

Μεθοδολογία στα Όρια

Συνήθως η πρώτη κίνηση που κάνουμε για να υπολογίσουμε ένα όριο, το οποίο έχει νόημα, της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι να αντικαταστήσουμε την τιμή x_0 στην θέση του x και να διαπιστώσουμε σε τι μορφή αναφερόμαστε.

Θεωρείται δεδομένο ότι **δεν θα μας απασχολεί αν έχει νόημα η αναζήτηση ενός ορίου, εφόσον όπως αναφέρεται και στις οδηγίες αυτό (το όριο) θα έχει πάντα νόημα** και είναι ευθύνη του εξεταστή όχι του εξεταζόμενου. Στην περίπτωση που θέλει κάποιος να εξετάσει αν έχει νόημα η αναζήτηση ενός ορίου τότε θα πρέπει να το ζητάει σαφώς στην εκφώνηση της άσκησης. Ο μαθητής σε καμία περίπτωση δεν είναι υποχρεωμένος να εξετάσει αν το όριο που του ζητήθηκε να υπολογίσει έχει νόημα είτε μέσω εύρεσης πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο.

Οι βασικότεροι τρόποι που έχουμε για να υπολογίσουμε ένα όριο είναι οι παρακάτω.

Μέθοδος 1: Ιδιότητες των Ορίων

Σε αυτές τις περιπτώσεις, απλά χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ορίων που αναφέρονται είτε στις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, είτε τα όρια των βασικών συναρτήσεων, όπως είναι οι πολωνυμικές, οι ρητές και άλλες.

Παράδειγμα 1: Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3$ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} (3f(x) + 2g(x)) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g^2(x)}$$

Λύση

Εφόσον τα όρια των συναρτήσεων f, g υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, υπάρχουν και τα ζητούμενα όρια και θα ισχύει:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\begin{aligned} \beta. \lim_{x \rightarrow 1} (3f(x) + 2g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} 3f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2g(x) = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \cdot 2 + 2(-3) = 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right)^2} = \frac{2}{(-3)^2} = \frac{2}{9}$$

Μέθοδος 2: Συναρτήσεις Πολλαπλού Τύπου

Σε περιπτώσεις που ο τύπος της f αλλάζει εκατέρωθεν του x_0 , τότε εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί εφόσον υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όταν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{αν } x > 1 \\ -x + 2, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ στο

$$x_0 = 1.$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο $x_0 = 1$, θα χρησιμοποιήσω πλευρικά όρια.

Έτσι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 2) = -1 + 2 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ και επομένως το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Παρατήρηση: Αξιίζει να σχολιάσουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι αναγκαίο να ορίζεται στο x_0 , αλλά σε μια περιοχή του.

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί εφόσον υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όταν $f(x) = \begin{cases} \ln x & , \text{αν } x \geq e \\ \sqrt{x^2 + 1}, & \text{αν } x < e \end{cases}$

στο $x_0 = e$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο $x_0 = e$, θα χρησιμοποιήσω πλευρικά όρια.

Έτσι:

- $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{e^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \ln x = \ln e = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ και επομένως το όριο $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ δεν υπάρχει.

Μέθοδος 3: Απροσδιόριστη μορφή

Απροσδιόριστη μορφή, ονομάζουμε την περίπτωση του ορίου το οποίο έχει νόημα και για τον υπολογισμό του δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάποιος γνωστός κανόνας των ορίων. Το όριο αυτό μπορεί να υπάρχει, ή και να μην υπάρχει.

Αυτές οι περιπτώσεις θα μελετηθούν παρακάτω.

A. Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ σε ρητή συνάρτηση

Αν κατά τον υπολογισμό ενός ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ καταλήξουμε σε μια απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$, τότε προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρανομαστή της συνάρτησης και να δημιουργήσουμε στους παράγοντες τον όρο $x - x_0$ τον οποίο και απλοποιούμε.

Προφανώς εφόσον το x_0 αποτελεί λύση τόσο του αριθμητή όσο και του παρανομαστή, το σχήμα Horner θα μπορεί πάντα να βοηθήσει στην παραγοντοποίηση, ειδικότερα πολυωνύμων βαθμού μεγαλύτερου από 2.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x) = 0$.

