Α. Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ β. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x}$

γ. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9x+14}$ δ. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^3+x^2-x-1}+\dfrac{x^2-3}{x^3+x^2-4x-4}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt{x-2}$ β. $f(x)=\sqrt{5-x}$

γ. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ δ. $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$

ε. $f(x)=\sqrt[5]{2-|x+3|}$ στ. $f(x)=\dfrac{x+2}{2-|x|}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$ β. $f(x)=\ln\dfrac{5-x}{6+x}$

γ. $f(x)=\ln x^2$ δ. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ε. $f(x)=\ln(\ln x)$ στ. $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

ζ. $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-3\ln x+2}$ η. $f(x)=\sqrt{x^{\ln x}-e}$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$ β. $f(x)=\sqrt{2-\eta\mu x}$

γ. $f(x)=\dfrac{1-\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$ δ. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$

ε. $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2+6x-24}$ στ. $f(x)=(x-2)^{x+2}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{\ln x}}$ β. $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$ γ. $f(x)=\varepsilon\varphi\left(\pi\sigma\upsilon\nu x\right)$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{1}{(\lambda+1)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-3}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

7. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν για πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

α. $f(x)=\dfrac{x}{3x^2-2\lambda x+3}$ **β.** $f(x)=\ln\left(x^2-\lambda x+1\right)$

γ. $f(x)=\ln\left(\lambda x^2+\lambda x+\lambda-1\right)$ **δ.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\lambda x^2-2\lambda x+3}}$

Β. Τιμή Συνάρτησης

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$. Να βρεθούν τα $f(-2)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ και $f(h-1)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x-2)+f(x+1)+1=f(2x+3)-6x$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν x ρητός}\\ 0, & \text{αν x άρρητος}\end{cases}$

Να βρείτε τα $f(-2)$, $f(2{,}5)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, $f\left(3{,}\overline{3}\right)$ και $f(\pi)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x^2-3, & \text{αν } x<0\\ x^3-8, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$

α. Να βρεθούν τα $f(0)$, $f(-5)$, $f(6)$ και $f(10)$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}+4}+\alpha$. Αν $f(25)=1$ να βρεθεί το α.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3-\log(x+a)}$ για την οποία ισχύει $f(101)=1$. Να βρείτε:

α. την τιμή του a

β. το πεδίο ορισμού της f

γ. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{f\left(f\left(\dfrac{11}{10}\right)\right)-\ln\left(x-f(2)\right)}$

Γ. Σύνολο Τιμών Συνάρτησης

14. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ **β.** $f(x)=e^{2x-4}+5$

γ. $f(x)=\ln(x-5)$ **δ.** $f(x)=x^2+2x+3$

ε. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ με $x\in[-2,2]$ **στ.** $f(x)=\sqrt{x-4}$

ζ. $f(x)=(x-3)^2-2$ **η.** $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-3$

15. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\geq 0 \\ x-1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

β. $g(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } 1\leq x<2 \\ 2+x, & \text{αν } 2\leq x<4 \end{cases}$

16. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ **β.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

γ. $f(x)=\ln\dfrac{2-|x|}{2+|x|}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{4e^{|x|}-1}{e^{|x|}+1}$

17. Να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda x+1}{x^2+x+1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[-2,2]$

18. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3, ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=2+\sqrt{x-1}$

19. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0, ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$

20. Δίνεται μια συνάρτηση $f:A\to[1,+\infty)$. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια λύση;

α. $f(x)=2$ **β.** $f(x)=2019$ **γ.** $f(x)=-2$ **δ.** $f(x)=a^2+1$ με $a\in\mathbb{R}$

Δ. Ισότητα Συναρτήσεων

21. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

Όπου $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

α. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ και $g(x) = |x - 3|$

β. $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+3)}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

γ. $f(x) = \ln(x^2 + 2) - \ln(x^2 + 1)$ και $g(x) = \ln\dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

δ. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 2}$ και $g(x) = x$

ε. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$

στ. $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

(Σημ: Να γράψετε αν μπορείτε την g με την μορφή δύναμης)

22. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

α. $f(x) = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ και $g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

β. $f(x) = \left(1 + \sqrt{2}\right)^x - \left(\sqrt{2} - 1\right)^{-x}$ και $g(x) = 0$

23. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{-\lambda x^3 + 3x - 4}{x^2 - \lambda x + 4}$ και $g(x) = -\lambda x - 1$ να είναι ίσες.

24. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{(\lambda + 1)x - 2\lambda - 1}{x - 2\lambda^2 + \lambda - 2} \text{ και } g(x) = \frac{\left[(1-\lambda)^8 + \lambda\right]x + (\lambda - 3)^5 - 4}{x - \lambda^2 - 2\lambda}.$$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για τις οποίες για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει ότι $f(x_1) f(x_2) f(x_3) = g(x_1) g(x_2) g(x_3)$. Να αποδείξετε ότι $f = g$.

Ε. Πράξεις Συναρτήσεων

26. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$ αν:

α. $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $g(x)=\ln x$ β. $f(x)=\frac{x}{x+3}$ και $g(x)=1-\frac{9}{x^2}$

27. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x<4 \\ \sqrt{x} & \text{αν } x\geq 4 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν } x\leq 2 \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x>2 \end{cases}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$

28. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x)=x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

29. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες να ισχύει ότι $f^2(x)=7f(x)-10$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

30. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $|f(x)|=|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

31. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x)=4e^x\left(f(x)-e^x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

32. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x)=3\eta\mu x\left(2f(x)-3\eta\mu x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

33. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $1+f^2(x)+g^2(x)\leq 2\left(f(x)\eta\mu x-g(x)\sigma\upsilon\nu x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

34. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\left(f+g\right)(x)^2=4\left(f\cdot g\right)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f=g$.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\left(f+g\right)(x)\left(\left(f+g\right)(x)-2\right)=4\left(f\cdot g\right)(x)-2\left(f+g\right)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $f=g$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\left(f+g\right)^2(x)-\left(f-g\right)^2(x)-4x^2\geq 2\left(f+g\right)(x)\left[\left(f+g\right)(x)-2x\right]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι $f=g$.

ΣΤ. Σύνθεση Συναρτήσεων

37. Να εκφράσετε την συνάρτηση f, ως σύνθεση δυο ή περισσοτέρων συναρτήσεων (μη ταυτοτικών) σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α. $f(x)=\eta\mu 2x$ β. $f(x)=\ln(x^2)$ γ. $f(x)=e^{2x-1}$

δ. $f(x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu 3x}$ ε. $f(x)=x^x$ στ. $f(x)=\sqrt[3]{1+\ln^2(x+2)}$

38. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$ όταν:

α. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x}$

β. $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=x^2$

γ. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

39. Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ g$ αν $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{αν } x<0 \\ x+2 & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 1-x & \text{αν } x\leq 1 \\ 2-x & \text{αν } x>1 \end{cases}$.

40. Να ορίσετε την συνάρτηση $g\circ f$ αν $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } 0\leq x<2 \\ x+2 & \text{αν } 2\leq x<7 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{αν } -1\leq x<3 \\ \sqrt{5x^2+4} & \text{αν } x\geq 3 \end{cases}$

41. Να ορίσετε την συνάρτηση $(f\circ f)(x)$ όταν:

α. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ β. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

42. Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης h με $h(x)=f(x^2-4)+f(x+1)$ αν $A_f=[0,5)$.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x-1$ και $g(x)=3ax+1$.

Να βρεθεί η τιμή του $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

44. Αν f,g δυο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $(g\circ f)(x)=x-\ln x+1$, $x>0$.

α. Να βρείτε την συνάρτηση g αν $f(x)=\ln x-1$

β. Να βρείτε την συνάρτηση f αν $g(x)=2x-5$

45. Να βρεθεί η συνάρτηση f ώστε να ισχύει:

α. $(g\circ f)(x)=9x^2-\eta\mu x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=3x-1$.

β. $(g\circ f)(x)=2x-1$ για κάθε $x\neq 1$ και $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$.

γ. $(g\circ f)(x)=\ln(x^2+1)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x-1$.

δ. $(g\circ f)(x)=|x+1|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^{\sqrt{x}}$.

46. Να βρεθεί η συνάρτηση f ώστε να ισχύει:

α. $f(x+1)=x^2+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β. $f(\ln x)=3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ. $f(e^x-1)=e^{2x}-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ. $f(1+\eta\mu x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ε. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Έπειτα να δείξετε ότι $f(1+x)+f(1-x)=2\big(1+f(x)\big)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Ζ. Θεωρητικές Ασκήσεις

47. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(2^x)+f(x^2)+1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

48. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(a-x)+f(a+x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $a\in\mathbb{R}^*$ τυχαίος αριθμός.

49. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)+f(3-x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

50. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f\big(f(x)\big)=x^2-3x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $f(2)$.

51. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f\big(f(x)\big)=x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $f(1)$.

52. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f\big(f(x)\big)=2x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(2x-3)=2f(x)-3$

β. Να υπολογίσετε το $f(3)$

53. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f(x)+2f\left(\frac{2002}{x}\right)=3x$ για κάθε $x>0$. Να υπολογίσετε το $f(2)$.

54. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(\frac{5x-9}{4}\right)=5x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τον τύπο της f

β. Αν $h(x)=ax+\beta$, $x\in\mathbb{R}$ να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a,β ώστε $h(h(x))=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+f(f(x))=2019$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(4)=3$.

α. Να δείξετε ότι $f(3)=2016$ **β.** Να υπολογίστε το $f(f(2016))$

56. Να βρείτε μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f(x)+3f(-x)-5=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

57. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f\circ f)(x)=x^2+\frac{1}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

58. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, αν ισχύει ότι : $(3-2x)f(x-1)+(x+1)f(1-x)=1-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

59. Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $2f(x+y)=f(x+2y)+x^3$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0)=0$ **β.** $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$. Να εξετάσετε αν τα σημεία $M_1(1,3)$, $M_2(4,3)$ και $M(6,4)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της f.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{5-x}+3\alpha$. Αν το σημείο $\mathrm{M}(1,-4)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f να βρεθεί το a.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+3$. Αν το σημείο $\mathrm{M}(1,2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f να βρεθεί το a.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ με $x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σημείο $P(2,\lambda)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του μ το σημείο $\mathrm{T}\left(\mu,-\frac{1}{2}\right)$, ανήκει στην γραφική παράσταση της f.

65. Να βρείτε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=a^2+\beta\ln(x-1)-4$ να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ και να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1+e,3)$.

66. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' και yy' όταν:

α. $f(x)=\ln^2 x-\ln x$

β. $f(x)=e^{2x}-3e^x+2$

γ. $f(x)=|2x-1|-5$

δ. $f(x)=\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x$

67. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-3$ και $g(x)=2\sqrt{x+5}+1$. Να βρεθούν τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων των f,g με τους άξονες xx' και yy'. Πότε οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων βρίσκονται πάνω από τον xx';

68. Αν $a\geq\frac{1}{2}$ να δείξετε ότι η ευθεία $y=2a-1$ τέμνει την C_f με $f(x)=\sqrt{3x^2+5x-2}$ σε ακριβώς δυο σημεία.

69. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx' όταν:

α. $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ β. $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ γ. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{1-|x|}$

70. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

α. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=x$

β. $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=2-x$

γ. $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^2+x-1$

δ. $f(x)=e^x\ln x+6$ και $g(x)=2e^x+3\ln x$

71. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

α. $f(x)=x-1$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$

β. $f(x)=4^x-2^{x+1}$ και $g(x)=2^{x+2}-8$

γ. $f(x)=x^2-4x+|x-2|$ και $g(x)=|x-2|-x+4$

δ. $f(x)=2\ln x+3$ και $g(x)=\ln^2 x+\ln x+1$

72. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

α. $f(x)=g(x)+x^2-1$ β. $f(x)=g(x)+\ln x-1$

73. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x^2-\beta x+4$ και $g(x)=(a-2)x^2+x-1$. Να βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι C_f και C_g να τέμνονται πάνω στις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

74. Να δείξετε ότι για κάθε $a\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(a-2)x^2-3ax+2(a+1)+1$ διέρχεται από δυο σταθερά σημεία.

75. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x)+2f(x)=x^2+2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

76. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x)+\sigma\upsilon\nu x=x^2\eta\mu x+2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον $y'y$.

77. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $\beta^2<4\gamma$ να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

78. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(x)+f(3-2x)=2g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β. Αν, επιπλέον, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)+2f(1-x)=x^2-x$ να βρεθούν οι τύποι των f,g καθώς και το κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων.

79. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

α. $f(x)=e^x$ **β.** $f(x)=-e^x$ **γ.** $f(x)=e^x+1$

δ. $f(x)=e^{-x}+1$ **ε.** $f(x)=e^{|x|}+1$ **στ.** $f(x)=e^{x+1}+1$

80. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{αν } x\le 0 \\ x^2+1 & \text{αν } 0<x\le 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } 2<x\le 4 \end{cases}$

Θ. Συμμετρία (Αρτια – Περιττή Συνάρτηση)

81. Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή

α. $f(x)=x^2+x\eta\mu x$ **β.** $f(x)=|x-3|-|x+3|$ **γ.** $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{x+2}$

δ. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ **ε.** $f(x)=\sqrt{x^2+1-\sigma\upsilon\nu x}$ **στ.** $f(x)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x$

82. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x^3-1 & \text{αν } x\le -2 \\ 2x^3+1 & \text{αν } x\ge 2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν εμφανίζει κεντρική ή αξονική συμμετρία.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Να δείξετε ότι:

α. έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

β. έχει άξονα συμμετρίας την αρχή των αξόνων

γ. έχει με τον άξονα $x'x$ ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

84. Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή.

85. Να αποδείξετε ότι αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττές συναρτήσεις, τότε η διαφορά τους είναι επίσης περιττή.

86. Να αποδείξετε ότι αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτιες συναρτήσεις, τότε η διαφορά τους είναι επίσης άρτια.

Σημείωση: Οι ασκήσεις **84, 85, 86** ουσιαστικά αποδεικνύουν ότι οποιαδήποτε συνάρτηση με κατάλληλο πεδίο ορισμού, μπορεί ναι γραφεί σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης κατά μοναδικό τρόπο. Προσπαθήστε να αποδείξετε την μοναδικότητα.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ με $a\neq 0$. Να βρείτε τους $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι άρτια.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $a\neq 0$. Να προσδιορίσετε τους $a,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι περιττή.

89. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $3f(x)+f(-x)=4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

β. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.

90. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)f(-x)=f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

91. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)(x^2+2)\leq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

92. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(f(f(x)))=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

Ι. Μονοτονία Συνάρτησης

93. Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία τους:

α. $f(x)=x^5+4x^3+2x+1$ β. $f(x)=(x-1)^3+4$

γ. $f(x)=\dfrac{8x+3}{2x+1}$ δ. $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x-2}}$

ε. $f(x)=e^x+x$ στ. $f(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$

94. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-x+1} & \text{αν } x\geq 0 \\ \ln(-x) & \text{αν } x<0 \end{cases}$

95. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$

96. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$

97. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

98. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^3-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $a,\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $a<\beta$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu a-\sigma\upsilon\nu\beta\geq a^3-\beta^3$

99. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$, $x>0$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{2001}{1001}$ και $\dfrac{1999}{999}$

100. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $a,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $a<\beta$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu^2 a}{\eta\mu^2\beta}<\dfrac{\sigma\upsilon\nu a}{\sigma\upsilon\nu\beta}$

101. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $g(x)=f(5-x)-f\left(x^3\right)$

β. $g(x)=e^{-f(x)}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

102. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f\left(f(x)-x\right)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

103. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f\left(f\left(x\right)\right)=-e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

104. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^{3}\left(x\right)+e^{f(x)}+3=e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

105. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}\left(-1,3\right)$ και $\mathrm{B}\left(2,1\right)$. Να βρείτε την μονοτονία της f.

106. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=e^{x}+2x$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β. Να λυθεί η ανίσωση $e^{x-1}-e^{x^{2}-1}>2\left(x^{2}-1\right)-2\left(x-1\right)$

107. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=x-\dfrac{3}{x}+\sqrt{x}$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$

β. Να λυθεί η ανίσωση $x^{3}+2+\sqrt{x^{3}+2}<-1+\dfrac{3}{x^{3}+2}$

108. Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f^{2}\left(x^{2}\right)-2xf\left(6x-8\right)\leq 4-3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

109. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $f\left(8-x^{2}\right)<f\left(-1\right)$

β. $f\left(2^{x}+3\right)\geq f\left(5\right)$

γ. $f\left(\ln\left(x^{2}+2\right)\right)\geq f\left(\ln 5\right)$

110. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $f\left(x^{2}-3x\right)<f\left(6-4x\right)$

β. $f\left(x^{4}+4\right)\geq f\left(x^{2}+2\right)$

γ. $f\left(f\left(5x-2\right)\right)>f\left(f\left(4x+1\right)\right)$

111. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=x^{5}+\sqrt{3^{x}+3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λυθεί η ανίσωση $\left(3x+18\right)^{5}-\left(7x+12\right)^{5}<\dfrac{3^{7x+12}-3^{3x+18}}{\sqrt{3^{7x+12}+3}+\sqrt{3^{3x+18}+3}}$

112. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\ln\left(x^2+x+1\right)+x^2=-x$

β. $\ln\dfrac{2x^2-x+3}{3x+x^2}=4x-x^2-3$

113. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(x^2\right)=f(x)+f\left(x^3\right)$

114. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x+1)-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $g(1)=0$

α. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f\left(\sqrt{x}+1\right)>f\left(\sqrt{x}\right)$

ii. $f\left(x^3+1\right)-f\left(x^3\right)<f(x+1)-f(x)$

β. Να αποδείξετε ότι $f\left(e^x+1\right)-f(\sigma\upsilon\nu x+1)>f\left(e^x\right)-f(\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x>0$

115. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x^{11}+2x^7+3x^5+7x<18$

β. $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-2\varepsilon\varphi x-x-1<0$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

γ. $3^x+4^x+5^x>6^x$

116. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}+f(x)=1-e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(x^2+2x\right)\right)<f\left(f(x+2)\right)$

117. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(x)=x$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

118. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(\dfrac{2x+3f(x)}{5}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

119. Έστω $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$ είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με της f.

120. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ όπου f είναι γνησίως αύξουσα ενώ η g είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x)\cdot g(1)>g(\ln x)\cdot f(1)$ όπου $x>0$.

Κ. Ακρότατα

121. Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=|e^x-1|$ β. $f(x)=x^2-2x-5$ γ. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

δ. $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1$ ε. $f(x)=4-|x-2|$ στ. $f(x)=3\eta\mu x-1$

122. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{7x^2+3x+3}}$ έχει ελάχιστο ίσο με $\dfrac{1}{2}$.

123. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{6x+\lambda}{x^2+5}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ έχει μέγιστο το 1.

Να βρεθούν:

α. ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$

β. το ελάχιστο της συνάρτησης f

124. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $e^{2f(x)}-4e^{f(x)}\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $a,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f(a)=0$ και $f(\beta)=\ln 3$ να αποδείξετε ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

125. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$.

α. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -3

β. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^3-\dfrac{3}{2}\right)+f\left(x^4-3x+\dfrac{3}{2}\right)+6=0$

γ. Να βρείτε τους $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(a-\beta-1)+f(2a+\beta+1)+6=0$

126. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=4-\left(f(x)-x+2\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x-2$ να δείξετε ότι η g έχει ολικό μέγιστο.

127. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{4f(x)}{4+f^2(x)}$ έχει μέγιστο το 1.

128. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f(x)+f\left(\sqrt{1-x^2}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:

α. τον τύπο της f

β. την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f

129. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α. Να δειχτεί ότι η f δεν εμφανίζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

β. Υπάρχουν συναρτήσεις $h,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(0)=h(0)=0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$;

130. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)f(2-x)+g(x)g(2-x)$ έχει μέγιστο ,το οποίο και να βρεθεί.

Λ. Συνάρτηση 1-1 και Αντίστροφη Συνάρτηση

131. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»

α. $f(x)=2\ln(x-5)+8$ **β.** $f(x)=1+2e^{3x-5}$

γ. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^3-1}$

132. Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι.

α. $f(x)=2+\sqrt{x^2-3x+2}$ **β.** $f(x)=3x-2$

γ. $f(x)=2-3x^2$ **δ.** $f(x)=2|x|+1$

133. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^7+2x-5$ είναι «1-1»

134. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+\eta\mu x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι «1-1»

135. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu\ x\le 0 \\ -\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$ είναι «1-1».

136. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{1-x}}}$ είναι «1-1».

137. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(f(x))=x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

138. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x)+f(x)=2-x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

139. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(f(x))+f^{2019}(x)=x^{2019}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

140. Δίνεται η «1-1» συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x-4)f(6-x)=f(ax+1)$, $a\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:

α. τον $a\in\mathbb{R}$ **β.** το $f(1)$

141. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)f(2-x)\ge f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι «1-1».

142. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει «1-1» συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\pi^x)+f(e^x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

143. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει «1-1» συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x)\le f(x)f(1-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

144. Να εξεταστεί αν υπάρχει συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η όποια να είναι «1-1» και με την ακόλουθη ιδιότητα : $f(x)+f(\sqrt{x})+f(x^2)=2010$, για κάθε $x>0$

145. Δίνεται η «1-1» συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x)=f^3(x)+2f(x)-3$ είναι «1-1».

