# Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Η έννοια του ορίου στην Ανάλυση είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες, και η βάση πάνω στην οποία θα χτιστούν, άλλες όπως η συνέχεια, η παραγωγισιμότητα, το ολοκλήρωμα και άλλες. Εμείς θα μελετήσουμε την έννοια του ορίου μιας πραγματικής συνάρτησης και θα δώσουμε, τόσο τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό, **<u>που όμως είναι εκτός ύλης</u>**, όσο και τον διαισθητικό τον οποίο χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο.

Πριν δώσουμε όμως τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, θα πρέπει να δώσουμε κάποιους επιπλέον ορισμούς.

## <u>Σημείο συσσώρευσης και Μεμονωμένο Σημείο.</u>

Έστω ένα σύνολο $\mathrm{A}$. Το σημείο $x_0$ θα ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης (σ.σ.)** του συνόλου $\mathrm{A}$, αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$, το σύνολο $\left((x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)\right)\cap \mathrm{A}$ είναι μη κενό σύνολο.

Δηλαδή το $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathrm{A}$, αν και μόνο αν, οσοδήποτε κοντά στο $x_0$ μπορούμε να βρούμε στοιχεία του $\mathrm{A}$, διαφορετικά από το $x_0$. **Το σημείο $x_0$, μπορεί να ανήκει στο $\mathrm{A}$, ή και να μην ανήκει σε αυτό.**

Για παράδειγμα σε ένα διάστημα $\Delta$, κάθε $x_0 \in \Delta$ αποτελεί σημείο συσσώρευσης του διαστήματος. Αν το διάστημα $\Delta$ είναι κλειστό, π.χ. της μορφής $[a,\beta]$ τότε κάθε σημείο του διαστήματος είναι και σημείο συσσώρευσης. Αν αντίστοιχα το διάστημα $\Delta$ είναι ανοικτό, π.χ. της μορφής $(a,\beta)$ τότε σημεία συσσώρευσης εκτός από τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος, είναι και τα άκρα του, εφόσον για κάθε $\delta > 0$, το σύνολο $\left((a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)\right)\cap \Delta$ είναι μη κενό σύνολο αφού έχει τουλάχιστον ένα σημείο το $a$.

Αν όμως θεωρήσουμε το σύνολο $\mathrm{A}=(1,2)\cup\{4\}$, το στοιχείο 4, δεν αποτελεί σημείο συσσώρευσης του συνόλου, μιας και στην περιοχή $(4-\delta,4)\cup(4,4+\delta)$, με $\delta<2$ δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με το $\mathrm{A}$.

Το στοιχείο $x_0 = 4$ καλείται μεμονωμένο σημείο του συνόλου $\mathrm{A}$.

Έτσι **μεμονωμένο σημείο** ενός συνόλου $\mathrm{A}$, καλούμε κάθε στοιχείο $x_0 \in \mathrm{A}$ το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\mathrm{A}$.

Για παράδειγμα, το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης, αλλά όλα τα σημεία του είναι μεμονωμένα σημεία.

Έστω η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ και $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $\mathrm{A}$. Λέμε ότι η συνάρτηση $f$ έχει όριο τον πραγματικό αριθμό $\ell$, καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$, και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ **αν και μόνο αν**

για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα, αν $x\in\mathrm{A}$ και $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ τότε $f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell)\cup(\ell,\ell+\varepsilon)$.

**ή ισοδύναμα:**

για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα, για κάθε $x\in\mathrm{A}$ με $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

## Προσοχή:

1. Όταν αναφερόμαστε σε όρια, είναι σαφές ότι το $x$ είναι οσοδήποτε κοντά στο $x_0$ θέλουμε, **αλλά δεν μπορεί** να είναι ποτέ ίσο με το $x_0$.
2. Η ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο $x_0$, είναι **ανεξάρτητη** από το αν ορίζεται η συνάρτηση στο συγκεκριμένο σημείο, και ακόμα και αν ορίζεται δεν μας ενδιαφέρει η τιμή που παίρνει.
   Για αυτό και στον ορισμό του ορίου δεν μας ενδιαφέρει αν η συνάρτηση ορίζεται στο σημείο $x_0$ παρά μόνο να ορίζεται σε μια «γειτονιά του».
3. Αποδεικνύεται ότι **όταν το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει, τότε αυτό είναι μοναδικό**.

