Η Έννοια της Συνάρτησης

Το βασικό χαρακτηριστικό της έννοιας **«πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο** A» είναι:

«σε **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί **ένας μοναδικός** πραγματικός αριθμός $y \in \mathbb{R}$», που σημαίνει ότι δεν θα πρέπει σε ένα στοιχείο του A να αντιστοιχίζονται δυο ή περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί.

Άρα τα κοινά πρότυπα, εφόσον υπάρχουν, πρέπει να έχουν ίσες εικόνες!

Μέθοδος 1: Τα κοινά πρότυπα, έχουν κοινές εικόνες.

Παράδειγμα 1: Εξετάστε αν ο τύπος $f\left(x\right)=\begin{cases}-2x, & \text{αν } x\le 0\\ 3\sqrt{x}, & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$ ορίζει συνάρτηση.

Λύση

Ο κάθε κλάδος της f για κάθε $x\neq 0$ ορίζει προφανώς συνάρτηση.

Θα πρέπει οι δυο κλάδοι της σχέσης για $x=0$ να δίνουν το ίδιο $f\left(0\right)$.

Ο πρώτος τύπος για $x=0$ δίνει $f\left(0\right)=-2\cdot 0=0$.

Ο δεύτερος τύπος για $x=0$ δίνει $f\left(0\right)=3\cdot 0=0$.

Οπότε ο τύπος f ορίζει συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Μέθοδος 2: Διαφορετικές εικόνες, προέρχονται από διαφορετικά πρότυπα.

Για να βρούμε για ποιες τιμές του x έχει νόημα μια σχέση, λύνουμε τη σχέση ως προς y και καταλήγουμε ότι $y=f\left(x\right)$.

Στη συνέχεια επειδή $y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f\left(x\right)\in\mathbb{R}$, σχέση η οποία, εφόσον κρατηθούν οι ισοδυναμίες στις πράξεις, μας οδηγεί στην εύρεση των x, δηλαδή βρίσκουμε ένα σύνολο A, για κάθε x του οποίου ορίζεται η σχέση.

Παράδειγμα 2: Έστω η σχέση $x+y^2=10$ με ανεξάρτητη μεταβλητή την x και εξαρτημένη μεταβλητή την y .

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα.

β. Δείξτε ότι η σχέση αυτή δεν ορίζει συνάρτηση.

Λύση

Προσοχή!

Για να δείξουμε ότι η σχέση αυτή δεν ορίζει συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη το y , αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ το οποίο σχετίζεται με τουλάχιστον δυο $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Συνήθως το τελευταίο το δείχνουμε με αντιπαράδειγμα.

Έχουμε $x + y^2 = 10 \Leftrightarrow y^2 = 10 - x$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Αναζητούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$10 - x \geq 0 \Leftrightarrow$
$x \leq 10$

Άρα η παραπάνω σχέση, ορίζει συνάρτηση ως προς x όταν και μόνο όταν $x \in (-\infty, 10]$. Το παραπάνω σύνολο είναι και το σύνολο ορισμού της συνάρτησης.

2. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 10]$ με αντίστοιχες εικόνες τους αριθμούς $y_1 = 3$ και $y_2 = -3$ αντίστοιχα. Αν η παραπάνω σχέση παριστάνει συνάρτηση θα πρέπει εφόσον $y_1 \neq y_2$ να ισχύει ότι $x_1 \neq x_2$.

Όμως $y_1^2 = y_2^2 \Rightarrow 10 - x_1 = 10 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η παραπάνω σχέση δεν ορίζει συνάρτηση.

Εύρεση Συνόλου Ορισμού Συνάρτησης

Το σύνολο (πεδίο) ορισμού μιας συνάρτησης είναι το “ευρύτερο” υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ **έχει νόημα πραγματικού αριθμού**.

Για την εύρεσή του θέτουμε όλους τους απαραίτητους περιορισμούς, χωρίς να ξεχνάμε ότι αυτοί **είναι αναγκαίες και ικανές συνθήκες** για να ορίζεται η συνάρτηση.

Επομένως, **δεν «πρέπει»** να ισχύουν οι περιορισμοί, **αλλά «πρέπει και αρκεί»**, και η συνάρτηση ορίζεται «**όταν και μόνο όταν**» ισχύουν αυτοί, και όχι απλώς «όταν» ισχύουν.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-1}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-5x+6\geq 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (x-2)(x-3)\geq 0 \\ x^2\neq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\leq 2 \text{ ή } x\geq 3 \\ x\neq -1 \text{ και } x\neq 1 \end{array}\right\}$$

Άρα $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$.

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\ln x\geq 0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln x\leq 1 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln x\leq \ln e \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\leq e \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0<x\leq e.$$

Άρα $D_f=(0,e]$.

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-\eta\mu x}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν: $1-\eta\mu x\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq \eta\mu x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Άρα $D_f=\mathbb{R}$.

Προσοχή: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

Παρατήρηση:

Για την εύρεση του συνόλου ορισμού μιας συνάρτησης είναι απαραίτητη η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων που περιέχουν πολυώνυμα, τριγωνομετρικούς αριθμούς, λογάριθμους και εκθετικές συναρτήσεις, απόλυτα, ρίζες και όλα όσα έχετε διδαχτεί στις 2 προηγούμενες τάξεις του Λυκείου.

Οπότε μια καλή γνώση όλων των τεχνικών που έχουν παρουσιαστεί, είναι απαραίτητο για να μπορέσετε να ανταπεξέλθετε σε μεγαλύτερης δυσκολίας θέματα.

Εύρεση Συνόλου Τιμών Συνάρτησης

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f που έχει σύνολο ορισμού το σύνολο A, είναι εκείνο το σύνολο $f(A)$ που αποτελείται από κάθε $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει κάποιο $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Με άλλα λόγια το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των αριθμών $y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = y$ (με άγνωστο τον x) έχει μια τουλάχιστον λύση στο A.

Για να το βρούμε, βρίσκουμε αρχικά το σύνολο ορισμού της f (αν δεν δίνεται) και θεωρούμε ένα τυχαίο $y \in f(A)$. Λύνουμε τον τύπο της συνάρτησης f ως προς x, δηλαδή επιλύουμε τη σχέση $y = f(x)$ ως προς x και καταλήγουμε στη σχέση $x = g(y)$, δηλαδή εκφράζουμε το x συναρτήσει του y.

Προσέχουμε πολύ ώστε κατά την διάρκεια της επίλυσης να θέτουμε τις συνθήκες εκείνες (περιορισμοί για να διατηρούνται οι ισοδυναμίες μεταξύ των διαδοχικών πράξεων) που πρέπει να ικανοποιεί το y, ώστε να έχει νόημα η διαδικασία της επίλυσης.

Επειδή $x \in A$, απαιτούμε $g(y) \in A$, οπότε βρίσκουμε και άλλες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το y και συναληθεύοντας όλες τις συνθήκες που προέρχονται από την όλη διαδικασία, βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(A)$.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x + 1$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει, ως πολυωνυμική, για σύνολο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Άρα $A = \mathbb{R}$.

Έστω κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$y \in f(A) \Leftrightarrow$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $2x + 1 = y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x = \dfrac{y-1}{2}$.

Έτσι έχουμε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \mathbb{R}$

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{3-x}}$

Λύση

Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 1-\sqrt{3-x} \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq \sqrt{3-x} \\ 3 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3-x \\ 3 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

Άρα $A = [2,3]$.

Έστω κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$y \in f(A) \Leftrightarrow$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $\sqrt{1-\sqrt{3-x}} = y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $1-\sqrt{3-x} = y^2$ με $y \geq 0$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $\sqrt{3-x} = 1-y^2$ με $y \geq 0$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $3-x = (1-y^2)^2$ με $y \geq 0$ και $1-y^2 \geq 0$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [2,3]$ τέτοιο ώστε $x = 3-(1-y^2)^2$ με $y \geq 0$ και $1-y^2 \geq 0$

Έτσι έχουμε τους περιορισμούς:

1. $y \geq 0$
2. $1-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$
3. $x \in [2,3] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 3-(1-y^2)^2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq -(1-y^2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

   $0 \leq (1-y^2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |1-y^2| \leq 1 \Leftrightarrow |1-y^2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1-y^2 \leq 1 \Leftrightarrow$

   $-2 \leq -y^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 \leq 2 \Leftrightarrow y^2 \leq 2 \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

Οι περιορισμοί (1), (2) και (3) συναληθεύουν στο διάστημα $[0,1]$.

Άρα $f(A)=[0,1]$

Διαφορετικά:

Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης όπως είδαμε είναι το $\mathrm{A}=[2,3]$.

Θα βρούμε τους αριθμούς $y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x)=y$ με άγνωστο το x έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\mathrm{A}=[2,3]$.

Με $x\in\mathrm{A}=[2,3]$ και $y\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$f(x)=y$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{3-x}}=y$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{3-x}=y^2$ με $y\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}=1-y^2$ με $y\geq 0$

$\Leftrightarrow 3-x=\left(1-y^2\right)^2$ με $y\geq 0$ και $1-y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow x=3-\left(1-y^2\right)^2$ με $y\geq 0$ και $1-y^2\geq 0$

Άρα η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση αν και μόνο αν

1. $y\geq 0$
2. $1-y^2\geq 0\Leftrightarrow y^2\leq 1\Leftrightarrow |y|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq y\leq 1$
3. $x\in[2,3]\Leftrightarrow 2\leq x\leq 3\Leftrightarrow 2\leq 3-\left(1-y^2\right)^2\leq 3\Leftrightarrow -1\leq -\left(1-y^2\right)^2\leq 0\Leftrightarrow$

   $0\leq\left(1-y^2\right)^2\leq 1\Leftrightarrow 0\leq\left|1-y^2\right|\leq 1\Leftrightarrow\left|1-y^2\right|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq 1-y^2\leq 1\Leftrightarrow$

   $-2\leq -y^2\leq 0\Leftrightarrow 0\leq y^2\leq 2\Leftrightarrow y^2\leq 2\Leftrightarrow |y|\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$

Οι περιορισμοί (1), (2) και (3) συναληθεύουν στο διάστημα $[0,1]$.

Άρα $f(A)=[0,1]$

Προσοχή: Όποτε χρειάστηκε να υψώσουμε στο τετράγωνο και τα 2 μέλη μιας από τις παραπάνω εξισώσεις, απαιτήσαμε να είναι και τα 2 ομόσημοι αριθμοί, στην συγκεκριμένη περίπτωση μη αρνητικοί. Αυτές οι απαιτήσεις μας έδωσαν τους απαραίτητους περιορισμούς (1) και (2).

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:[-1,8]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2x+1$.

Λύση

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια πολύ διαφορετική συνάρτηση από το παράδειγμα 1. Μπορεί οι 2 συναρτήσεις να έχουν τον ίδιο τύπο, αλλά η $2^η$ ορίζεται μόνο για όσα $x\in[-1,8]$ και όχι για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το γεγονός ότι η συνάρτηση μας μπορεί να οριστεί και σε ευρύτερο σύνολο από αυτό που μας έχουν ήδη δώσει, δεν είναι κάτι που μας απασχολεί. Εμείς θα εργαστούμε με $A=[-1,8]$

Η συνάρτηση f έχει σύνολο ορισμού το σύνολο $A=[-1,8]$.