Επομένως το ζητούμενο όριο όμως οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Εύκολα παρατηρούμε όμως ότι $x \rightarrow 3$, άρα $x \neq 3$ και επομένως το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2.$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι για $x = -2$ μηδενίζονται οι παρανομαστές των κλασμάτων και δεν είναι επομένως δυνατή η εφαρμογή κάποιας ιδιότητας των ορίων.

Έτσι κάνουμε τα κλάσματα που βρίσκονται μέσα στο όριο ομώνυμα, ώστε να προκύψει μια ρητή συνάρτηση. Οπότε για $x \neq -2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} + \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2+4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

B. Μορφή $\left(\frac{0}{0} \right)$ σε άρρητη συνάρτηση

Όταν το όριο μιας άρρητης συνάρτησης που περιέχει κλάσμα καταλήγει στην μορφή $\left(\frac{0}{0} \right)$, τότε πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος (αριθμητή και παρανομαστή) με την συζυγή παράσταση του άρρητου όρου, ή των άρρητων όρων αν εμφανίζεται άρρητος όρος και στους 2 όρους του κλάσματος. Ακολουθεί η παραγοντοποίηση, η απλοποίηση και ο υπολογισμός του ορίου.

Οι πιο συνηθισμένες συζυγείς παραστάσεις είναι:

- $a - \beta$ συζυγής με $a + \beta$ η οποία χρησιμοποιείται για τετραγωνικές ρίζες (θυμίζουμε $(a - \beta)(a + \beta) = a^2 - \beta^2$)
- $a - \beta$ συζυγής με $a^2 + a\beta + \beta^2$ η οποία χρησιμοποιείται για κυβικές ρίζες (θυμίζουμε $(a - \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2) = a^3 - \beta^3$)
- $a + \beta$ συζυγής με $a^2 - a\beta + \beta^2$ η οποία χρησιμοποιείται για κυβικές ρίζες (θυμίζουμε $(a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2) = a^3 + \beta^3$)

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$.

Λύση

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{\sqrt{x^2+3}^2 - 4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{x + 1} = \frac{\sqrt{1^2 + 3} + 2}{1 + 1} = 2$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}^3 - 1}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 2} - 3x - 2}{x^2 - 1}$.

Λύση

Παρατηρούμε εύκολα ότι το παραπάνω όριο είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ και περιέχει 2 ριζικά. Η διαδικασία να βρούμε την κατάλληλη συζυγή παράσταση είναι εξαιρετικά δύσκολη, οπότε θα εργαστούμε λίγο διαφορετικά.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + x + 2} = 2$, οπότε θα σπάσουμε τον αριθμητή κατάλληλα ώστε να προκύψουν πιο απλές μορφές.

Έτσι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 2} - 3x - 2}{x^2 - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} - 3x + \sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} - 3x}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 5} - 3x)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)} + \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5}^2 - (3x)^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)} + \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}^2 - 2^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 3x + 5 - 9x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)} + \frac{x^2 + x + 2 - 4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-8x^2 + 3x + 5}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)} + \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\cancel{(x-1)}(-8x-5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)} + \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-8x-5}{(x+1)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x)} + \frac{x+2}{(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \right) = -\frac{13}{12} + \frac{3}{8} = \frac{-26+9}{24} = -\frac{17}{24}
 \end{aligned}$$

Γ. Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και απόλυτα

Όταν το όριο το οποίο υπολογίζουμε περιέχει μια ή περισσότερες παραστάσεις μέσα σε απόλυτες τιμές και καταλήγει στην μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ τότε χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της διάταξης των ορίων και «διώχνουμε» τα απόλυτα.

Δηλαδή αν περιέχεται μια παράσταση της μορφής $|f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και αντίστοιχα αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Στην περίπτωση που $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την $f(x)$ και εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο (αν υπάρχει):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - x^2 + x + 2| + |x^3 + x - 7| - 8}{x - 1}$$

Λύση

Με μια γρήγορη αντικατάσταση παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + x + 2) = 3 > 0$. Άρα $x^3 - x^2 + x + 2 > 0$ κοντά στο 1 και επομένως .

$$|x^3 - x^2 + x + 2| = x^3 - x^2 + x + 2$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x - 7) = -5 < 0$. Άρα $x^3 + x - 7 < 0$ κοντά στο 1 και επομένως .