**Παράδειγμα:** Να δείξετε ότι αν $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Για κάθε $\varepsilon>0$ θα πρέπει να βρω ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\neq 1$ με $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$.

Παρατηρώ ότι: $|f(x)-2|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|$

Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ με $\delta\le\varepsilon$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\neq 1$ με $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|=|x-1|<\delta\le\varepsilon$.

## Πλευρικά Όρια

Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν στοιχεία του $A$ στο $(x_0-\delta,x_0)$. Λέμε ότι η συνάρτηση $f$ **έχει αριστερό πλευρικό όριο** τον πραγματικό αριθμό $\ell$, καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ από αριστερά, και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα, για κάθε $x\in A$ με $x\in(x_0-\delta,x_0)$ τότε $f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell)\cup(\ell,\ell+\varepsilon)$.

**ή ισοδύναμα:**

για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα, για κάθε $x\in A$ με $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Τελείως ανάλογα, έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν στοιχεία του $A$ στο $(x_0,x_0+\delta)$. Λέμε ότι η συνάρτηση $f$ **έχει δεξί πλευρικό όριο** τον πραγματικό αριθμό $\ell$, καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ από δεξιά, και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα, για κάθε $x\in A$ με $x\in(x_0,x_0+\delta)$ τότε $f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell)\cup(\ell,\ell+\varepsilon)$.

ή ισοδύναμα:

για κάθε $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα, για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Αποδεικνύεται, ότι αν $x_0$ ένα σημείο συσσώρευσης του $A$, τέτοιο ώστε να υπάρχουν τα πλευρικά όρια από αριστερά και δεξιά της συνάρτησης $f$, τότε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ο πραγματικός αριθμός $\ell$ αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα. Δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε και γραφικά την έννοια του ορίου.

## Γραφική Προσέγγιση – Διαισθητική Προσέγγιση των Ορίων

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης $f$ προσεγγίζουν, όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό $\ell$, καθώς το $x$ προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό $x_0$, γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ τότε μπορεί:

- να είναι $\ell = f(x_0)$
- να είναι $\ell \neq f(x_0)$
- να μην ορίζεται η $f$ στο $x_0$

Όταν οι τιμές της $f$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον αριθμό $\ell_1$ καθώς το $x$ προσεγγίζει το $x_0$ από μικρότερες τιμές $(x < x_0)$, γράφουμε $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$ και λέμε ότι το αριστερό όριο της $f$ στο $x_0$ είναι το $\ell_1$.

Αντίστοιχα, όταν οι τιμές της $f$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον αριθμό $\ell_2$, καθώς το $x$ προσεγγίζει το $x_0$ από μεγαλύτερες τιμές $(x > x_0)$, γράφουμε $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \ell_2$ και λέμε ότι το δεξί όριο της $f$ στο $x_0$ είναι το $\ell_2$.

Το αριστερό και το δεξί όριο της $f$ στο $x_0$, αν υπάρχουν λέγονται πλευρικά όρια της $f$ στο $x_0$.

Αν μια συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

### Προσοχή:

1. Αν μια συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(a, x_0)$, αλλά δεν ορίζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(x_0, \beta)$, τότε ορίζουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

**2.** Αντίστοιχα, αν μια συνάρτηση $f$, είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(x_0,\beta)$ αλλά δεν ορίζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(a,x_0)$, τότε ορίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

**3.** Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ είναι ανεξάρτητο από τα άκρα $a,\beta$ των διαστημάτων $(a,x_0)$ και $(x_0,\beta)$.

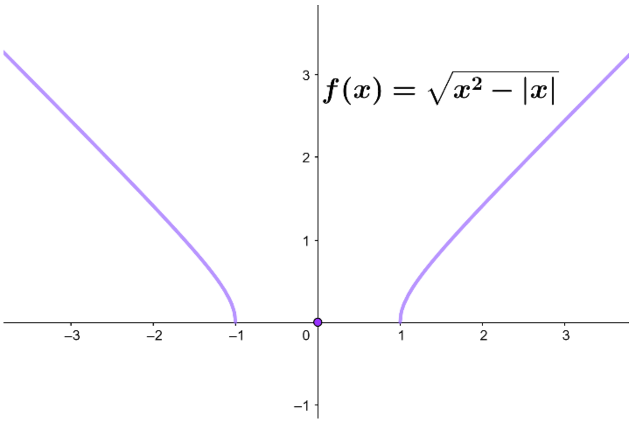
**4.** Αν μια συνάρτηση $f$ έχει όριο στο $x_0$, τότε αυτό είναι μοναδικό.