Έστω κάποιο $y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$y\in f(A)\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in A$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in[-1,8]$ τέτοιο ώστε $2x+1=y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in[-1,8]$ τέτοιο ώστε $x=\frac{y-1}{2}$.

Έτσι έχουμε:

$$x\in[-1,8]\Leftrightarrow -1\le x\le 8\Leftrightarrow -1\le\frac{y-1}{2}\le 8\Leftrightarrow -2\le y-1\le 16\Leftrightarrow -1\le y\le 17.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f=[-1,17]$.

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν: $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Άρα $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Έστω κάποιο $y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$y\in f(A)\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in A$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{2x-1}{x-1}=y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $2x-1=y(x-1)$.

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $2x-1=yx-y$.

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $2x-yx=1-y$.

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $(2-y)x=1-y \quad (1)$.

Για να λύσουμε την (1) ως προς x πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $2-y=0\Leftrightarrow y=2$ η (1) γράφεται: $0\cdot x=-1$ που είναι αδύνατη.
- Αν $2-y\neq 0\Leftrightarrow y\neq 2$ η (1) γράφεται ισοδύναμα: $x=\dfrac{1-y}{2-y}$

Έτσι έχουμε τους περιορισμούς:

1. $y\neq 2$
2. $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\Leftrightarrow x\neq 1\Leftrightarrow \dfrac{1-y}{2-y}\neq 1\Leftrightarrow 1-y\neq 2-y\Leftrightarrow 1\neq 2$ που ισχύει.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$

Λύση

Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει και αρκεί:

$$4x-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-4x\leq 0\Leftrightarrow x(x-4)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq 4$$

Άρα $A=[0,4]$.

Έστω κάποιο $y\in\mathbb{R}$.

Τότε: $y\in f(A)\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in A$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $\sqrt{4x-x^2}=y$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $4x-x^2=y^2$ με $y\geq 0$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $x^2-4x+y^2=0\quad (E)$ με $y\geq 0$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4y^2}}{2}$ με $y\geq 0$ και $16-4y^2\geq 0$

Έτσι έχουμε τους περιορισμούς:

1. $y\geq 0$
2. $16-4y^2\geq 0\Leftrightarrow 16\geq 4y^2\Leftrightarrow 4\geq y^2\Leftrightarrow 2\geq|y|\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2$
3. $x\in[0,4]\Leftrightarrow 0\leq x\leq 4\Leftrightarrow 0\leq\dfrac{4\pm\sqrt{16-4y^2}}{2}\leq 4\Leftrightarrow 0\leq 4\pm\sqrt{16-4y^2}\leq 8\Leftrightarrow$

   $-4\leq\pm\sqrt{16-4y^2}\leq 4\Leftrightarrow\left|\pm\sqrt{16-4y^2}\right|\leq 4\Leftrightarrow 16-4y^2\leq 16\Leftrightarrow -4y^2\leq 0$

   $\Leftrightarrow y^2\geq 0$ που ισχύει.

Οι περιορισμοί (1), (2) και (3) συναληθεύουν στο διάστημα $[0,2]$. Άρα $f(A)=[0,2]$

Προσοχή: Η (Ε) είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x. Για οποιοδήποτε y (εικόνα) που ψάχνουμε να βρούμε η δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει έχει λύσεις τα αντίστοιχα x (πρότυπα) που είναι πραγματικοί αριθμοί, διότι ανήκουν στο $A\subseteq\mathbb{R}$, άρα έχει $\Delta\geq 0$, οπότε και πήραμε τον περιορισμό $16-4y^2\geq 0$.

Παράδειγμα 6: Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\begin{cases}-3x+1, & \text{αν } x<1\\ \ln x, & \text{αν } x\leq 1\end{cases}$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}=A_1\cup A_2$, όπου $A_1=(-\infty,1)$ και $A_2=[1,+\infty)$.

Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=-3x+1$ για κάθε $x\in A_1=(-\infty,1)$ και $f_2(x)=\ln x$ για κάθε $x\in A_2=[1,+\infty)$.

Έστω κάποιο $y\in\mathbb{R}$.

Τότε: $y\in f(A)\Leftrightarrow y\in f(A_1)\cup f(A_2)$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in A_1\cup A_2$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in A_1$ τέτοιο ώστε $f_1(x)=y$ ή υπάρχει $x\in A_2$ τέτοιο ώστε $f_2(x)=y$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in(-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $-3x+1=y$ ή $x\in[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\ln x=y$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in(-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $x=\dfrac{1-y}{3}$ ή υπάρχει $x\in[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $x=e^y$

Έτσι έχουμε τον περιορισμό:

$$x\in(-\infty,1)\Leftrightarrow x<1\Leftrightarrow\frac{1-y}{3}<1\Leftrightarrow 1-y<3\Leftrightarrow y>-2$$

ή

$$x\in[1,+\infty)\Leftrightarrow x\geq 1\Leftrightarrow e^y\geq 1\Leftrightarrow e^y\geq e^0\Leftrightarrow y\geq 0$$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-2,+\infty)\cup[0,+\infty)=(-2,+\infty)$.

Προσοχή: Για να δείξω ότι μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο B θα πρέπει να δείξω:

α. $f(x)\in\mathrm{B}$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$ και

β. για κάθε $\beta\in\mathrm{B}$ υπάρχει $a\in\mathrm{A}$ τέτοιο ώστε $f(a)=\beta$.

Πολλές φορές νομίζουμε ότι η συνθήκη **(β)** είναι ικανή από μόνη της για να ισχύει ότι $f(\mathrm{A})=\mathrm{B}$, αλλά στην πραγματικότητα το μόνο που μας λέει είναι ότι $\mathrm{B}\subseteq f(\mathrm{A})$. Είναι η συνθήκη **(α)** η οποία μας εξασφαλίζει ότι $f(\mathrm{A})\subseteq \mathrm{B}$ και επομένως $f(\mathrm{A})=\mathrm{B}$.

Αντί-Παράδειγμα 7: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathrm{B}=(0,+\infty)$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x\in\mathbb{R}$.

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, δηλαδή

αρκεί να δείξω ότι για κάθε $y\in(0,+\infty)$ υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$.

αρκεί να δείξω ότι για κάθε $y\in(0,+\infty)$ υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $e^x-1=y$.

αρκεί να δείξω ότι για κάθε $y\in(0,+\infty)$ υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $e^x=y+1$.

αρκεί να δείξω ότι για κάθε $y\in(0,+\infty)$ υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x=\ln(y+1)$.

Επομένως $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

Προφανώς όλη η παραπάνω διαδικασία είναι ελλιπής μιας και το μόνο που έχω αποδείξει είναι ότι $(0,+\infty)\subseteq f(\mathbb{R})$.

Είναι αναγκαίο να αποδείξω και ότι $f(x)\in(0,+\infty)$ δηλαδή ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο όμως δεν ισχύει!

Το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης στην πραγματικότητα είναι το $(-1,+\infty)$, το οποίο μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε με τον ορισμό.

Άλγεβρα Συναρτήσεων (Ισότητα Συναρτήσεων και Πράξεις)

Δυο συναρτήσεις f,g είναι ίσες αν και μόνο αν

1. έχουν κοινό Πεδίο Ορισμού Α και
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Παράδειγμα 1: Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\left|x+|x|\right|-\left|x-|x|\right|}{2}$ και $g(x)=x$ είναι ίσες.

Λύση

Η συνάρτηση f και η συνάρτηση g ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα έχουν το ίδιο σύνολο ορισμού $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $-|x| \le x \le |x| \Leftrightarrow \begin{cases} -|x| \le x \\ x \le |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x+|x| \\ x-|x| \le 0 \end{cases}$.

Η συνάρτηση f για το τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$f(x_0)=\frac{\left|x_0+|x_0|\right|-\left|x_0-|x_0|\right|}{2}=\frac{x_0+|x_0|+x_0-|x_0|}{2}=\frac{2x_0}{2}=x_0=g(x_0).$$

Άρα $f(x)=g(x)$.

Παράδειγμα 2: Να εξετάσετε αν υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^3-(k+1)x^2+(k+1)x-k}{x^3+1}$ και $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ να είναι ίσες.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν: $x^3+1 \ne 0 \Leftrightarrow x^3 \ne -1 \Leftrightarrow x \ne -1$.

Η συνάρτηση g ορίζεται όταν και μόνο όταν: $x+1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -1$. Άρα $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

Για να είναι ίσες οι συναρτήσεις f και g αρκεί και πρέπει για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow \frac{{x_0}^3-(k+1){x_0}^2+(k+1)x_0-k}{{x_0}^3+1}=\frac{x_0-1}{x_0+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_0^3-kx_0^2-x_0^2+kx_0+x_0-k}{(x_0+1)(x_0^2-x_0+1)}=\frac{x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow\frac{x_0(x_0^2-x_0+1)-k(x_0^2-x_0+1)}{(x_0+1)(x_0^2-x_0+1)}=\frac{x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x_0-k)(x_0^2-x_0+1)}{(x_0+1)(x_0^2-x_0+1)}=\frac{x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow\frac{x_0-k}{x_0+1}=\frac{x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow x_0-k=x_0-1\Leftrightarrow k=1$$

Άρα $f=g$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν και μόνο όταν $k=-1$.

Παράδειγμα 3: Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$ αν $f(x)=\sqrt{2x-\sqrt{x}}$ και $g(x)=\frac{2x-4}{x^2-1}$.

Λύση

Αρχικά θα βρω τα σύνολα ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\sqrt{x}\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq\sqrt{x}\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2\geq x\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-x\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(4x-1)\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(4x-1)\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0 \text{ ή } x\geq\frac{1}{4}\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{0\}\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$$

Άρα $A_f=\{0\}\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

Η συνάρτηση g ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

Άρα $A_g=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Η συνάρτηση $f+g$ έχει σύνολο ορισμού το $A_{f+g}=A_f\cap A_g=\{0\}\cup\left[\frac{1}{4},1\right)\cup(1,+\infty)$ με τύπο: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{2x-\sqrt{x}}+\frac{2x-4}{x^2-1}$

Αντίστοιχα η $f\cdot g$ έχει σύνολο ορισμού το $A_{f\cdot g}=A_f\cap A_g=\{0\}\cup\left[\frac{1}{4},1\right)\cup(1,+\infty)$ με τύπο: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{2x-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2x-4}{x^2-1}$.

Για την $\dfrac{f}{g}$ θα πρέπει επιπλέον $g(x)\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{2x-4}{x^2-1}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Άρα $\quad A_{\frac{f}{g}}=A_f\cap A_g-\{x\in\mathbb{R}/g(x)=0\}=$

$$=\{0\}\cup\left[\frac{1}{4},1\right)\cup(1,+\infty)-\{2\}=\{0\}\cup\left[\frac{1}{4},1\right)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

Με τύπο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{2x-\sqrt{x}}}{\dfrac{2x-4}{x^2-1}}=\dfrac{(x^2-1)\sqrt{2x-\sqrt{x}}}{2x-4}$

Παράδειγμα 4: Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$ αν $f(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\le 1\\ 2, & \text{αν } x>1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}e^x & \text{αν } x\le 2\\ \ln x, & \text{αν } x>2\end{cases}$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $A_f=A_g=\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση $f+g$ θα έχει σύνολο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Τα σημεία 1 και 2, όπου οι συναρτήσεις f και g αλλάζουν τύπο αντίστοιχα, χωρίζουν το $\mathbb{R}$ στα διαστήματα $(-\infty,1]$, $(1,2]$ και $(2,+\infty)$.