146. Υπάρχουν συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που να είναι «1-1» και να ικανοποιούν την ανίσωση: $f(x^2)-(f(x))^2\ge\frac{1}{4}$;

147. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(f\left(x\right)\right)=2019$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

β. Να δείξετε ότι $f\left(2019\right)=2019$

148. Δίνεται η «1-1» συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f\left(0\right)=2$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $f\left(x\right)=2$ **β.** $f\left(2-x\right)=2$ **γ.** $f\left(x^2+5\right)=f\left(9\right)$ **δ.** $f\left(\ln x\right)=f\left(3\right)$

149. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=x^5+2x^3+x-4$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x^5+2x^3+x-4=0$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{5x}+2e^{3x}+e^x-4=0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{5x}+2e^{3x}>4-e^x$

150. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=2x+\ln\left(x^2+1\right)$.

Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\dfrac{\left(3x-2\right)^2+1}{x^4+1}$

151. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $e^{x-1}+\ln x+x=2$

β. $\left(e^{x-1}+x-3\right)^7+\left(e^{x-1}+x-3\right)^5+\left(e^{x-1}+x-3\right)^3+e^{x-1}+x=0$

152. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{3x+2}{x-1}$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

153. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{2-\sqrt{4-x}}$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της

154. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της

155. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{1-\ln x}$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της

156. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x-1}$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της

157. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$.

158. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x)+f(x)-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $y=x$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x-1)+f(x-3)<f^{-1}(2-x)$

159. Δίνεται f γνησίως μονότονη ορισμένη στους πραγματικούς αριθμούς με $f(5)=9$ και $f(2)=3$.

α. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(3+f^{-1}\left(x^2+2x\right)\right)=9$

β. Να λυθεί η ανίσωση : $f\left(f^{-1}\left(x^2-8x\right)-2\right)<2$

160. Θεωρούμε την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=2x-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Δίνεται ακόμη ότι: $f(1)=3$ και $f(3)=9$. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» και να λυθεί η $f^{-1}(x)=9$

161. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ για κάθε $x,y>0$.

Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση τότε

α. Λύστε την εξίσωση $f\left(x^2+3\right)+f(x)=f\left(x^2+1\right)+f(x+1)$

β. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x>1$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

162. Δίνονται δύο συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που έχουν την ιδιότητα :

$f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)=-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να αποδειχθεί ότι :

α. Οι συναρτήσεις f,g είναι περιττές και $f(0)=g(0)$.

β. Οι συναρτήσεις f, g είναι αντιστρέψιμες.

γ. Οι συναρτήσεις f, g έχουν σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες, δεν μπορεί έχουν την ίδια μονοτονία .

ε. Ισχύουν οι σχέσεις $f^{-1}(x) = -g(x)$ και $g^{-1}(x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

163. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} + x^2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» και να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}(x^2 - 1) < x$

164. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. $f(1) = 0$

β. η f δεν αντιστρέφεται

γ. $|f(x)| \le |x^2 - 1|$

165. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1»

β. Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης f .

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2f^{-1}(x)$

166. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + 3e^{x-2}$ όπου $x \in \mathbb{R}$, καθώς και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(g \circ f)(x) = 8 - 3e^{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1»

β. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(f(|x| - 3) + e^x - 1\right) - f(e^x + 1) = 0$

167. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $[1, +\infty]$.

Να αποδείξετε ότι:

α. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει ότι $f(1) = 1$

β. η εξίσωση $f(x)+f^{-1}(x)=2f(x)f^{-1}(x)$, όπου $f^{-1}(x)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f, έχει μοναδική λύση την $x_0=1$.

γ. αν ισχύει ότι $f\left(\dfrac{f(x)+f^{-1}(x)}{x}\right)=x$ για κάθε $x\geq 1$ τότε $f(x)=x$ για κάθε $x\geq 1$

.

168. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει $f(x)>0$ και $f(f(x))=x\cdot f(x)$. Να δείξετε ότι:

α. η f είναι «1-1»

β. $f(1)=1$

γ. αν ισχύει ότι $f((0,+\infty))=(0,+\infty)$ τότε $f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=x$ για κάθε $x>0$.