$ να είναι τιμή της f, δηλαδή να υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x_0) = \varkappa$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \le 5$, αλλά ο αριθμός 5 δεν αποτελεί μέγιστο για την f αλλά ένα φράγμα της. Μέγιστη τιμή της f είναι ο αριθμός 1.

Επίσης **δεν υποχρεούται κάθε συνάρτηση να έχει είτε ακρότατο είτε φράγμα.**

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \ne 0$ δεν έχει ούτε φράγματα, ούτε ακρότατα ενώ η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό $\varkappa \ge 2$ αλλά δεν έχει ελάχιστη τιμή το 2 εφόσον δεν υπάρχει κανένα στοιχείο $x>1$ για το οποίο η συνάρτηση να παίρνει την τιμή 2.

Η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\geq 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό $\kappa \geq 2$ και έχει ελάχιστη τιμή το $f(1)=2$.

Σημαντικό είναι να σημειώσουμε ότι μια συνάρτηση αν έχει ένα φράγμα θα έχει άπειρα, ενώ αν έχει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο αυτό θα είναι μοναδικό. Επιπλέον αν έχει ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) και κανένα άλλο αυτό δεν σημαίνει ότι έχει και ολικό μέγιστο (ελάχιστο).

10. Συνάρτηση «1-1»

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση «1-1»**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \text{, τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ισοδύναμα ισχύει ότι μια συνάρτηση . $f: A \to \mathbb{R}$. είναι **συνάρτηση «1-1»**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2) \text{, τότε } x_1 = x_2 .$$

Πράγματι αν $x_1 \neq x_2$, τότε εφόσον η συνάρτηση f είναι «1-1» θα ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$ που είναι άτοπο. Άρα $x_1 = x_2$.

Η παραπάνω πρόταση είναι μια απλή εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαντιστροφής, ο οποίος ισχύει για κάθε πρόταση της μορφής, **«αν … τότε …»**

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν:

1. Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

   Πράγματι εφόσον για κάθε εικόνα $y \in f(A)$, βρίσκεται ένα και μόνο πρότυπο $x \in A$ (δηλαδή με $f(x)=y$).

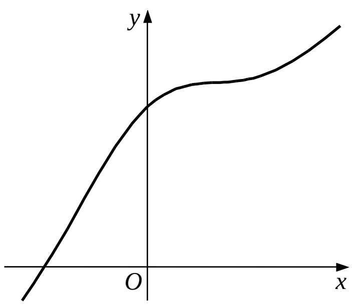
Έτσι αν για κάποιο $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει δυο διαφορετικές λύσεις, έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ θα ισχύει για αυτές $f(x_1) = y$ και $f(x_2) = y$. Άρα η συνάρτηση f δεν είναι «1-1». Άτοπο.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x, τότε η συνάρτηση f θα είναι «1-1».

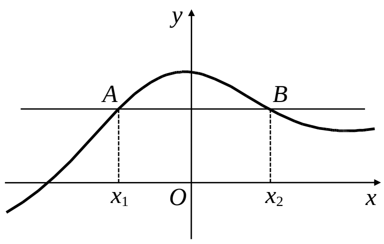
Πράγματι, αν η συνάρτηση δεν ήταν «1-1», θα υπήρχαν κάποια $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Όμως τότε η εξίσωση $f(x) = y_0$, έχει δυο διαφορετικές λύσεις τις $x_1, x_2 \in A$. Άτοπο, άρα η συνάρτηση θα είναι «1-1».

2. Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



συνάρτηση 1-1



συνάρτηση όχι 1-1

Βασική Ιδιότητα (1)

Αν μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε η εξίσωση $f(x) = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μια λύση.

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = a$, με $x \in A$ και $a \in \mathbb{R}$ έχει 2 διαφορετικές λύσεις, τις $\varrho_1, \varrho_2 \in A$ με $\varrho_1 \neq \varrho_2$. Τότε θα ισχύει ότι $f(\varrho_1) = a$ και $f(\varrho_2) = a$. Επομένως $f(\varrho_1) = f(\varrho_2)$. Άρα η f δεν είναι «1-1». Άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x) = a$ με $x \in A$ και $a \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μια λύση.

Βασική Ιδιότητα (2)

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση «1-1».

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο A. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (ομοίως λειτουργούμε και για γνησίως φθίνουσα). Τότε από ορισμό για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ και επομένως $x_1\neq x_2$ θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ και επομένως $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση θα είναι «1-1».

Προσοχή:

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή υπάρχουν «1-1» συναρτήσεις που όμως δεν είναι γνησίως μονότονες σε όλο το σύνολο ορισμού τους.

   Για παράδειγμα η $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$ ή η $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$.

2. Το άθροισμα και το γινόμενο δυο συναρτήσεων που είναι «1-1», **δεν είναι απαραίτητα** και αυτό «1-1» συνάρτηση.

   Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ και $g(x)=-x$ είναι και οι δυο «1-1», αλλά ούτε το άθροισμα τους είναι «1-1» (είναι η σταθερή συνάρτηση $(f+g)(x)=0$ ούτε το γινόμενό τους είναι «1-1» (είναι η συνάρτηση παραβολή $(f\cdot g)(x)=x^2$).

3. Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε και κάθε συνάρτηση – περιορισμός της θα είναι επίσης «1-1». Δηλαδή, αν η f είναι «1-1» στο σύνολο A τότε θα είναι «1-1» και σε κάθε μη κενό υποσύνολο του Α.

4. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι «1-1» αρκεί να βρούμε ένα ζεύγος $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ για τα οποία $f(x_1)=f(x_2)$.

   Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^2$ δεν είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$ εφόσον $-1\neq 1$ αλλά $f(-1)=1=f(1)$.

Θεωρήματα που ισχύουν για τις «1-1» συναρτήσεις

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A και η συνάρτηση g ορισμένη σε κάποιο σύνολο B. Με την προϋπόθεση ότι $A \cap g(B) \neq \varnothing$ ορίζεται η $f \circ g$ στο σύνολο $\Delta = \{x \in B / g(x) \in A\}$ να δείξετε ότι:

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι «1-1» τότε και η σύνθεση $f \circ g$ είναι «1-1».

β. Αν η $f \circ g$ είναι «1-1», τότε και η g είναι «1-1».

Απόδειξη

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ ισχύει:

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow$$
$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \overset{f \text{ είναι 1-1}}{\Rightarrow}$$
$$g(x_1) = g(x_2) \overset{g \text{ είναι 1-1}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η $f \circ g$ είναι «1-1».

β. Για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $g(x_1) = g(x_2)$ ισχύει:

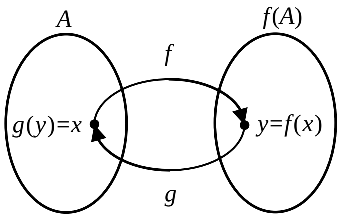
$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \overset{f \circ g \text{ είναι 1-1}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι «1-1»

11. Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι «1-1», τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών $f(A)$ της f, υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση την οποία καλούμε αντίστροφη της f, συμβολίζεται με $f^{-1} : f(A) \to A$ και με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.



Από τον τρόπο που ορίστηκε η f^{-1} προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της . f .,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Οπότε $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$

Προσοχή:

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A_f$ τότε θα ισχύει υποχρεωτικά ότι $g = f^{-1}$ και $f = g^{-1}$;

Όχι.

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι «1-1» άρα αντιστρέψιμη, αλλά δεν μπορούμε να πάρουμε κάποιο αποτέλεσμα για την αντιστρεψιμότητα της g.

Πράγματι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1} \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|}, & \text{αν } x \in (-1,1) \\ 1, & \text{αν } x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases} \text{ με } x \in \mathbb{R},$$

εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $A_f=\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})=(-1,1)$, $A_g=\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(f(x))=x$, αλλά η συνάρτηση g δεν είναι «1-1».

Αν όμως για τις συναρτήσεις f,g ισχύει $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in A_f$ και επιπλέον η g είναι γνησίως μονότονη, είτε το $f(A_f)=A_g$ τότε θα ισχύει υποχρεωτικά ότι $g=f^{-1}$ και $f=g^{-1}$.

Θεωρήματα που ισχύουν για τις Αντιστρέψιμες συναρτήσεις

Τα Θεωρήματα που ακολουθούν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις ασκήσεις ή στις εξετάσεις αφού πρώτα αποδειχτούν, μιας και δεν αποτελούν κομμάτι από την θεωρία του βιβλίου, ούτε ασκήσεις, ούτε υπονοούνται καθ' οποιονδήποτε τρόπο.

1. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο ορισμού της τότε και η αντίστροφή της θα είναι γνησίως μονότονη στο δικό της σύνολο ορισμού και με την ίδια μονοτονία.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο A.

Ας υποθέσουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα (με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα).

Τότε η συνάρτηση αντιστρέφεται (αποδείξαμε νωρίτερα ότι είναι «1-1»).

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f^{-1}:f(A)\to A$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Δηλαδή ότι για κάθε $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2\Rightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω δηλαδή ότι υπάρχουν $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ και $f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A θα ισχύει ότι $f(f^{-1}(y_1))\geq f(f^{-1}(y_2))\Rightarrow y_1\geq y_2$ που είναι άτοπο.

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

2. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημόριου.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ η οποία αντιστρέφεται.

Έχουμε: $M(a,\beta)\in C_f \Leftrightarrow f(a)=\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=a \Leftrightarrow M'(\beta,a)\in C_{f^{-1}}$.

Τα σημεία $M(a,\beta)$ και $M'(\beta,a)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$ έπεται ότι και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} θα είναι συμμετρικές ως προς την παραπάνω ευθεία.

3. Οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι πάντα ισοδύναμες για κάθε $x\in A\cap f(A)$, όπου A το σύνολο ορισμού της f και $f(A)$ το σύνολο τιμών της.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ η οποία είναι «1-1» και επομένως αντιστρέφεται με αντίστροφη την $f^{-1}:f(A)\to A$.