Οι f και g γράφονται σε αυτά τα διαστήματα:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\le 1\\ 2, & \text{αν } 1<x\le 2\\ 2, & \text{αν } x>2\end{cases}\ \text{και}\ g(x)=\begin{cases}e^x, & \text{αν } x\le 1\\ e^x, & \text{αν } 1<x\le 2\\ \ln x, & \text{αν } x>2\end{cases}.$$

Άρα:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\le 1\\ 2, & \text{αν } 1<x\le 2\\ 2, & \text{αν } x>2\end{cases}+\begin{cases}e^x, & \text{αν } x\le 1\\ e^x, & \text{αν } 1<x\le 2\\ \ln x, & \text{αν } x>2\end{cases}=\begin{cases}x+e^x, & \text{αν } x\le 1\\ 2+e^x, & \text{αν } 1<x\le 2\\ 2+\ln x, & \text{αν } x>2\end{cases}$$

Σύνθεση Συναρτήσεων

Αν έχουμε σύνθετη συνάρτηση πρέπει πρώτα να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της μετά τον τύπο της. Και αυτό βεβαίως γιατί είναι απαραίτητο το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$ να μην είναι το κενό σύνολο για να έχει νόημα η πράξη της σύνθεσης.

Παράδειγμα 1: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και $g(x)=3x-2$. Να ορίσετε (αν είναι δυνατόν) τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Άρα $A_f=[-1,1]$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $A_g=\mathbb{R}$.

Η $f \circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν $\{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} \neq \varnothing$, οπότε και το σύνολο αυτό είναι το σύνολο ορισμού της. Έτσι:

$$\{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\}=\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in [-1,1]\}=\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq 3x-2 \leq 1\}=$$
$$=\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq 3x \leq 3\}=\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}=\left[\frac{1}{3},1\right] \neq \varnothing$$

Άρα ορίζεται η $f \circ g$ με $A_{f \circ g}=\left[\frac{1}{3},1\right]$

και τύπο $(f \circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{1-g^2(x)}=\sqrt{1-(3x-2)^2}=\sqrt{-9x^2+12x-3}$.

Ομοίως με πριν η $g \circ f$ ορίζεται αν και μόνο αν $\{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} \neq \varnothing$, οπότε και το σύνολο αυτό είναι το σύνολο ορισμού της.

Έτσι: $\{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\}=\{x \in [-1,1] \,/\, f(x) \in \mathbb{R}\}=[-1,1] \neq \varnothing$.

Άρα ορίζεται η $g \circ f$ με $A_{g \circ f}=[-1,1]$

και τύπο $(g \circ f)(x)=g(f(x))=3f(x)-2=3\sqrt{1-x^2}-2$.

Προσοχή: Παρατηρούμε ότι $g \circ f \neq f \circ g$.

Αν υπολογίσουμε πρώτα την $g \circ f$ και έπειτα υπολογίσουμε το πεδίο ορισμού της, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να παραλείψουμε αρκετούς περιορισμούς.

Παράδειγμα 2: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x^2$. Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν: $x \geq 0$. Άρα $A_f=[0,+\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $A_g=\mathbb{R}$.

Η $g \circ f$ ορίζεται αν και μόνο αν $\{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} \neq \varnothing$, οπότε και το σύνολο αυτό είναι το σύνολο ορισμού της. Έτσι:

$\{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\}=\{x \in [0,+\infty) / f(x) \in \mathbb{R}\}=[0,+\infty) \neq \varnothing$.

Άρα ορίζεται η $g \circ f$ με $A_{g \circ f}=[0,+\infty)$

και τύπο $(g \circ f)(x)=g(f(x))=f^2(x)=\sqrt{x}^2=x$.

Προσοχή: Η συνάρτηση $(g \circ f)(x)=x$ ορίζεται μόνο για $x \geq 0$ και όχι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που πιθανόν να βρίσκαμε αν υπολογίζαμε πρώτα τον τύπο της και έπειτα το σύνολο ορισμού της.

Παράδειγμα 3: Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[4,13]$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x^2-12)$.

Λύση

Θέτουμε την συνάρτηση $h(x)=x^2-12$ με $A_h=\mathbb{R}$.

Τότε $g(x)=f(h(x))=(f \circ h)(x)$. Επομένως $A_g=A_{f \circ h}$.

Άρα:

$$x \in A_{f\circ h} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \\ h(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ h(x) \in [4,13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 4 \le x^2 - 12 \le 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 16 \le x^2 \le 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$4 \le |x| \le 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 5 \\ 4 \le |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ 4 \le x \text{ ή } x \le -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-5,-4] \cup [4,5]$$

Άρα $A_g = [-5,-4] \cup [4,5]$

Αποσύνθεση Συνάρτησης Εις Τα Εξ Ων Συνετέθη

Παράδειγμα 4: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = -x^2$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Αρχικά θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο ορισμού της f.

Εύκολα παρατηρούμε ότι $A_g = \mathbb{R}$ και $g(\mathbb{R}) = (-\infty,0]$. Επίσης $A_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

(Εδώ πρέπει πάντα να δίνεται το σύνολο ορισμού της $f\circ g$ διαφορετικά δεν ξέρουμε ποιο υποσύνολο το $\mathbb{R}$ είναι αυτό).

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι $g(\mathbb{R}) \subseteq A_f$, επομένως $(-\infty,0] \subseteq A_f$.

Άρα $A_f = (-\infty,0]$ ή οποιοδήποτε υπερσύνολο αυτού.

Τώρα θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τον τύπο της f.

Αν $y \in g(\mathbb{R}) = (-\infty,0]$ τότε $y = g(x) \Leftrightarrow y = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = -y$ για κάποιο $x \in A_g = \mathbb{R}$.

Επομένως θα ισχύει $f(g(x)) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(y) = \sqrt{1-y}$.

Άρα μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση f που ορίζεται στο $(-\infty,0]$ και έχει τύπο $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε την άσκηση και να αναρωτηθούμε αν υπάρχουν άλλες συναρτήσεις f που να κάνουν την ίδια δουλειά.

Η απάντηση είναι ασφαλώς ναι, μιας και οποιαδήποτε συνάρτηση πάρουμε που ορίζεται σε κάποιο υπερσύνολο του $\left(-\infty,0\right]$, έστω B, με $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{αν } x\in\left(-\infty,0\right]\\ h\left(x\right), & \text{αν } x\in B-\left(-\infty,0\right]\end{cases}$, αρκεί η h να ορίζεται σε αυτό το σύνολο.

Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{αν } x\in\left(-\infty,0\right]\\ x, & \text{αν } x\in\left(0,1\right)\end{cases}$ και να διαπιστώσουμε ότι $\left(f\circ g\right)\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πράγματι η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν $\begin{cases}x\in A_g\\ g\left(x\right)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -x^2\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (εφόσον $\left(-\infty,0\right]\subseteq A_f$)

Επομένως $A_{f\circ g}=\mathbb{R}$ και $\left(f\circ g\right)\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$.

Επομένως υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις.

Αποσύνθεση Συνάρτησης Εις Τα Εξ Ων Συνετέθη (2)

Παράδειγμα 5: Δίνονται οι συναρτήσεις f που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και g για τις οποίες ισχύουν $\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\left|\sigma\upsilon\nu x\right|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η συνάρτηση g ορίζεται όταν και μόνο όταν $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Άρα $A_{g\circ f}=\mathbb{R}$ και $A_g=\left[-1,1\right]$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}^2=|\sigma\upsilon\nu x|^2 \Leftrightarrow$
$1-f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)=\eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)|=|\eta\mu x| \Leftrightarrow$
$f(x)=\eta\mu x$ ή $f(x)=-\eta\mu x$

Επομένως υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις όπως είναι η $f(x)=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή $f(x)=-\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή ακόμη $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x & \text{αν } x\in A\\ -\eta\mu x & \text{αν } x\notin A\end{cases}$, όπου $A\subseteq\mathbb{R}$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

1. Σημείο Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

Ένα σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $x_0 \in A$ και $f(x_0) = y_0$.

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \varkappa$, όπου $\varkappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του $\varkappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $\mathrm{A}(2,8)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα έχει σύνολο ορισμού $A_f = \mathbb{R}$.

Το σημείο $\mathrm{A}(2,8)$ ανήκει στην C_f όταν και μόνο όταν $f(2) = 8$.

Έτσι: $f(2) = 8 \Leftrightarrow 2^2 - 2 + \varkappa = 8 \Leftrightarrow 2 + \varkappa = 8 \Leftrightarrow \varkappa = 6$.

Άρα το $\mathrm{A}(2,8)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όταν και μόνο όταν $\varkappa = 6$.

2. Σημεία Τομής (Κοινά Σημεία) Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης με Άξονες

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ για τα οποία ισχύει $f(x_0) = 0$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον $x'x$ σε κάποιο σημείο $M(x_M, y_M)$ αν και μόνο αν η τεταγμένη του είναι 0.

Δηλαδή

$\left(x_M, y_M\right) \in C_f \Leftrightarrow y_M = 0 \Leftrightarrow f\left(x_M\right) = 0 \Leftrightarrow {x_M}^2 - 4x_M + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x_M = 1 \text{ ή } x_M = 3\right)$.

Άρα τα κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα σημεία $M_1(1,0)$ και $M_2(3,0)$.

Αντίστοιχα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον $y'y$ σε κάποιο σημείο $N\left(x_N, y_N\right)$ αν και μόνο αν η τετμημένη του είναι 0.

Δηλαδή

$\left(x_N, y_N\right) \in C_f \Leftrightarrow x_N = 0 \Leftrightarrow y_N = f(0) \Leftrightarrow y_N = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \Leftrightarrow y_N = 3$.

Άρα το κοινό σημεία της C_f με τον $y'y$ είναι το σημείο $N(0,3)$.

3. Σχετική Θέση Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης σε σχέση με τον $x'x$

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) > 0$ ενώ βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) < 0$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$. Άρα $A = (0, +\infty)$.

Η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν και μόνο όταν $f(x) > 0$

Έτσι έχουμε:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x\ln x - x > 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν και μόνο $x \in (e, +\infty)$.

4. Σχετική Θέση Γραφικών Παραστάσεων Συναρτήσεων μεταξύ τους

- Έστω οι συναρτήσεις f,g και C_f,C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα, τότε για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των 2 συναρτήσεων (αν υπάρχουν) λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.
- Έστω οι συναρτήσεις f,g και C_f,C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα, τότε για να βρούμε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων σχηματίζουμε την διαφορά τους $h(x)=f(x)-g(x)$ και εξετάζουμε το πρόσημο της. Στα διαστήματα όπου $f(x)-g(x)>0$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g, ενώ όταν $f(x)-g(x)<0$ τότε η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f.

Παράδειγμα 4: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την σχετική θέση των C_f και C_g καθώς και τα κοινά τους σημεία.

Λύση

Για να βρούμε την σχετική θέση των C_f και C_g σχηματίζουμε την διαφορά τους $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-x$.

Η συνάρτηση h ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε το πρόσημο της h.