$$|x^3 + x - 7| = -(x^3 + x - 7)$$

Έτσι η παράσταση που βρίσκεται μέσα στο όριο κοντά στο 1 γράφεται:

$$\begin{aligned} & \frac{|x^3 - x^2 + x + 2| + |x^3 + x - 7| - 8}{x - 1} = \\ & = \frac{(x^3 - x^2 + x + 2) - (x^3 + x - 7) - 8}{x - 1} = \frac{\cancel{x^3} - x^2 + \cancel{x} + 2 - \cancel{x^3} - \cancel{x} + 7 - 8}{x - 1} = \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - x^2 + x + 2| + |x^3 + x - 7| - 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + x) = 2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο (αν υπάρχει):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + |x^2 - 4|}{x^2 - 4}$$

Λύση

Με μια γρήγορη αντικατάσταση παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$

Οπότε θα κατασκευάσω πίνακα προσήμων για τις 2 παραστάσεις και θα χρησιμοποιήσω πλευρικά όρια.

Για να συμπληρώσω σωστά τον πίνακα θα πρέπει να λύσω τις ανισώσεις:

- $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
(αντίστοιχα $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$) και
- $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ή } x < -2$
(αντίστοιχα $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$)

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2| + |x^2-4|}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2) - (x^2-4)}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2-x^2+4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2-x+6}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(-x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x-3) = -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| + |x^2-4|}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) + (x^2-4)}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2+x^2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) = 5\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ και επομένως το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

Μέθοδος 4: Όρια και Βοηθητική Συνάρτηση (η συνάρτηση που κρύβεται)

Όταν δίνεται ότι το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ υπάρχει και είναι κάποιος πραγματικός αριθμός και ζητείται να βρεθεί το όριο της $f(x)$, συνήθως θέτουμε την παράσταση με μια νέα συνάρτηση, λύνουμε ως προς $f(x)$ και έπειτα υπολογίζουμε το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα: Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 2x + 4) = 8$, να

βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Λύση

Θέτουμε $g(x) = f(x) - 2x + 4$ με $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8$.

Ισχύει ότι:

$$g(x) = f(x) - 2x + 4 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 2x - 4$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 8 + 0 = 8.$$

Προσοχή: Θα ήταν λάθος να γράψουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 2x + 4) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} (-2x + 4) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 0 = 8 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

γιατί δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και επομένως το «σπάσιμο» δεν είναι δυνατό.

Μέθοδος 5: Όρια και Κριτήριο Παρεμβολής

Σε περιπτώσεις που έχουμε ανισοτικές σχέσεις συναρτήσεων, ή γενικότερα περιπτώσεις που δεν ανάγονται στα προηγούμενα, προσπαθούμε να εγκλωβίσουμε την συνάρτηση f , της οποίας το όριο σε κάποιο σημείο x_0 αναζητάμε, ανάμεσα σε δυο άλλες συναρτήσεις οι οποίες όμως στο x_0 έχουν το ίδιο όριο.

Παράδειγμα 1: Αν $|f(x) - 3x + 5| \leq x^2$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί

α. το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β. το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 5}{x}$.

Λύση

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} |f(x) - 3x + 5| \leq x^2 &\Leftrightarrow -x^2 \leq f(x) - 3x + 5 \leq x^2 \Leftrightarrow \\ -x^2 + 3x - 5 &\leq f(x) \leq x^2 + 3x - 5 \quad (2) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + 3x - 5) = -5 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 5) = -5$$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -5$

β. Από τη σχέση (2) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x - 5 &\leq f(x) \leq x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow \\ -x^2 + 3x - 5 + 5 &\leq f(x) + 5 \leq x^2 + 3x - 5 + 5 \Leftrightarrow \\ -x^2 + 3x &\leq f(x) + 5 \leq x^2 + 3x \quad (3) \end{aligned}$$

Για κάθε $x > 0$ η (3) γράφεται:

$$-x^2 + 3x \leq f(x) + 5 \leq x^2 + 3x \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x}{x} \leq \frac{f(x) + 5}{x} \leq \frac{x^2 + 3x}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(-x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) = 3$$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)+5}{x} = 3$

Αντίστοιχα

Για κάθε $x < 0$ η (3) γράφεται:

$$-x^2 + 3x \leq f(x) + 5 \leq x^2 + 3x \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x}{x} \geq \frac{f(x) + 5}{x} \geq \frac{x^2 + 3x}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(-x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 3) = 3$$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)+5}{x} = 3$