## Παρατηρήσεις:

**1.** Είναι σημαντικό να γίνει διάκριση των εννοιών, «δεν ορίζεται» το όριο και «δεν υπάρχει» το όριο.

Ένα όριο μιας συνάρτησης $f$ στο $x_0$ **«δεν ορίζεται» ή «δεν έχει νόημα»** όταν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποια περιοχή «κοντά» στο $x_0$.

**Για παράδειγμα**, αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$ και το σημείο $x_0=0$ τότε παρατηρούμε ότι:




Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x^2-|x|\geq 0$.

Διακρίνω περιπτώσεις:

- Αν $x<0$ τότε η ανίσωση γράφεται

  $x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow x(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

  Άρα το διάστημα $(-\infty,-1]$ είναι λύση της ανίσωσης.

- Αν $x\geq 0$ τότε η ανίσωση γράφεται:

  $x^2-|x|\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

  Οπότε λύση της είναι το σύνολο $\{0\}\cup[1,+\infty)$.

Άρα σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το σύνολο $(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$.

Επομένως η συνάρτηση δεν ορίζεται κοντά στο 0, άρα δεν έχει νόημα η αναζήτηση του συγκεκριμένου ορίου. Όμως το $f(0)=0$, δηλαδή η $f$ ορίζεται στο $x_0=0$.

**<u>Διαφορετικά</u>** (για να θυμηθούμε πως λύνουμε τέτοιες ανισώσεις) το σύνολο ορισμού θα μπορούσαμε να το βρούμε ως εξής:

Η συνάρτηση $f$ ορίζεται όταν και μόνο όταν $x^2-|x|\geq 0 \Leftrightarrow |x|^2-|x|\geq 0$.

Θέτω $|x|=y, y\geq 0$ και η παραπάνω ανίσωση γράφεται:

$$y(y-1)\geq 0 \Leftrightarrow (y\leq 0 \text{ ή } y\geq 1) \Leftrightarrow (y=0 \text{ ή } y\geq 1) \Leftrightarrow (|x|=0 \text{ ή } |x|\geq 1) \Leftrightarrow$$
$$(x=0 \text{ ή } x\geq 1 \text{ ή } x\leq -1) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$$

**Όταν όμως λέμε ότι το όριο μιας συνάρτησης $f$ στο $x_0$ δεν υπάρχει, τότε εννοούμε ότι το όριο έχει «νόημα», αλλά τα πλευρικά του όρια δεν είναι ίσα.**

Για παράδειγμα ας δούμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & \text{όταν } x\leq 0 \\ x+1, & \text{όταν } x>0 \end{cases}$ και το όριό της όταν $x_0=0$ .

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως και σε μια περιοχή κοντά στο $0$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x)=0$.

Άρα τα πλευρικά όρια ενώ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι ίσα μεταξύ τους και επομένως το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

2. Συνήθως όταν θα μας ζητάνε να βρούμε ένα όριο, αυτό θα έχει νόημα, οπότε δεν θα χρειαστεί να ελέγξουμε αν αυτό ορίζεται. Αν όμως μας ζητηθεί να ελέγξουμε κάτι τέτοιο, δεν είναι απαραίτητο να βρούμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης που μας δίνεται, αλλά απλά να δείξουμε ότι υπάρχει περιοχή κοντά στο $x_0$ που να ορίζεται η συνάρτηση.

**Για παράδειγμα:** Να εξεταστεί αν έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^{2017}+x+1}$ και να βρεθεί.

Το να βρούμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x+2}{x^{2017}+x+1}$ (είναι το $\mathrm{A}=\{x\in\mathbb{R} / x^{2017}+x+1\neq 0\}$) είναι αρκετά δύσκολο, αλλά το να δείξουμε ότι ορίζεται σε μια περιοχή κοντά στο 0 είναι πολύ ευκολότερο.