$h(x)>0 \Leftrightarrow x^3-x>0 \Leftrightarrow x(x^2-1)>0$

$h(x)<0 \Leftrightarrow x^3-x<0 \Leftrightarrow x(x^2-1)<0$

x	−1	0	1	
x	−	−	+	+
x²−1	+	−	−	+
x(x²−1)	−	+	−	+

Φτιάχνω το πινακάκι τιμών της ανίσωσης και έχω:

- $h(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$
- $h(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$
- $h(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g όταν $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g όταν $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

Τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα σημεία $K(0, f(0))$, $M(1, f(1))$ και $N(-1, f(-1))$. Δηλαδή τα σημεία $K(0,0)$, $M(1,1)$ και $N(-1,-1)$.

5. Πως δείχνουμε ότι οι Γραφικές Παραστάσεις μιας Παραμετρικής Οικογένειας Συναρτήσεων διέρχονται όλες από ένα σταθερό σημείο.

Για να δείξω ότι οι γραφικές παραστάσεις μιας οικογένειας συναρτήσεων $C_\lambda : y = f_\lambda(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από σταθερό σημείο εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος: Δίνουμε δυο αυθαίρετες τιμές στο λ και παίρνουμε δυο «αντιπροσώπους της οικογένειας C_λ, έστω: $\begin{cases} C_1 : y = f_1(x) \\ C_2 : y = f_2(x) \end{cases}$.

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των C_1 και C_2.

Δείχνουμε ότι οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση $y = f_\lambda(x)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

2ος τρόπος: Απαιτούμε οι γραφικές παραστάσεις της οικογένειας C_λ να διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ οπότε $y_0 = f_\lambda(x_0)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δίνουμε στην ισότητα, $y_0 = f_\lambda(x_0)$ μορφή πολυωνύμου ως προς λ με συντελεστές παραστάσεις των x_0, y_0. Απαιτούμε το πολυώνυμο να είναι μηδενικό και έτσι παίρνουμε σύστημα με αγνώστους τα x_0 και y_0.

Παράδειγμα 5: Δίνεται η παραμετρική οικογένεια των συναρτήσεων f με $f_\lambda(x) = (\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda + 5$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι όταν η παράμετρος λ διατρέχει το $\mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

Λύση

$1^{ος}$ τρόπος:

Για να δείξω ότι οι γραφικές παραστάσεις όλων των παραπάνω συναρτήσεων διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, αρκεί να βρω το σημείο τομής (κοινό σημείο) 2 από αυτές και να αποδείξω ότι αυτό το σημείο ανήκει στις γραφικές παραστάσεις όλων. Έτσι:

- για $\lambda = 1$ παίρνω την συνάρτηση $f_1(x) = 4x + 6$
- για $\lambda = 0$ παίρνω την συνάρτηση $f_2(x) = -x^2 + 2x + 5$

Για να βρω το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των 2 συναρτήσεων θα λύσω το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+6=y \\ -x^2+2x+5=y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+6=y \\ -x^2+2x+5=4x+6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+6=y \\ x^2+2x+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+6=y \\ (x+1)^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x+6=y \\ x=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=-1 \text{ και } y=2$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $K(-1,2)$.

Θα δείξω ότι αυτό ανήκει στις γραφικές παραστάσεις όλων των συναρτήσεων f_λ.

Θα δείξω δηλαδή ότι $f_\lambda(-1) = 2$.

Πράγματι παρατηρώ ότι:

$$f_\lambda(-1) = (\lambda-1)(-1)^2 + 2(\lambda+1)(-1) + \lambda + 5 = \lambda - 1 - 2\lambda - 2 + \lambda + 5 = 2.$$

Άρα όταν η παράμετρος λ διατρέχει το $\mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_λ διέρχονται από το σταθερό σημείο $K(-1,2)$.

2^{ος} τρόπος:

Έστω ότι όλες οι C_{f_λ} διέρχονται από ένα σταθερό σημείο $K(x_0, y_0)$.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $f_\lambda(x_0) = y_0$.

Έτσι:

$$\begin{array}{l} f_\lambda(x_0) = y_0 \Leftrightarrow (\lambda-1)x_0^{\,2} + 2(\lambda+1)x_0 + \lambda + 5 = y_0 \Leftrightarrow \\ \lambda x_0^{\,2} - x_0^{\,2} + 2\lambda x_0 + 2x_0 + \lambda + 5 - y_0 = 0 \Leftrightarrow \\ \left(x_0^{\,2} + 2x_0 + 1\right)\lambda + \left(-x_0^{\,2} + 2x_0 + 5 - y_0\right) = 0 \quad (1) \end{array}$$

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε το πολυώνυμο του 1^{ου} μέλους είναι πάντα το μηδενικό. Αυτό θα ισχύει όταν και μόνο όταν:

$$\left.\begin{array}{l} {x_0}^2+2x_0+1=0 \\ \text{και} \\ -{x_0}^2+2x_0+5-y_0=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (x_0+1)^2=0 \\ \text{και} \\ -{x_0}^2+2x_0+5=y_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ \text{και} \\ y_0=-{x_0}^2+2x_0+5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_0=-1 \text{ και } y_0=2$$

Άρα το σταθερό σημείο είναι το $K(-1,2)$.

Μελέτη Μονοτονίας Συνάρτησης

Η μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους.

α. Συνθετικά.

β. Αναλυτικά.

γ. Με τον λόγο μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

δ. Με χρήση του προσήμου της διαφοράς $f(x_2) - f(x_1)$

Παρακάτω θα μελετήσουμε όλους τους τρόπους ελέγχου και απόδειξης της μονοτονίας μιας συνάρτησης, αφού πρώτα υπενθυμίσουμε τους ορισμούς.

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Σύνθεση

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$ και προχωρώντας κατασκευαστικά καταλήγουμε σε μια ανισοτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Για να γίνει αυτό απαιτείται πολύ καλή γνώση των ιδιοτήτων της διάταξης στο $\mathbb{R}$ που διδαχτήκαμε στην Α' Λυκείου.

Δεν το χρησιμοποιούμε στις ρητές συναρτήσεις και γενικά σε όσες ο τύπος τους είναι κλάσμα, γιατί όταν διαιρούμε άνισα δεν παίρνουμε κατ' ανάγκη άνισα.

Παράδειγμα 1: Να μελετηθεί η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 5x + 1 + e^x$ ως προς την μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} x_1^3 + 5x_1 + e^{x_1} < x_2^3 + 5x_2 + e^{x_2} \Rightarrow$$

$$x_1^3 + 5x_1 + e^{x_1} + 1 < x_2^3 + 5x_2 + e^{x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ανάλυση – Αποσύνθεση

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) < f(x_2)$ και με ισοδυναμίες προσπαθούμε να αποσυνθέσουμε τον τύπο της f καταλήγοντας σε μια ανισοτική σχέση της μορφής $x_1 < x_2$ οπότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως αύξουσα, ή $x_1 > x_2$ οπότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.

Ο συγκεκριμένος τρόπος χρησιμοποιείται συχνά όταν έχουμε ρητές συναρτήσεις, ή συναρτήσεις που μπορούν να αναχθούν σε ρητές.

Παράδειγμα 2: Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ ως προς την μονοτονία της.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1-x)(1+x) > 0 \\ x \neq -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1-x^2 > 0 \\ x \neq -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 < 1 \\ x \neq -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x \neq -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \in (-1,1)$$

Επομένως $A_f = (-1,1)$.

Έστω δυο τυχαία $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $f(x_1) < f(x_2)$. Τότε έχουμε:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \ln\frac{1-x_1}{1+x_1} < \ln\frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} < \frac{1-x_2}{1+x_2} \underset{1+x_2>0}{\overset{1+x_1>0}{\Leftrightarrow}}$$

$$(1-x_1)(1+x_2) < (1-x_2)(1+x_1) \Leftrightarrow \cancel{1} + x_2 - x_1 - \cancel{x_1x_2} < \cancel{1} + x_1 - x_2 - \cancel{x_1x_2} \Leftrightarrow$$

$$-2x_1 < -2x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Άρα δείξαμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in (-1,1)$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λόγος Μεταβολής

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2$ και σχηματίζουμε τον λόγο μεταβολής της συνάρτησης f, με $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

- $\lambda > 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A_f.
- $\lambda < 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.
- $\lambda \geq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι αύξουσα στο A_f.
- $\lambda \leq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο A_f.
- $\lambda = 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι σταθερή στο A_f.

Παράδειγμα 3: Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία της η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5-x} + 1$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$. Άρα $A_f = (-\infty, 5]$.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in (-\infty, 5]$ με $x_1 \neq x_2$ και σχηματίζουμε τον λόγο μεταβολής της συνάρτησης f, με

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{5-x_2} - \cancel{1} - \sqrt{5-x_1} + \cancel{1}}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{5-x_2} - \sqrt{5-x_1}}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5-x_2} - \sqrt{5-x_1}\right)\left(\sqrt{5-x_2} + \sqrt{5-x_1}\right)}{(x_2 - x_1)\left(\sqrt{5-x_2} + \sqrt{5-x_1}\right)} = \frac{\sqrt{5-x_2}^{\,2} - \sqrt{5-x_1}^{\,2}}{(x_2 - x_1)\left(\sqrt{5-x_2} + \sqrt{5-x_1}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{5} - x_2 - \cancel{5} + x_1}{(x_2 - x_1)\left(\sqrt{5-x_2} + \sqrt{5-x_1}\right)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 - x_1)\left(\sqrt{5-x_2} + \sqrt{5-x_1}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5-x_2} + \sqrt{5-x_1}} < 0$$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 5]$.

Με πρόσημο της Διαφοράς $f(x_2)-f(x_1)$

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$ και σχηματίζουμε την διαφορά $\delta = f(x_2)-f(x_1)$ και έχουμε:

- $\delta > 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A_f.
- $\delta < 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.
- $\delta \geq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι αύξουσα στο A_f.
- $\delta \leq 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο A_f.
- $\delta = 0$ αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι σταθερή στο A_f.

Παράδειγμα 4: Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+2}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$. Άρα $A_f = [-2,+\infty)$.

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1, x_2 \in [-2,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ και σχηματίζουμε την διαφορά $\delta = f(x_2)-f(x_1)$ και έχουμε:

$$\delta = f(x_2)-f(x_1) = \sqrt{x_2+2}-\sqrt{x_1+2} = \frac{\left(\sqrt{x_2+2}-\sqrt{x_1+2}\right)\left(\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}\right)}{\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2+2}^2-\sqrt{x_1+2}^2}{\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}} = \frac{x_2+2-x_1-2}{\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}} = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}} > 0$$ ως πηλίκο θετικών αριθμών.

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,+\infty)$.

Μελέτη Μονοτονίας Συνάρτησης με κλάδους.

Όταν μελετάμε την μονοτονία μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, εξετάζουμε κάθε κλάδο ξεχωριστά με όποιον από τους παραπάνω τρόπους θεωρήσουμε καταλληλότερο. Δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε για όλους τους κλάδους τον ίδιο τρόπο. Όταν 2 κλάδοι έχουν διαφορετική μονοτονία, τότε η συνάρτηση είναι μονότονη κατά διαστήματα, ενώ αν έχουν την ίδια μονοτονία, πρέπει να ελέγξουμε αν αυτή κληροδοτείται στην ένωση των δυο διαστημάτων. Γνωρίζουμε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει:

Παράδειγμα 5: Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία της, την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 4x+3, & \text{αν } x\le 1 \\ \dfrac{8}{x}, & \text{αν } x>1 \end{cases}.$$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$ και διαφορετικό τύπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $(1,+\infty)$.

Θα την μελετήσω ξεχωριστά σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα.

Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2$. Τότε ισχύει:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1+3<4x_2+3 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα στο $(-\infty,1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Ομοίως για $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{8}{x_1}>\frac{8}{x_2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα στο $(1,+\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η συνάρτηση είναι κατά διαστήματα μονότονη.

Προσοχή: Η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και στην απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε κάποιες από τις χρήσεις της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Απόδειξη Μονοτονίας Συνάρτησης με Απαγωγή σε Άτοπο

Πολλές φορές όταν μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, αλλά δεν γνωρίζουμε τον τύπο της ώστε να δοκιμάσουμε τις προηγούμενες μεθόδους, τότε χρησιμοποιούμε την απαγωγή σε άτοπο.

Παράδειγμα 6: Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f^3(x)+e^{f(x)}=2x-3 \quad (1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, αλλά $f(x_1)\geq f(x_2)$. Επομένως θα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)\geq f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)\geq f^3(x_2) \\ f(x_1)\geq f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}\geq e^{f(x_2)} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} f^3(x_1)+e^{f(x_1)}\geq f^3(x_2)+e^{f(x_2)} \quad (2)$$

Η (2) με χρήση της (1) γίνεται:

$$(2): f^3(x_1)+e^{f(x_1)}\geq f^3(x_2)+e^{f(x_2)} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2x_1-3\geq 2x_2-3\Rightarrow 2x_1\geq 2x_2\Rightarrow x_1\geq x_2.$$

Άτοπο αφού υποθέσαμε $x_1<x_2$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονοτονία και Εξισώσεις

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, είναι γνησίως μονότονη σε αυτό και υπάρχει $\varrho\in\Delta$ τέτοιο ώστε $f(\varrho)=0$, τότε αυτός ο αριθμός είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης.

Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $g(x)=h(x)$, αφού βρούμε το σύνολο ορισμού της A, την μετατρέπουμε στην ισοδύναμη μορφή $g(x)-h(x)=0$, μεταφέροντας όλους τους όρους της στο 1ο μέλος. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=g(x)-h(x)$ την οποία μελετάμε ως προς την μονοτονία της και βρίσκουμε τις προφανείς λύσεις σε κάθε διάστημα που ελέγχουμε την μονοτονία της. Οι λύσεις αυτές είναι μοναδικές.

Την λύση αυτή την χρησιμοποιούμε, όταν οι αλγεβρικές μέθοδοι που γνωρίσαμε στις προηγούμενες τάξεις, δεν λειτουργούν.

Παράδειγμα 1: Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = 1 - \ln x$.

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$. Άρα σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $A = (0, +\infty)$.

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1 + \ln x$ με $x > 0$.

Παρατηρώ ότι ο αριθμός $\varrho = 1$ είναι μια προφανής ρίζα της συνάρτησης, εφόσον $f(1) = 1^3 - 1 + \ln 1 = 0$.

Θα δείξω ότι αυτή είναι και μοναδική.

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{\,3} < x_2^{\,3} \\ x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \quad x_1^{\,3} + \ln x_1 < x_2^{\,3} + \ln x_2 \Rightarrow$$

$$x_1^{\,3} - 1 + \ln x_1 < x_2^{\,3} - 1 + \ln x_2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και μοναδική.

Πράγματι: για $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$

για $1 < x \Rightarrow f(1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$

Άρα δεν υπάρχει αριθμός, $x_0 \neq 1$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.

Άρα το $\varrho = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης, άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης.

Μονοτονία και Ανισώσεις

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $g(x)>h(x)$ ή $g(x)\geq h(x)$, αφού βρούμε το σύνολο ορισμού της A, την μετατρέπουμε στην ισοδύναμη μορφή $g(x)-h(x)>0$ ή $g(x)-h(x)\geq 0$ αντίστοιχα, μεταφέροντας όλους τους όρους της στο 1ο μέλος. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=g(x)-h(x)$ την οποία μελετάμε ως προς την μονοτονία της και βρίσκουμε τις προφανείς λύσεις σε κάθε διάστημα που ελέγχουμε την μονοτονία της. Αν μια τέτοια λύση είναι ο $\varrho\in A$ για τον οποίο $f(\varrho)=0$ τότε ισοδύναμα:

- για κάθε $x\in A$ με $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(\varrho)\Leftrightarrow x>\varrho$ αν f γνησίως αύξουσα στο A
- για κάθε $x\in A$ με $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(\varrho)\Leftrightarrow x<\varrho$ αν f γνησίως φθίνουσα στο A

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{5-x}<\ln x+2$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν: $\begin{cases}5-x\geq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 5\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,5]$

Ισοδύναμα η ανίσωση γράφεται: $\sqrt{5-x}<\ln x+2\Leftrightarrow\sqrt{5-x}-\ln x-2<0\quad(1)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{5-x}-\ln x-2$ με $A_f=(0,5]$.

Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$.

Θα μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,5]$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$\left.\begin{aligned}&x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 5-x_1>5-x_2\Rightarrow\sqrt{5-x_1}>\sqrt{5-x_2}\\&x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1-2>-\ln x_2-2\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$
$$\sqrt{5-x_1}-\ln x_1-2>\sqrt{5-x_2}-\ln x_2-2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,5]$.

Η (1) για κάθε $x\in(0,5]$ ισοδύναμα γράφεται:

$$\sqrt{5-x}-\ln x-2<0\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow x>1.$$

Συναληθεύω με το σύνολο ορισμού της ανίσωσης και επομένως οι λύσεις της είναι $x \in (1,5]$.

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $f(g(x)) < f(h(x))$ ή της μορφής $f(g(x)) \leq f(h(x))$, τότε μελετάμε την μονοτονία της συνάρτησης f και αν είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $g(x) < h(x)$ ή $g(x) \leq h(x)$ αντίστοιχα, ενώ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει $g(x) > h(x)$ ή $g(x) \geq h(x)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x, x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έπειτα να λύσετε την ανίσωση $e^{4-x^2} - e^{2-x} > x^2 - x - 2$

Λύση

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} e^{-x_1} - x_1 > e^{-x_2} - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{4-x^2} - e^{2-x} > x^2 - x - 2 \Leftrightarrow e^{4-x^2} - e^{2-x} > (x^2 - 4) - (x - 2) \Leftrightarrow e^{-(x^2-4)} - (x^2 - 4) > e^{-(x-2)} - (x - 2) \Leftrightarrow$$
$$f(x^2 - 4) > f(x - 2) \overset{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} x^2 - 4 < x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Μελέτη Ακροτάτων Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$.

Ο αριθμός $\mu \in \mathbb{R}$ είναι η μέγιστη τιμή της f αν και μόνο αν :

- υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = \mu$
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \le \mu$

Ο αριθμός $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f αν και μόνο αν :

- υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = \kappa$
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \ge \kappa$

Η Αλγεβρική εύρεση των (ολικών) ακροτάτων μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους τρόπους:

α. Με χρήση των γνωστών ανισοταυτοτήτων.

β. Με την βοήθεια της μονοτονίας σε κλειστό διάστημα.

γ. Με την βοήθεια του συνόλου τιμών της συνάρτησης.

Οι γνωστές ανισοταυτότητες από την Άλγεβρα, είναι

1. $x^2 \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$

2. $x^2 + y^2 \ge 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = y = 0$

3. $x^2 + a \ge a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$

4. $|x| \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$

5. $a^2 + \beta^2 \ge 2a\beta$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a = \beta$

6. $a + \beta \ge 2\sqrt{a\beta}$ για κάθε $a, \beta \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a = \beta$

7. $-1 \le \eta\mu x \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

8. $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = x^2(x^2 - 2x + 1) + 1 = x^2(x-1)^2 + 1 \geq 1$

Ακόμα ισχύει $f(0) = 1$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \geq f(1)$.

Άρα η συνάρτηση f εμφανίζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο ίσο με $f(1) = 1$.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

- αν είναι γνησίως αύξουσα (ή και απλά αύξουσα) στο $[a, \beta]$ θα ισχύει $f(a) \leq f(x) \leq f(\beta)$.

  Άρα θα έχει ολικό ελάχιστο το $f(a)$ και ολικό μέγιστο το $f(\beta)$.

- αν είναι γνησίως φθίνουσα (ή και απλά φθίνουσα) στο $[a, \beta]$ θα ισχύει $f(a) \geq f(x) \geq f(\beta)$.

  Άρα θα έχει ολικό ελάχιστο το $f(\beta)$ και ολικό μέγιστο το $f(a)$.

Παράδειγμα 2: Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν: $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in [0, 1]$.

Άρα $A_f = [0, 1]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$\left.\begin{matrix} x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \\ x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow -\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2} \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{1-x_1} < \sqrt{x_2} - \sqrt{1-x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,1\right]$. Επομένως έχει ελάχιστο στο $x_0=0$ ίσο με $f\left(0\right)=-1$ και μέγιστο στο $x_0=1$ ίσο με $f\left(1\right)=1$.

Ο υπολογισμός των ολικών ακροτάτων μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει και με εύρεση του συνόλου τιμών της. Η μορφή που έχει το σύνολο τιμών της θα μας δώσει τις πληροφορίες για τα ακρότατα της συνάρτησης.

- Αν $f\left(A\right)=\left[a,\beta\right]$ τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο το a και μέγιστο το β.
- Αν $f\left(A\right)=\left[a,\beta\right)$ ή $f\left(A\right)=\left[a,+\infty\right)$ τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο το a και δεν έχει μέγιστο.
- Αν $f\left(A\right)=\left(a,\beta\right]$ ή $f\left(A\right)=\left(-\infty,\beta\right]$ τότε η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστο και έχει μέγιστο το β.
- Αν $f\left(A\right)=\left(a,\beta\right)$ ή $f\left(A\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$ τότε η συνάρτηση δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Το σύνολο τιμών μπορούμε να το βρούμε είτε με την διαδικασία που ακολουθήσαμε στην αντίστοιχη ενότητα, είτε με χρήση της μονοτονίας της συνάρτησης.

Παράδειγμα 3: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f\left(x\right)=1-\sqrt{x-2}$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται f όταν και μόνο όταν $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$. Άρα $A_f=\left[2,+\infty\right)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[2,+\infty\right)$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\Rightarrow\sqrt{x_1-2}<\sqrt{x_2-2}\Rightarrow-\sqrt{x_1-2}>-\sqrt{x_2-2}\Rightarrow$$
$$1-\sqrt{x_1-2}>1-\sqrt{x_2-2}\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[2,+\infty\right)$.

Άρα για κάθε $x\in\left[2,+\infty\right)$, ισχύει $x\geq 2\Rightarrow f\left(x\right)\leq f\left(2\right)$.

Επομένως η συνάρτηση εμφανίζει ολικό μέγιστο στο $x_0=2$ ίσο με $f\left(2\right)=1$.

Συνάρτηση 1-1

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ είναι 1-1, χρησιμοποιούμε έναν από τους ακόλουθους τρόπους.

1ος τρόπος: Με τον ισοδύναμο ορισμό

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1,x_2\in A$ με $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ και αποδεικνύουμε ότι υποχρεωτικά $x_1=x_2$.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμος τρόπος σε θεωρητικές ασκήσεις.

Παράδειγμα 1: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\rightarrow\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}^*$.

Λύση

Έστω δυο τυχαία $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$.

Τότε θα ισχύει: $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow\dfrac{2}{x_1}=\dfrac{2}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}^*$.