Επομένως εφόσον τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+5}{x} = 3$

Παράδειγμα 2: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow f(x)(f^4(x) + f^2(x) + 1) = x \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x}{f^4(x) + f^2(x) + 1}$$

$$\text{Έτσι έχουμε: } |f(x)| = \left| \frac{x}{f^4(x) + f^2(x) + 1} \right| = \frac{|x|}{|f^4(x) + f^2(x) + 1|} \leq |x|$$

$$\text{Άρα } |f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Προσοχή: Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι

$$f^4(x) + f^2(x) + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{f^4(x) + f^2(x) + 1} \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{f^4(x) + f^2(x) + 1} \right| \leq 1$$

Μέθοδος 6: Όρια με Αντικατάσταση

Για να υπολογίσουμε όριο σύνθετης συνάρτησης χρησιμοποιούμε το θεώρημα της αντικατάστασης. Θυμίζουμε ότι αυτό αναφέρει:

Έστω οι συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε να ορίζεται η $f \circ g$ σε μια περιοχή κοντά στο x_0 . Αν

- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$
- $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$
- $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0

τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ υπάρχει και ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$.

Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται:

στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών ορίων (θα μελετηθεί αναλυτικά παρακάτω)

σε όρια αρρήτων συναρτήσεων με τις ίδιες υπόρριζες ποσότητες, αλλά διαφορετικές τάξεις ριζών. Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε μια νέα μεταβλητή, την σταθερή υπόρριζη ποσότητα, με τάξη ίση με το Ε.Κ.Π των ριζών.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \ell$$

Παρατηρούμε ότι το όριο εμφανίζονται όλες οι ρίζες να έχουν την ίδια υπόρριζη ποσότητα και τάξεις 2, 3 και 4. Έχουμε $\text{Ε.Κ.Π}(2,3,4)=12$ οπότε θέτουμε $u = \sqrt[12]{x}$ με $x = u^{12}$ και

$$u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[12]{x} = 0$$

Έτσι:

$$\ell = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{12} - \sqrt[3]{u^{12}} + \sqrt[4]{u^{12}}}{u^{12} + \sqrt{u^{12}} + \sqrt[4]{u^{12}}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{12} - u^4 + u^3}{u^{12} + u^6 + u^3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cancel{u^3}(u^9 - u + 1)}{\cancel{u^3}(u^9 + u^3 + 1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^9 - u + 1}{u^9 + u^3 + 1} = 1$$

Μέθοδος 7: Τριγωνομετρικά Όρια

Στα τριγωνομετρικά όρια, όπως και στα προηγούμενα, ξεκινάμε με μια απλή αντικατάσταση για να δούμε την μορφή του ορίου. Αν δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε άμεσα, τότε δοκιμάζουμε τα παρακάτω:

Α. Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu x}{x^2 + x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}$

Λύση

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x (\eta\mu x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu x + 1}{x+1} \right) = 1 \cdot 1 = 1$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}} = \ell$

Παρατηρώ ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)}{x(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4}^2 - 4}{x(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 4 - 4}{x(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως εφόσον τα επιμέρους όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, και το

αρχικό όριο θα υπάρχει και $\ell = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0$

Β. Κριτήριο Παρεμβολής (Μηδενική x Φραγμένη)

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

Λύση

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει: } \left| x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x^2| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2|$$

$$\text{Άρα: } \left| x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \Rightarrow -|x^2| \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x^2|$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} |x^2| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x^2|) = 0.$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

Γ. Με αντικατάσταση:

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x}$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = \ell$$

$$\text{Θέτω: } ax = u \text{ με } x = \frac{u}{a} \text{ και } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (ax) = 0$$

$$\text{Έτσι } \ell = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{\frac{u}{a}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a\eta\mu u}{u} = a \cdot 1 = a$$

Προσοχή: Αποδεικνύεται με τον ακριβώς ίδιο τρόπο ότι αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x) - 1}{f(x)} = 0$$

Μέθοδος 8: Προσδιορισμός Παραμέτρων

Σε αυτές τις περιπτώσεις θα μας δίνουν μια συνάρτηση που θα περιέχει και άλλες μεταβλητές (εκτός του x) και να μας ζητάνε να βρούμε τις μεταβλητές αυτές προκειμένου το όριο να υπάρχει, ή να υπάρχει και να είναι ένας συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα 1: Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, να

υπολογίσετε τον αριθμό $a \in \mathbb{R}$ και έπειτα να βρείτε την τιμή του ορίου.