Πράγματι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2017}+x+1\right)=1\neq 0$ οπότε από το $1^o$ θεώρημα της διάταξης, θα ισχύει ότι $x^{2017}+x+1\neq 0$ κοντά στο 0, και επομένως το όριο έχει νόημα.

Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^{2017}+x+1}=2$

## Ιδιότητες από Ορισμό

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$.

Αν ορίζεται το όριο της $f$ κοντά στο $x_0$ τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0^-} f(x_0+h)=\ell$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=-\ell$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

**Τι σημαίνει όμως «κοντά» στο $x_0$;**

Μια συνάρτηση $f$ λέμε ότι έχει μια ιδιότητα $P$ «κοντά» στο $x_0$, όταν:

- η συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα $P$
- η συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(a,x_0)$, αλλά δεν ορίζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(x_0,\beta)$, και στο διάστημα αυτό έχει την ιδιότητα $P$
- η συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(x_0,\beta)$ αλλά δεν ορίζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(a,x_0)$, και στο διάστημα αυτό έχει την ιδιότητα $P$

# Ιδιότητες των Ορίων

## 1ο Θεώρημα της Διάταξης:

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο $x_0$ και αντίστοιχα αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο $x_0$.

### Προσοχή:

**Το αντίστροφο δεν ισχύει!**

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε διάστημα της μορφής $(-a,0) \cup (0,a)$ ισχύει $f(x) = x^2 > 0$ αλλά $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

## 2ο Θεώρημα της Διάταξης:

Αν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ έχουν όριο στο $x_0$ και ισχύει $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

### Προσοχή:

Αν η συνθήκη, αλλάξει ελαφρώς και αντί για $f(x) \le g(x)$, είχαμε $f(x) < g(x)$, τότε το συμπέρασμα συνεχίζει να ισχύει σαν ανισοϊσότητα.

Αυτό **που δεν ισχύει όμως** είναι ότι αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x^2$ οι οποίες ορίζονται κοντά στο $x_0 = 0$ (δηλαδή σε μια περιοχή της μορφής $(-a,0) \cup (0,a)$).

Εύκολα παρατηρούμε ότι $f(x) = x^2 < 2x^2 = g(x)$ κοντά στο $0$, όμως $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x^2 = 0$.

Θα πρέπει ακόμα να τονίσουμε ότι, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε, $f(x) < g(x)$ κοντά στο $x_0$ γιατί:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) < 0 \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right) < 0 \Rightarrow f(x)-g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$ κοντά στο $x_0$.

## Θεώρημα Όρια και Πράξεις

Αν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ έχουν όριο στο $x_0$, αυτό είναι πραγματικός αριθμός και αυτές ορίζονται στην ίδια περιοχή του $x_0$, τότε υπάρχουν τα παρακάτω όρια και είναι:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lambda f(x)\right) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^{\nu}(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu}$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \left|f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο $x_0$.

### Προσοχή

1. Είναι ιδιαιτέρως σημαντικό οι συναρτήσεις να ορίζονται στην ίδια περιοχή του $x_0$, διαφορετικά δεν θα γνωρίζουμε με ασφάλεια αν θα έχει νόημα το όριο του αθροίσματος, ή οποιασδήποτε άλλης πράξης.

   Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2 + \sqrt{x(x+1)}$ και $g(x) = 3 + \sqrt{x(x-1)}$.

Ισχύει ότι: $D_f = (-\infty,-1] \cup [0,+\infty)$ και επομένως εφόσον η συνάρτηση δεν ορίζεται για κάποιο διάστημα αριστερά του 0 θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$.

Ακόμα, $D_g = (-\infty,0] \cup [1,+\infty)$ και επομένως εφόσον η συνάρτηση δεν ορίζεται για κάποιο διάστημα δεξιά του 0 θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 3$.

Οπότε αφού υπάρχουν τα όρια και είναι πραγματικοί αριθμοί θα περιμέναμε να ισχύσει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} g(x) = 2+3 = 5.$$

Αυτό όμως είναι **λάθος**, μιας και η συνάρτηση $f+g$ ορίζεται στο σύνολο

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g =$$
$$= \left((-\infty,-1] \cup [0,+\infty)\right) \cap \left((-\infty,0] \cup [1,+\infty)\right) =$$
$$= (-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$$

στο οποίο το 0, είναι μεμονωμένο σημείο και επομένως δεν έχει νόημα το όριο σε αυτό.