2ος τρόπος: Με τον κλασσικό ορισμό (συνθετικά)

Θεωρούμε δυο τυχαία $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ και αποδεικνύουμε ότι $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$.

Ο τρόπος αυτός δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε ασκήσεις.

Παράδειγμα 2: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=5x+3$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$

Λύση

Έστω δυο τυχαία $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$.

Τότε θα ισχύει: $x_1\neq x_2\Rightarrow 5x_1\neq 5x_2\Rightarrow 5x_1+3\neq 5x_2+3\Rightarrow f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

3ος τρόπος: Μονοτονία

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1, αρκεί να δείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Αυτός ο τρόπος είναι και ο πιο συνηθισμένος, όταν καλούμαστε να αποδείξουμε την αντιστρεψιμότητα μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 3: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{2017}+2017x-1$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2\Rightarrow x_1^{2017}<x_2^{2017} \\ x_1<x_2\Rightarrow 2017x_1<2017x_2 \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} x_1^{2017}+2017x_1<x_2^{2017}+2017x_2\Rightarrow$$
$$x_1^{2017}+2017x_1-1<x_2^{2017}+2017x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι 1-1.

4ος τρόπος: «Ψάχνοντας» το σύνολο τιμών

Θεωρώντας ένα τυχαίο στοιχείο $y\in f(A)$, δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση $x\in A$ (συναρτήσει του y). Ακολουθούμε δηλαδή την ίδια διαδικασία, με εκείνη της εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 4: Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο, $f(x)=1+\sqrt{x-1}$ είναι 1-1.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Άρα $A_f=[1,+\infty)$.

Έστω κάποιο $y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$y\in f(A)\Leftrightarrow$ υπάρχει $x\in A$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $1+\sqrt{x-1}=y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{x-1}=y-1$ με $y-1\geq 0$

αν και μόνο αν υπάρχει $x\in[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{x-1}^2=(y-1)^2$ με $y\geq 1$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $x-1=(y-1)^2$ με $y \geq 1$.

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $x=(y-1)^2+1$ με $y \geq 1$.

Οπότε αφού το x εκφράζεται μοναδικά συναρτήσει του y, η συνάρτηση είναι 1-1.

Σχόλιο: Με τον παραπάνω τρόπο βρίσκουμε ταυτόχρονα το σύνολο τιμών της f και τον τύπο της αντίστροφης της.

Λύση Εξισώσεων και 1-1 Συνάρτηση

Οι δυο διαδικασίες που παρουσιάζονται παρακάτω σχετικά με την επίλυση εξισώσεων, είναι ιδιαιτέρως σημαντικές και χρησιμοποιούνται σε όλη την έκταση της Ανάλυσης. Ακόμα και όταν θα έχουμε περισσότερα εργαλεία στην διάθεση μας, οι συγκεκριμένες μέθοδοι συνεχίζουν να είναι βασικές και απαραίτητες.

A. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε κάθε σχέση της μορφής $f(g(x))=f(h(x))$ είναι ισοδύναμη με την $g(x)=h(x)$. Επομένως, αν μια εξίσωση βρίσκεται στην μορφή $f(g(x))=f(h(x))$, ή μπορεί να γραφεί σε αυτήν την μορφή, όπου η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε γράφεται ισοδύναμα στην απλούστερη μορφή: $f(g(x))=f(h(x)) \Leftrightarrow g(x)=h(x)$

B. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, αλλά και γενικότερα της μορφής $f(x)=a$, έχει το πολύ μια ρίζα. Έτσι αν βρούμε μια προφανή ρίζα μιας τέτοιας εξίσωσης, αυτή θα είναι και μοναδική.

Παράδειγμα 5: Να λυθεί η εξίσωση $\left(e^{x-1}+x-3\right)^5+\left(e^{x-1}+x-3\right)^3+e^{x-1}+x=0$.

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\left(e^{x-1}+x-3\right)^5+\left(e^{x-1}+x-3\right)^3+e^{x-1}+x=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{x-1}+x-3\right)^5+\left(e^{x-1}+x-3\right)^3+\left(e^{x-1}+x-3\right)+3=0 \quad (1)$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=x^5+x^3+x+3$.

Παρατηρούμε ότι $f(-1)=0$ επομένως το $x_0=-1$ είναι μια προφανής ρίζα της f.

Θα δείξω ότι είναι και μοναδική. Αρκεί να δείξω επομένως ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Πράγματι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5 \\ x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3 \\ x_1<x_2 \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} x_1^5+x_1^3+x_1<x_2^5+x_2^3+x_2\Rightarrow$$
$$x_1^5+x_1^3+x_1+3<x_2^5+x_2^3+x_2+3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1-1.

Άρα το $x_0=-1$ είναι η μοναδική ρίζα της.

Η εξίσωση (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ γράφεται:

$$\left(e^{x-1}+x-3\right)^5+\left(e^{x-1}+x-3\right)^3+\left(e^{x-1}+x-3\right)+3=0\Leftrightarrow f\left(e^{x-1}+x-3\right)=0\Leftrightarrow$$
$$f\left(e^{x-1}+x-3\right)=f(-1)\overset{f\ \text{είναι 1-1}}{\Leftrightarrow} e^{x-1}+x-3=-1\Leftrightarrow e^{x-1}+x-2=0\quad(2)$$

Για να λύσω την εξίσωση (2) θεωρώ την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{x-1}+x-2$.

Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$, επομένως το $x_0=1$ είναι μια προφανής ρίζα της g.

Θα δείξω ότι είναι μοναδική, δείχνοντας ότι η g είναι 1-1. Αρκεί να δείξω ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι, για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \\ x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\overset{e^x\ \text{γν. αυξ}}{\Rightarrow} e^{x_1-1}<e^{x_2-1} \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} e^{x_1-1}+x_1<e^{x_2-1}+x_2\Rightarrow e^{x_1-1}+x_1-2<e^{x_2-1}+x_2-2\Rightarrow$$
$$g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1. Άρα το $x_0=1$ είναι η μοναδική ρίζα της.

Η εξίσωση (2) γράφεται ισοδύναμα: $e^{x-1}+x-2=0\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{g\ \text{είναι 1-1}}{\Leftrightarrow} x=1$.

Άρα η δοσμένη εξίσωση $\left(e^{x-1}+x-3\right)^5+\left(e^{x-1}+x-3\right)^3+e^{x-1}+x=0$, έχει μοναδική λύση την $x_0=1$.

1-1 και Συνάρτηση Πολλαπλού Τύπου

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ,\text{αν } x\in A_1 \\ f_2(x) & ,\text{αν } x\in A_2 \end{cases}$ είναι 1-1, εργαζόμαστε ως εξής:

- Δείχνουμε ότι είναι 1-1 στο σύνολο A_1
- Δείχνουμε ότι είναι 1-1 στο σύνολο A_2
- Δείχνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f_1(x) & ,\text{αν } x\in A_1 \\ y=f_2(x) & ,\text{αν } x\in A_2 \end{cases}$ είναι αδύνατο ή ότι $f_1(A_1)\cap f_2(A_2)=\varnothing$.

Παράδειγμα 6: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & ,\text{αν } x\le 0 \\ x^2+1 & ,\text{αν } x\ge 1 \end{cases}$ είναι 1-1.

Λύση

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ άρα και 1-1.

Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^2<x_2^2\Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα και 1-1.

Θα δείξω ότι το σύστημα $\begin{cases} y=3x-1 & ,\text{αν } x\le 0 \\ y=x^2+1 & ,\text{αν } x\ge 1 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

Πράγματι $\begin{cases} y=3x-1 & ,\text{αν } x\le 0 \\ y=x^2+1 & ,\text{αν } x\ge 1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y\le -1 & ,\text{αν } x\le 0 \\ y\ge 2 & ,\text{αν } x\ge 1 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1.

Μελέτη για την Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.

Για να την μελετήσουμε ως προς την «αντιστρεψιμότητα» της θα πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν είναι 1-1. Αν είναι, τότε για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση, θα πρέπει να βρούμε αρχικά το σύνολο τιμών της f, που αποτελεί σύνολο ορισμού για την f^{-1} και μετά να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$, ως προς x για να βρούμε τον τύπο.

Συχνά η λύση της εξίσωσης $f(x) = y$ εξασφαλίζει και το 1-1, (αν έχει το πολύ μια λύση) μας δίνει το σύνολο τιμών (από τους περιορισμούς για το y) και τον τύπο της f^{-1}.

Παράδειγμα 1: Να δειχτεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \geq 0$. Άρα $A_f = [0, +\infty)$.

Έστω κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$y \in f(A) \Leftrightarrow$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $2 + \sqrt{x} = y$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{x} = y - 2$, με $y - 2 \geq 0$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{x}^2 = (y-2)^2$, με $y \geq 2$

αν και μόνο αν υπάρχει $x \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $x = (y-2)^2$, με $y \geq 2$.

Για την εύρεση του συνόλου τιμών της f, έχουμε τους περιορισμούς:

1. $y \geq 2$
2. $x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $y \geq 2$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = [2, +\infty)$.

Ακόμα επειδή το x εκφράζεται μοναδικά συναρτήσει του y, δηλαδή για κάθε $y \in f(A) = [2,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $x \in A_f = [0,+\infty)$ ώστε: $x = (y-2)^2$ (ή ισοδύναμα $f(x) = y$), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 και επομένως αντιστρέψιμη.

Άρα υπάρχει η f^{-1} με σύνολο ορισμού το $f(A) = [2,+\infty)$ και τύπο $f^{-1}(y) = (y-2)^2$.

Μια συνηθισμένη Άσκηση

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^3(x) + 5f(x) - x = 0$. Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την αντίστροφή της.

Λύση

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 5f(x_1) = 5f(x_2) \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} f^3(x_1) + 5f(x_1) = f^3(x_2) + 5f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Επομένως, η συνάρτηση f αντιστρέφεται, δηλαδή η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x.

Έχω: $f^3(x) + 5f(x) - x = 0 \overset{y=f(x)}{\Leftrightarrow} y^3 + 5y - x = 0 \Leftrightarrow x = y^3 + 5y$

Θέτω έπειτα όπου x το $f^{-1}(y)$ και επομένως έχω ότι $f^{-1}(y) = y^3 + 5y$.

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 5x$ με σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$.

<u>**Προσοχή**</u>: Σε αυτήν την άσκηση δίνεται το σύνολο τιμών της f ($f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$) γεγονός που μου επιτρέπει να θέσω όπου x το $f^{-1}(y)$ και να προκύψει το ζητούμενο. Τι θα γίνει όμως στην περίπτωση που η πληροφορία αυτή δεν δινόταν;

Σίγουρα σε αυτήν την περίπτωση προκύπτουν δυο σημαντικά προβλήματα που και τα δυο έχουν σχέση με την εύρεση του συνόλου τιμών της συνάρτησης f.

Καταρχήν η διαδικασία του «θέτω όπου x το $f^{-1}(y)$» δεν μπορεί πλέον να γίνει μιας και δεν εξηγώ πουθενά για ποια y έχει νόημα η παραπάνω έκφραση. Δηλαδή σε ποιο σύνολο ανήκουν τα y.

Προφανώς ανήκουν στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f το οποίο είναι το σύνολο ορισμού της αντίστροφης, αλλά αν δεν το υπολογίσω η προηγούμενη έκφραση δεν έχει νόημα.