Θα δείξω ότι αν x_0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=x$, δηλαδή αν $f(x_0)=x_0$ τότε θα είναι υποχρεωτικά λύση και της $f^{-1}(x)=x$, δηλαδή $f^{-1}(x_0)=x_0$ και ισχύει και το αντίστροφο.

Πράγματι έστω $x_0\in A\cap f(A)$ τότε

$$f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_0))=f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow f^{-1}(x_0)=x_0$$

4. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες για κάθε $x\in A\cap f(A)$.[1]

1η Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση . $f:A\to\mathbb{R}$. η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο Α και $x_0\in A\cap f(A)$ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$. Θα αποδείξω ότι αυτή είναι υποχρεωτικά και ρίζα της

[1] Το θεώρημα αυτό, εκφράζει γεωμετρικά το γεγονός ότι οι γραφικές παραστάσεις της συναρτήσεις f και της αντίστροφής της (αν η f είναι γνησίως αύξουσα) αν έχουν κοινά σημεία αυτά θα βρίσκονται πάνω στην διχοτόμο της γωνίας του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημόριου.

$f(x)=x$ και αντίστροφα αν x_0 είναι ρίζα της $f(x)=x$ θα είναι και ρίζα της $f(x)=f^{-1}(x)$.

<u>Ευθύ:</u>

Εφόσον x_0 ρίζα της $f(x)=f^{-1}(x)$ θα ισχύει ότι $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$.

Έστω ότι x_0 δεν είναι ρίζα της $f(x)=x$ δηλαδή $f(x_0)\neq x_0$.

Τότε θα πρέπει $f(x_0)>x_0$ ή $f(x_0)<x_0$.

- Αν $f(x_0)>x_0$ θα έχω:

  $$f(x_0)>x_0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(f(x_0))>f(x_0) \overset{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_0))>f(x_0) \Rightarrow x_0>f(x_0)$$

  που είναι άτοπο.

- Αν $f(x_0)<x_0$ τότε θα έχω:

  $$f(x_0)<x_0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(f(x_0))<f(x_0) \overset{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_0))<f(x_0) \Rightarrow x_0<f(x_0)$$

  που είναι άτοπο.

Σε κάθε περίπτωση $f(x_0)=x_0$.

<u>Αντίστροφο</u>

Έστω ότι x_0 είναι ρίζα της $f(x)=x$ δηλαδή $f(x_0)=x_0$.

Τότε από προηγούμενη απόδειξη θα ισχύει ότι $f^{-1}(x_0)=x_0$.

Από τα παραπάνω έχω: $\left.\begin{array}{l} f(x_0)=x_0 \\ f^{-1}(x_0)=x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)=f^{-1}(x_0)$.

Άρα το x_0 θα είναι ρίζα και της $f(x)=f^{-1}(x)$.

<u>2η Απόδειξη</u>

Η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει σύνολο ορισμού το $A\cap f(A)$.

Με $x\in A\cap f(A)$ έχουμε

$$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x))=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow$$
$$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(f(x))+f(x)=x+f(x) \quad (1)$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=x+f(x)$ με $x\in A\cap f(A)$.

Για αυτήν ισχύει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με

$$x_1 < x_2 \overset{f \text{ γν. αυξ}}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A \cap f(A)$ και επομένως είναι 1-1.

Άρα η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(f(x)) + f(x) = x + f(x) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Επιπλέον για κάθε $x \in A \cap f(A)$ ισχύει:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x).$$

Παρατήρηση

Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα δεν ισχύει το θεώρημα.

Για παράδειγμα ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x) = 1 - x$ με $x \in \mathbb{R}$.

Η αντίστροφή της είναι $f^{-1}(x) = 1 - x$ (δηλαδή ο εαυτός της) καθώς $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1-x) = 1 - (1-x) = x$.

Τα σημεία $(a, 1-a)$ βρίσκονται στο γράφημα και των δύο, δηλαδή ικανοποιούν την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$. Πλην όμως με εξαίρεση το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ κανένα άλλο δεν ικανοποιεί την $f(x) = x$ ή την $f(x) = -x$ (άμεσο με έλεγχο).

5. Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν μοναδικό κοινό σημείο, τότε αυτό υποχρεωτικά θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.

Απόδειξη

Έστω ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(a, \beta)$.

Τότε θα ισχύει: $$\left.\begin{matrix} M(a,\beta) \in C_f \\ M(a,\beta) \in C_{f^{-1}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(a) = \beta \\ f^{-1}(a) = \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f^{-1}(\beta) = a \\ f(\beta) = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} (\beta, a) \in C_{f^{-1}} \\ (\beta, a) \in C_f \end{matrix}$$

Άρα και το σημείο (β,a) είναι κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Όμως από υπόθεση αυτό το σημείο είναι μοναδικό.

Οπότε θα πρέπει $(a,\beta)=(\beta,a)$ και επομένως $a=\beta$.

Άρα το σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$.