**Επομένως είναι ιδιαιτέρως σημαντικό, οι συναρτήσεις να ορίζονται στην ίδια περιοχή κοντά στο $x_0$ και όχι απλά να υπάρχουν τα όριά τους και να είναι πραγματικοί αριθμοί.**

**2.** Κατά την αναζήτηση ενός ορίου μιας συνάρτησης $f$ δεν είναι δυνατόν να εφαρμόζονται οι ιδιότητες των ορίων σταδιακά και σε τμήμα μόνο του τύπου της αρχικής συνάρτησης.

Για παράδειγμα, αν έχουμε να υπολογίσουμε το εξής όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3}$ τότε **είναι λάθος** να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ και έπειτα να το αντικαταστήσουμε στο όριο γράφοντας $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-3x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(3-x)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3(x-3)}{x-3} = -3$. Εξίσου **λάθος θα ήταν** να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 3} 3x = 9$ και αντικαθιστώντας να πάρουμε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6$.

Η σωστή αντιμετώπιση είναι η εξής: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x = 3$

**3.** Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή είναι δυνατόν να μην υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων $f$ και $g$ στο $x_0$, όμως το όριο κάποιας μεταξύ τους πράξης όπως $f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ να υπάρχει.

Για παράδειγμα ας πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x-1}$ με $x \neq 1$ και $g(x)=\frac{2}{1-x^2}$ με $x \neq \pm 1$, για τις οποίες δεν υπάρχει το όριο στο $x_0=1$ μιας και τα πλευρικά τους όρια δεν είναι ίσα.

Ωστόσο $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$ με $x \neq \pm 1$ και το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$.

**4.** Στην ιδιότητα (6) είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$, δεν σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$. Πράγματι: $\lim\limits_{x\to 1}|x^2|=|-1|$, όμως $\lim\limits_{x\to 1}x^2 \neq -1$.

Ακόμα $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{|x|}{x}\right|=1$ όμως το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει.

## Παρατηρήσεις:

Για τον υπολογισμό βασικών ορίων ισχύουν τα εξής:

**1.** $\lim\limits_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$

**2.** Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$, με $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

**3.** Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του $x$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

## Θεώρημα – Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις $f, g, h$. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο $x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ ,τότε υπάρχει το όριο της $f$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

### Παρατήρηση:

Το κριτήριο παρεμβολής χρησιμοποιείται συνήθως για θεωρητικές ασκήσεις, σε περιπτώσεις που δεν γνωρίζουμε τον τύπο της $f$ και σε δύσκολα τριγωνομετρικά όρια.

Άμεση εφαρμογή του, είναι η παρακάτω πρόταση, που είναι γνωστή και ως **κριτήριο μηδενικής επί φραγμένης.**

Έστω η συνάρτηση $f$ για την οποία το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και η συνάρτηση $g$ για την οποία υπάρχει αριθμός $\mathrm{M} > 0$ τέτοιος ώστε $|g(x)| \le \mathrm{M}$ για κάθε $x$ κοντά στο $x_0$.

Τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \left( f(x) \cdot g(x) \right) = 0$.

**Πράγματι:** $|f(x) g(x)| = |f(x)||g(x)| \le \mathrm{M}|f(x)|$ για κάθε $x$ κοντά στο $x_0$.

Επομένως: $-\mathrm{M}|f(x)| \le f(x) g(x) \le \mathrm{M}|f(x)|$ για κάθε $x$ κοντά στο $x_0$.

Όμως

$$\lim_{x \to x_0} \left( -\mathrm{M}|f(x)| \right) = -\mathrm{M} \lim_{x \to x_0} |f(x)| = -\mathrm{M} \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left( \mathrm{M}|f(x)| \right) = \mathrm{M} \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \mathrm{M} \cdot 0 = 0$$

άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to x_0} \left( f(x) \cdot g(x) \right) = 0$.

### Προσοχή

- Η συγκεκριμένη ιδιότητα, δηλαδή της μηδενικής επί φραγμένης δεν αναφέρεται στο βιβλίο, και επομένως θα πρέπει όποτε την χρησιμοποιούμε να την **αποδεικνύουμε**.
- Κάθε συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ ονομάζεται **μηδενική**.

- Κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in A_f$ ονομάζεται **φραγμένη**.