Ας μην ξεχνάμε ότι πρώτα πρέπει να βρίσκω το σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης και έπειτα τον τύπο της.

Επίσης γίνεται συχνά το μπέρδεμα ότι επειδή για να βρω την αντίστροφη μιας συνάρτησης πρέπει να μετατρέψω την εξίσωση $y=f(x)$ στην ισοδύναμη $x=g(y)$. Μόνο που δίχως την εύρεση του συνόλου τιμών δεν έχω αποδείξει την ισοδυναμία αλλά μόνο το ευθύ.

Λείπει το αντίστροφο για να μπορέσω να ισχυριστώ ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της f.

Παρακάτω θα δείξουμε 2 τρόπους που μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτά τα 2 προβλήματα και που οι 2 τρόποι στην ουσία μας οδηγούν στην εύρεση αρχικά του συνόλου τιμών και έπειτα στον τύπο της αντίστροφης.

Ας γράψουμε την άσκηση με την καινούρια εκφώνηση.

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $f^3(x)+5f(x)-x=0$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την αντίστροφή της.

Λύση

Απόδειξη Αντιστρεψιμότητας

1ος τρόπος:

Για να δείξω ότι η f αντιστρέφεται, αρκεί να δείξω ότι είναι 1-1.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} f^3(x_1)=f^3(x_2) \\ 5f(x_1)=5f(x_2) \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} f^3(x_1)+5f(x_1)=f^3(x_2)+5f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 .$$

Επομένως, η συνάρτηση f αντιστρέφεται, δηλαδή η εξίσωση $y=f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x.

2ος τρόπος:

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε λόγω της (1) θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&x_1<x_2\Rightarrow f^3(x_1)+5f(x_1)<f^3(x_2)+5f(x_2)\Rightarrow\\
&f^3(x_1)+5f(x_1)-f^3(x_2)-5f(x_2)<0\Rightarrow\\
&\big(f(x_1)-f(x_2)\big)\big(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+5\big)<0\Rightarrow\\
&f(x_1)-f(x_2)<0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως 1-1.

3ος τρόπος:

Θα μπορούσαμε επίσης να αποδείξουμε την μονοτονία της f και με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\geq f(x_2)$.

Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_1)\geq f(x_2)\Leftrightarrow f^3(x_1)\geq f^3(x_2)\\
&f(x_1)\geq f(x_2)\Leftrightarrow 5f(x_1)\geq 5f(x_2)
\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$f^3(x_1)+5f(x_1)\geq f^3(x_2)+5f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}x_1\geq x_2$ Άτοπο αφού υποθέσαμε $x_1<x_2$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως 1-1.

4ος τρόπος:

Μια ακόμη απόδειξη της μονοτονίας μπορεί να γίνει και με χρήση βοηθητικής συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x^3+5x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε θα ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\\
&x_1<x_2\Rightarrow 5x_1<5x_2
\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}x_1^3+5x_1<x_2^3+5x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως είναι 1-1.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή $A_f = A_g = \mathbb{R}$ ορίζεται η $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g\left(f\left(x\right)\right) = f^3\left(x\right) + 5f\left(x\right) = x$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g\left(f\left(x_1\right)\right) < g\left(f\left(x_2\right)\right) \overset{g \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως 1-1.

Εύρεση αντίστροφης

1ος τρόπος:

Για να βρω την αντίστροφη συνάρτηση αρκεί να βρω το σύνολο ορισμού της και έπειτα τον τύπο της.

α) Εύρεση Συνόλου Τιμών της Συνάρτησης f.

Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right) = y_0$, τότε από την σχέση $f^3\left(x\right) + 5f\left(x\right) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $y_0^{\,3} + 5y_0 - x_0 = 0$ οπότε $x_0 = y_0^{\,3} + 5y_0$.

Έτσι θα δείξουμε ότι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ και $x_0 = y_0^{\,3} + 5y_0$ θα ισχύει $f\left(x_0\right) = y_0$.

Πράγματι:

Εφόσον η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και για το δοσμένο x_0. Επομένως θα ισχύει

$$\begin{aligned}
& f^3\left(x_0\right) + 5f\left(x_0\right) = x_0 \overset{x_0 = y_0^{\,3} + 5y_0}{\Rightarrow} \\
& f^3\left(x_0\right) + 5f\left(x_0\right) = y_0^{\,3} + 5y_0 \Rightarrow \\
& f^3\left(x_0\right) - y_0^{\,3} + 5f\left(x_0\right) - 5y_0 = 0 \Rightarrow \\
& \left(f\left(x_0\right) - y_0\right)\left(f^2\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)y_0 + y_0^{\,2}\right) + 5\left(f\left(x_0\right) - y_0\right) = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\left(f\left(x_0\right) - y_0\right)\left(f^2\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)y_0 + y_0^{\,2} + 5\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f\left(x_0\right) - y_0 = 0 \Rightarrow f\left(x_0\right) = y_0 \\ \text{ή} \\ f^2\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)y_0 + y_0^{\,2} + 5 = 0 \text{ που είναι αδύνατο} \end{cases}$$

Άρα $f(x_0)=y_0$. Επομένως δείξαμε ότι για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$ υπάρχει ένα $x_0\in D_f$ (και αυτό είναι το $x_0=y_0^{\;3}+5y_0$) για το οποίο $f(x_0)=y_0$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

β) Εύρεση τύπου της αντίστροφης

Για να βρω τον τύπο της συνάρτησης θέτω στην σχέση (1) στην θέση του x το $f^{-1}(y)$ με $y\in\mathbb{R}$ και να έχω ότι

$$
\begin{aligned}
&f^3\left(f^{-1}(y)\right)+5f\left(f^{-1}(y)\right)-f^{-1}(y)=0\Rightarrow\\
&y^3+5y-f^{-1}(y)=0\Rightarrow\\
&f^{-1}(y)=y^3+5y
\end{aligned}
$$

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}(x)=x^3+5x$ με σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2^ος^ τρόπος:

Για να βρω την αντίστροφη συνάρτηση θα δείξω την ισοδυναμία $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Απόδειξη της ισοδυναμίας $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Από την σχέση (1) και θέτοντας όπου $f(x)=y$ έχω: $f^3(x)+5f(x)-x=0\Rightarrow y^3+5y-x=0\Rightarrow x=y^3+5y$.

Άρα αν $f(x)=y$ τότε $x=y^3+5y$.

Το ευθύ έχει ήδη αποδειχτεί. Θα αποδείξω το αντίστροφο.

Δηλαδή αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $x=y^3+5y$ τότε υποχρεωτικά $f(x)=y$.

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ με $x=y^3+5y$.

Εφόσον ισχύει η (1) έχω $x=y^3+5y\Rightarrow f^3(x)+5f(x)=y^3+5y$ (2).

Θεωρώ την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^3+5x$.

Έχουμε δείξει σε προηγούμενο ερώτημα ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως είναι 1-1.

Τότε η σχέση (2) γράφεται: $f^3(x)+5f(x)=y^3+5y \Rightarrow g(f(x))=g(y) \overset{g\,1-1}{\Rightarrow} f(x)=y$.

Άρα αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $x=y^3+5y$ τότε υποχρεωτικά $f(x)=y$.

Επομένως δείξαμε την ισοδυναμία των δυο εξισώσεων $f(x)=y \Leftrightarrow x=y^3+5y$.

Έτσι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x=y^3+5y\in\mathbb{R}$ με $f(x)=y$. Άρα η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι 1-1 και έχει για αντίστροφη την $f^{-1}(y)=y^3+5y$.

Σημείωση:

1. Είναι προφανές ότι η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης καθώς αναπτύσσονται και άλλες τεχνικές θα γίνει πιο εύκολη. Όμως θα είναι και πάλι απαραίτητη η εύρεση του για την πληρότητα της άσκησης.
2. Καλό θα είναι να μην γράφουμε (όπως πολλές φορές παρατηρώ στα γραπτά των μαθητών μου) την έκφραση «Θέτω $x=f^{-1}(x)$» αλλά την «Θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$» ώστε να αποφευχθεί αν είναι δυνατόν ο κίνδυνος να την θεωρήσουμε σε κάποιο σημείο της άσκησης είτε ως εξίσωση είτε ως ισότητα συναρτήσεων και να οδηγηθούν σε περίεργα αποτελέσματα.

Μια όμορφη Άσκηση

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $g(f(x))=x$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ακόμη ότι η g είναι γνησίως μονότονη.

α. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $f=g^{-1}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με την g.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αριθμός $y_0\in\mathbb{R}$ είναι τιμή της g. Δηλαδή υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=y_0$.

Πράγματι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, ο αριθμός $f(y_0) \in \mathbb{R}$ και από την (1) για $x = y_0$ βρίσκουμε ότι $g(f(y_0)) = y_0$. Άρα το $y_0 \in \mathbb{R}$ είναι εικόνα του $f(y_0) \in \mathbb{R}$ μέσω της g.

Επομένως $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε θα έχω:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέψιμη.

Ακόμα η g είναι γνησίως μονότονη, άρα αντιστρέψιμη με $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Η σχέση (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$g(f(x)) = x \Leftrightarrow g(f(x)) = g(g^{-1}(x)) \overset{g \text{ είναι 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1}(x)$$

Άρα: $f(x) = g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εφόσον οι συναρτήσεις f και g^{-1} είναι ίσες, θα ισχύει ότι το σύνολο τιμών της f θα είναι ίδιο με το σύνολο τιμών της g^{-1}, άρα το ίδιο με το σύνολο ορισμού της g που είναι το $\mathbb{R}$.

Το τελευταίο ερώτημα είναι ουσιαστικά η απόδειξη ότι κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την αντίστροφή της.

Συναρτησιακές Σχέσεις – Εξισώσεις

Οι συναρτησιακές σχέσεις και εξισώσεις, αποτελούν μια τεράστια κατηγορία ασκήσεων, που τις συναντάμε σε όλη την έκταση της ύλης μας. Είναι συνήθως θεωρητικές ασκήσεις, στις οποίες δεν γνωρίζουμε τον τύπο μιας συνάρτησης αλλά μια σχέση που ικανοποιεί για κάθε στοιχείο του συνόλου ορισμού της και είτε προσπαθούμε να τον προσδιορίσουμε (τον τύπο της), είτε να αποκαλύψουμε κρυμμένες ιδιότητες της συνάρτησης χρησιμοποιώντας την σχέση που μας έχουν δώσει.

Για παράδειγμα, η συναρτησιακή εξίσωση $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ικανοποιείται από την συνάρτηση $f(x)=e^x$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν άλλες που την ικανοποιούν ή η εκθετική είναι και η μοναδική;

Συχνά από την σχέση που μας δίνεται, μπορούμε και βλέπουμε ποια είναι η ζητούμενη συνάρτηση και έπειτα πρέπει να αποδείξουμε την μοναδικότητά της. Δυστυχώς η κατηγορία αυτή ασκήσεων, δεν «μπαίνει σε καλούπι», δεν υπάρχουν παρά πολύ λίγες μέθοδοι που μπορούμε να εφαρμόσουμε. Συνήθως είναι η εμπειρία μας η οποία μας βοηθάει στην αναζήτησή μας.

Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με μερικές βασικές μεθόδους και ασκήσεις, και καθώς στην ύλη μας μπαίνουν και καινούρια εργαλεία, θα δούμε σε μεγαλύτερο βάθος και έκταση τις εφαρμογές τους.