Λύση

Εφόσον το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, μπορώ να θεωρήσω

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1} = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell.$$

$$\text{Ισχύει ότι } f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x + a = f(x)(x^2 - 1)$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + a) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 1)] \Rightarrow 1 - 3 + a = \ell \cdot 0 \Rightarrow a = 2$$

Για $a = 2$ το δοσμένο όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Προσοχή: Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε και να δοθεί με 2 παραλλαγές της.

Παραλλαγή 1^η: Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1} = 0$ να υπολογίσετε τον αριθμό $a \in \mathbb{R}$.

Παραλλαγή 2^η: Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1} = 1$ να υπολογίσετε τον αριθμό $a \in \mathbb{R}$.

Η όλη διαδικασία και στις 2 παραπάνω ασκήσεις είναι κοινή. Ας την δούμε.

Λύση της 1:

$$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

Ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x + a = f(x)(x^2 - 1) \quad (*)$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + a) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 1)] \Rightarrow 1 - 3 + a = 0 \cdot 0 \Rightarrow a = 2.$$

Η άσκηση δεν έχει ολοκληρωθεί και απαιτείται επαλήθευση.

Για $a = 2$ το δοσμένο όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x+1} = \frac{0}{2} = 0, \text{ οπότε πράγματι } a = 2.$$

Λύση της 2:

$$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x + a = f(x)(x^2 - 1) \quad (*)$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + a) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 1)] \Rightarrow 1 - 3 + a = 0 \cdot 0 \Rightarrow a = 2.$$

Για $a = 2$ το δοσμένο όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x+1} = \frac{0}{2} = 0 \neq 1.$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοιος $a \in \mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω φαίνεται η αξία της επαλήθευσης όταν στον εντοπισμό κάποιου αγνώστου δεν λειτουργούμε αποκλειστικά και μόνο με ισοδυναμίες. Εδώ η ισοδυναμία «σπάνε» όταν στην $(*)$ παίρνουμε όρια στα 2 μέλη οπότε ισχύει μόνο η απλή συνεπαγωγή.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a^3 x^2 - \beta x - 5 & , \text{αν } x > 1 \\ \beta x - 1 & , \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$. Να υπολογιστούν

$$\text{οι } a, \beta \in \mathbb{R} \text{ αν } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Λύση

Για να υπάρχει το όριο της συνάρτησης και να είναι 1, αρκεί και πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα μεταξύ τους και να είναι 1.

Έτσι πρέπει και αρκεί: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a^3 x^2 - \beta x - 5) = a^3 - \beta - 5$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\beta x - 1) = \beta - 1$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - \beta - 5 = 1 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - \beta = 6 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 2 = 6 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 8 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Παράδειγμα 3: Να βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + \beta}{x^2 - 1} = 4$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + \beta}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

Ισχύει: $f(x) = \frac{ax^2 + \beta}{x^2 - 1} \Leftrightarrow ax^2 + \beta = f(x)(x^2 - 1)$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + \beta) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 1)] \Leftrightarrow a + \beta = 0 \Leftrightarrow a = -\beta$.

Ισχύει επομένως: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + \beta}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\beta x^2 + \beta}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\beta(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = -\beta$

Άρα $-\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = -4$ και $a = 4$.

Πράγματι για $a = 4$ και $\beta = -4$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 4$

(Η επαλήθευση είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση της άσκησης μιας και δεν έχουμε δουλέψει με ισοδυναμίες)

Μέθοδος 9: Θεωρητικές Ασκήσεις – Ασκήσεις με Συναρτησιακές σχέσεις

Σε ασκήσεις με συναρτησιακές σχέσεις συνήθως [προσπαθούμε να κάνουμε μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής στο όριο ώστε να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε την δοσμένη σχέση.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (*) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Λύση

$$\text{Ισχύει: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\text{Θέτω } x - x_0 = u, \text{ με } x = u + x_0 \text{ και } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0.$$

Άρα

$$\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u + x_0) \stackrel{(*)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} [f(u) + f(x_0)] = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) + f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

.

Σχόλιο: Το παραπάνω όριο μπορεί να σπάσει μιας και τα επιμέρους υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.