**Βασική Πρόταση:**

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται κοντά στο $x_0 \in A$ και για την οποία ισχύει $\lim_{x \to x_0} f^2(x) = 0$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

**Απόδειξη**

Για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \Leftrightarrow -\sqrt{f^2(x)} \le f(x) \le \sqrt{f^2(x)}$.

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0$.

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

**Προσοχή:** Η παραπάνω πρόταση πρέπει να αποδεικνύεται όποτε χρησιμοποιείται.

## Τριγωνομετρικά Όρια

Όταν αναφερόμαστε σε τριγωνομετρικά όρια, αναφερόμαστε σε όρια συναρτήσεων που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για αυτά τα όρια, ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\lim_{x \to x_0} \text{ημ}x = \text{ημ}x_0$
2. $\lim_{x \to x_0} \text{συν}x = \text{συν}x_0$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{ημ}x}{x} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$

**Προσοχή:** Σε αυτές τις σχέσεις τα $x$ τα μετράμε **σε ακτίνια (rad) και όχι σε μοίρες**.

Αν τα μετρούσαμε σε μοίρες θα είχαμε πολύ διαφορετικά αποτελέσματα.

Π.χ. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{ημ}\theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$ εφόσον $\frac{\theta}{180} = \frac{x}{\pi}$

## Βασική Ιδιότητα

$|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει όταν και μόνο όταν $x = 0$.

**Προσοχή:** Από την παραπάνω σχέση εύκολα παρατηρούμε τα παρακάτω:

- $\eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$
- $\eta\mu x = -x \Leftrightarrow x = 0$
- Για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι: $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$
- Για κάθε $x < 0$ ισχύει ότι: $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x$

Η παραπάνω σχέση είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη όταν χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής.

Η απόδειξή της είναι εκτός ύλης.

## Το Θεώρημα της Αντικατάστασης στα Όρια

Έστω οι συναρτήσεις $f$ και $g$ τέτοιες ώστε να ορίζεται η $f \circ g$ σε μια περιοχή κοντά στο $x_0$. Αν

- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$
- $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = \ell$
- $g(x) \ne u_0$ κοντά στο $x_0$

τότε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$ υπάρχει και ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = \ell$.

## Προσοχή:

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του σχολικού βιβλίου (και επομένως και σε οποιαδήποτε άσκηση που θα συναντήσουμε) τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $g(x) \ne u_0$ κοντά στο $x_0$ και για αυτό **δεν** θα ελέγχεται.

Ωστόσο θα ήταν χρήσιμο να δούμε ένα παράδειγμα που να φανερώνει την αξία της συγκεκριμένης συνθήκης.

Έστω οι συναρτήσεις $f$ και $g$ με $f(x)=g(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x\neq 0 \\ 1 & \text{αν } x=0 \end{cases}$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $u=g(x)$ τότε: $u_0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

**Όμως δεν μπορούμε να γράψουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to 0} f(u)=0$ γιατί δεν ισχύει η τελευταία συνθήκη του θεωρήματος της αντικατάστασης.**

Δηλαδή $g(x)=u_0=0$ κοντά στο 0.

Για να βρούμε το συγκεκριμένο όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ θα βρούμε πρώτα την συνάρτηση $f\circ g$ και έπειτα θα υπολογίσουμε το συγκεκριμένο όριο.

Έτσι $f(g(x))=\begin{cases} 1 & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$ (γιατί;) και επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=1$.

**Επαναλαμβάνουμε, ότι τέτοιες περιπτώσεις δεν θα συναντήσουμε, είναι όμως απαραίτητο για την κατανόηση της λειτουργίας ενός θεωρήματος, και για να μην παραλείπουμε συνθήκες όταν το διατυπώνουμε, να γνωρίζουμε τι συμβαίνει σε περίπτωση που παραλειφθούν και σε τι μπελάδες μπαίνουμε.**

## Προσοχή:

Δυο πολύ χρήσιμες αλλαγές μεταβλητής, που χρησιμοποιούνται ιδιαιτέρως σε θεωρητικές ασκήσεις είναι οι:

- Θέτω όπου $x-x_0=h$ και έχω: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$
- Θέτω όπου $\dfrac{x}{x_0}=h$ και έχω: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 1} f(x_0\cdot h)$

Θα τις συναντήσουμε και τις 2 αναλυτικά στην Μεθοδολογία.