Παράδειγμα 1: Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(2-x)+f(2+x)=x-1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Συνήθως για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μια πρόταση χρησιμοποιούμε την απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση που ικανοποιεί την σχέση (1).

Τότε εφόσον η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x=2$ και για $x=-2$.

Πράγματι:

- για $x=2$ η (1) γράφεται: $f(2-2)+f(2+2)=2-1\Rightarrow f(0)+f(4)=1$ (2)
- για $x=-2$ η (1) γράφεται: $f(2+2)+f(2-2)=-2-1\Rightarrow f(4)+f(0)=-3$ (3)

Οι σχέσεις (2) και (3) δίνουν ότι $1=-3$. Άτοπο.

Άρα δεν είναι δυνατόν να υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Παράδειγμα 2: Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες να ισχύει η σχέση $f(x)\cdot g(y)=x+y$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Λύση

Ακόμα μια φορά θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι υπάρχουν αυτές οι συναρτήσεις.

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Έτσι:

- για $x=0$ και $y=1$ η σχέση (1) γράφεται: $f(0)\cdot g(1)=1$ (2)
- για $x=1$ και $y=0$ η σχέση (1) γράφεται: $f(1)\cdot g(0)=1$ (3)
- για $x=0$ και $y=0$ η σχέση (1) γράφεται: $f(0)\cdot g(0)=0$ (4)

Οι σχέσεις και (2) και (3) δίνουν με πολλαπλασιασμό κατά μέλη:

$$f(0)\cdot g(1)\cdot f(1)\cdot g(0)=1$$

Όμως από (4) έχουμε: $0=1$. Άτοπο.

Άρα δεν είναι δυνατόν να υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Παράδειγμα 3: Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x-2)-2f(4-x)=-x^2+12x-26$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x)-2f(2-x)=-x^2+8x-6$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

α. Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε μια συναρτησιακή εξίσωση με αγνώστους τις συναρτήσεις $f(x-2)$ και $f(4-x)$ οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και θέλουμε να την μετατρέψουμε σε μια ισοδύναμη της μορφής (2).

Για να γίνει αυτό αρκεί να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση. Η σχέση (1) δεν ισχύει για κάποια $x \in \mathbb{R}$ αλλά η ισχύς της είναι καθολική. Αυτό σημαίνει ότι στην θέση των x μπορούμε να βάλουμε όχι μόνο οποιονδήποτε αριθμό, αλλά μια οποιαδήποτε πραγματική παράσταση.

Έτσι:

Αν θέσω στην θέση του x το $x+2$ η σχέση (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$(1) \Rightarrow f\left((x+2)-2\right)-2f\left(4-(x+2)\right)=-(x+2)^2+12(x+2)-26 \Leftrightarrow$$
$$f(x)-2f(2-x)=-4-4x-x^2+24+12x-26 \Leftrightarrow$$
$$f(x)-2f(2-x)=-x^2+8x-6$$

Άρα, $f(x)-2f(2-x)=-x^2+8x-6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2)

β. Τώρα έχουμε μια συναρτησιακή εξίσωση με αγνώστους τις συναρτήσεις $f(x)$ και $f(2-x)$, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τις 2 αυτές συναρτήσεις ώστε από την επίλυσή του να βρούμε την $f(x)$.

Πράγματι αν θέσω στην σχέση (2) όπου x το $2-x$, η σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα γράφεται:

$$(2) \Rightarrow f(2-x)-2f\left(2-(2-x)\right)=-(2-x)^2+8(2-x)-6 \Leftrightarrow$$
$$f(2-x)-2f(x)=-4+4x-x^2+16-8x-6 \Leftrightarrow$$
$$f(2-x)-2f(x)=-x^2-4x+6 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-2f(2-x)=-x^2+8x-6 \\ f(2-x)-2f(x)=-x^2-4x+6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)-2f(2-x)=-x^2+8x-6 \\ 2f(2-x)-4f(x)=-2x^2-8x+12 \end{array}\right\} \overset{+}{\Leftrightarrow}$$
$$f(x)-\cancel{2f(2-x)}+\cancel{2f(2-x)}-4f(x)=-x^2+8x-6-2x^2-8x+12 \Leftrightarrow$$
$$-3f(x)=-3x^2+6 \Leftrightarrow f(x)=x^2-2$$

Άρα $f(x)=x^2-2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4: Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(0)=1$ και $f(x+y)\le e^{x}f(y)$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Να βρεθεί ο τύπος της f

Λύση

α. Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, άρα και για $y=0$.

Έτσι για $y=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η (1) γράφεται: $f(x+0)\le e^{x}f(0)\Rightarrow f(x)\le e^{x}$ (2)

Η σχέση (1) αν θέσω όπου x το $-y$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$ γράφεται:

$(1)\Rightarrow f(-y+y)\le e^{-y}f(y)\Rightarrow f(0)\le \dfrac{1}{e^{y}}f(y)\Rightarrow f(y)\ge e^{y}$ (3)

Από (2) και (3) (και επειδή το γράμμα της μεταβλητής, δεν παίζει κάποιο ρόλο) παίρνω ότι:

$f(x)=e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση αυτή πράγματι επαληθεύει τις δοσμένες σχέσεις.

Προσοχή: Η επαλήθευση σε αυτήν την περίπτωση είναι απαραίτητη, μιας και εργάστηκα με συνεπαγωγές και όχι ισοδυναμίες.

Όταν χρησιμοποιείται επιλογή τιμών (πχ. θέτω όπου $y=0$) σε μια συναρτησιακή εξίσωση, πρέπει πάντα να εξετάζουμε αν η συνάρτηση που βρήκαμε επαληθεύει τις αρχικές σχέσεις και επομένως είναι δεκτή.

Παράδειγμα 5: Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$f(x)f(y)=f(x)+f(y)+3$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Λύση

(α τρόπος)

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, άρα και για $x=y=0$.

Έτσι για $x = y = 0$ η (1) γράφεται:

$$f(0)f(0) = f(0) + f(0) + 3 \Leftrightarrow f^2(0) - 2f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(f(0) = -1 \text{ ή } f(0) = 3\right)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(0) = -1$, τότε η (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $y = 0$ δίνει:

  $$f(x)f(0) = f(x) + f(0) + 3 \Rightarrow -f(x) = f(x) - 1 + 3 \Rightarrow f(x) = -1$$

  Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει την (1) και επομένως είναι δεκτή.

- Αν $f(0) = 3$, τότε η (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $y = 0$ δίνει:

  $$f(x)f(0) = f(x) + f(0) + 3 \Rightarrow 3f(x) = f(x) + 3 + 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

  Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει την (1) και επομένως είναι δεκτή.

  Άρα τελικά οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι σταθερές $f(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β τρόπος)

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, άρα και για $x = y$.

Έτσι για $x = y$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η (1) γράφεται:

$$(1) \Rightarrow f(x)f(x) = f(x) + f(x) + 3 \Leftrightarrow$$
$$f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) = -1 \text{ ή } f(x) = 3\right)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) = -1$ ή $f(x) = 3$.

(και όχι $f(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ας)

Θα δείξω ότι οι μόνες δεκτές λύσεις είναι οι συναρτήσεις $f(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, αν υπήρχαν συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in A \\ 3 & \text{αν } x \notin A \end{cases}$ που να ικανοποιούν την (1) τότε θα υπήρχαν $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ με $f(a) = -1$ και $\beta \in \mathbb{R} - \mathrm{A}$ με $f(\beta) = 3$ τέτοια ώστε να ισχύει η (1).

Επομένως να ισχύει: $f(a)f(\beta)=f(a)+f(\beta)+3 \Rightarrow -1\cdot 3=-1+3+3 \Rightarrow -3=5$. Άτοπο.

Άρα οι μόνες συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1) θα είναι οι $f(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6: Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα, $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-x^2-y^2$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$.

Λύση

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$, άρα και για $x=y=1$.

Έτσι για $x=y=1$ η (1) γράφεται:

$$(1)\Rightarrow f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)-1^2-1^2 \Leftrightarrow f(1)=f^2(1)-2 \Leftrightarrow$$
$$f^2(1)-f(1)-2=0 \Leftrightarrow \left(f(1)=-1 \text{ ή } f(1)=2\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $f(1)=-1$ τότε η (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $y=1$ γράφεται:

  $$f(x\cdot 1)=f(x)\cdot f(1)-x^2-1^2 \Leftrightarrow f(x)=-f(x)-x^2-1 \Leftrightarrow$$
  $$2f(x)=-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$$

  Για να είναι δεκτή η λύση (η συγκεκριμένη συνάρτηση δηλαδή) θα πρέπει να επαληθεύσω ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις που δόθηκαν αρχικά.

  Έτσι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$ η (1) για την $f(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ γράφεται:

  $$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
  $$-\frac{1}{2}\left(x^2y^2+1\right)=\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\right]\left[-\frac{1}{2}\left(y^2+1\right)\right]-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
  $$-\frac{1}{2}\left(x^2y^2+1\right)=\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
  $$-2x^2y^2-2=x^2y^2+x^2+y^2+1-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
  $$-3x^2y^2=3 \Leftrightarrow x^2y^2=-1 \quad \text{Άτοπο!}$$

Άρα η $f(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$ δεν είναι δεκτή λύση.

- Αν $f(1)=2$ τότε η (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $y=1$ γράφεται:

$$f(x\cdot 1)=f(x)\cdot f(1)-x^2-1^2 \Leftrightarrow f(x)=2f(x)-x^2-1 \Leftrightarrow$$
$$-f(x)=-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=x^2+1$$

Για να είναι δεκτή η λύση (η συγκεκριμένη συνάρτηση δηλαδή) θα πρέπει να επαληθεύσω ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις που δόθηκαν αρχικά.

Έτσι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$ η (1) για την $f(x)=x^2+1$ γράφεται:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2y^2+1=(x^2+1)(y^2+1)-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2y^2+1=x^2y^2+x^2+y^2+1-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$
$1=1$ που ισχύει

Άρα η $f(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}^*$ είναι η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει η (1).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σημειώσεις Θωμά Ραϊκοφτσαλή από τον ιστότοπο www.mathjazz.com
2. Οδηγίες Διδασκαλίας από τον Σχολικό Σύμβουλο Δ. Ι. Μπουνάκη
3. Οδηγίες Διδασκαλίας από τον Σχολικό Σύμβουλο Δ. Σπαθάρα
4. Σημειώσεις Α. Κυριακόπουλου στις Συναρτήσεις.
5. «Σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφες συναρτήσεις, συναρτησιακές σχέσεις και συναρτήσεις που ορίζονται πεπλεγμένα (ύπαρξη και κατασκευή)» από τον Σχολικό Σύμβουλο Π. Ελευθερίου.
6. Ιστότοπος www.mathematica.gr
7. «Μαθηματικά Γ Λυκείου Γ1» από Χ. Στεργίου, Χ. Νάκη, Ι. Στεργίου
8. «Μαθηματικά Γ Λυκείου Γ1» από Β. Παπαδάκης
9. «Μαθηματικά Γ Λυκείου» από Τ. Δρούτσας, Ν. Πανουσάκης
10. «Συναρτήσεις» από Γ. Μπαϊλάκης
11. «Ανάλυση Τόμος Ι» από Γ. Γιατίλης
12. «16 μήνες στο Pathfinder/Mathematica, Η χαρά της Γενίκευσης Ι» από Ν. Μαυρογιάννη.