

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A .

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 , και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα, αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $f(x) > \varepsilon$.

αντίστοιχα:

Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 , και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα, αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $f(x) < -\varepsilon$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν για $x \rightarrow x_0^+$ και $x \rightarrow x_0^-$.

Οι παραπάνω ορισμοί διατυπώνονται μόνο για λόγους πληρότητας και κατανόησης και σε καμία περίπτωση δεν απαιτείται από τον μαθητή να τους γνωρίζει, καθώς όλοι οι (ε-δ) ορισμοί είναι εκτός ύλης.

Γραφική Προσέγγιση – Διαισθητική Προσέγγιση των Ορίων

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f **αυξάνονται απεριόριστα** και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f **ελαττώνονται απεριόριστα** και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό M , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

Βασικές Ιδιότητες

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

2. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty.$$

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$,

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

7. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Παρατηρήσεις

1. Οι ιδιότητες (1) και (2) αναφέρονται στην διάταξη.
2. Η ιδιότητα (2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη αν και δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο. Η απόδειξή της είναι εύκολη και σύντομη.

Ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Επομένως για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύει ότι $0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Τελικά επειδή $g(x) > 0$ κοντά στο x_0 θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

Ομοίως για την δεύτερη περίπτωση.

3. Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$

ενώ

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1^ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	A.M	A.M

Θεώρημα 2^ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι:	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	A.M	A.M	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Προσοχή: Στα κουτάκια που έχουμε τοποθετήσει **A.M** σημαίνει ότι οδηγούμαστε σε Απροσδιόριστες Μορφές, δηλαδή σε όρια των οποίων την τιμή ή την ύπαρξη έστω, δεν μπορούμε να προβλέψουμε.

Έτσι ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ και $h(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$.

Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

Έτσι: $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \stackrel{+\infty + (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0$

$$\text{Όμως: } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + h(x)) \stackrel{+\infty + (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + 1 \right) = 1$$

Άρα η μορφή $+\infty + (-\infty)$ οδήγησε σε 2 διαφορετικά αποτελέσματα.

Ακόμα αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty. \text{ Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) \stackrel{0(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \frac{1}{x^2} \right) = 1.$$

Όμως αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty. \text{ Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) \stackrel{0(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Άρα η μορφή $0(+\infty)$ οδήγησε σε 2 διαφορετικά αποτελέσματα.

Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι οι μορφές που χαρακτηρίζονται ως Α.Μ δεν ορίζονται μονοσήμαντα και επομένως μελετώνται κατά περίπτωση.

Παρατηρήσεις

- Οι απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:
 $(+\infty) + (-\infty)$ και $0 \cdot (\pm\infty)$.
- Ασφαλώς όταν γράφουμε $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$,
 $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{-\infty} = 0$ αποτελούν συντομογραφίες συμβολισμών οι οποίοι μας βοηθούν στο λογισμό των ορίων, σε καμία περίπτωση όμως δεν αναφέρονται ως πράξεις.
- Ο πρώτος που χρησιμοποίησε το σύμβολο για το άπειρο ήταν ο John Wallis το 1655 στο βιβλίο του «Arithmetica Infinitorum». Προέρχεται από το αντίστοιχο λατινικό σύμβολο το οποίο παρίστανε τον αριθμό 1.000. το ∞ .

Τριγωνομετρικά Όρια

Χρήσιμο είναι να αποδείξουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty \quad \beta. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma\varphi x = -\infty \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\varphi x = +\infty$$

Απόδειξη

α. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ οπότε ορίζεται και στο

$A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = \ell.$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = 1$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ με $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty. \text{ Άρα } \ell = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

β. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ οπότε ορίζεται και στο

$A = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και επομένως το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = \ell.$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \eta\mu x = 1$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sigma\upsilon\nu x = 0$ με $\sigma\upsilon\nu x < 0$ για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty. \text{ Άρα } \ell = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ οπότε ορίζεται και στο

$A = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και επομένως το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma\varphi x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sigma\upsilon\nu x \frac{1}{\eta\mu x} \right) = \ell.$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma\nu x = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta\mu x = 0$ με $\eta\mu x < 0$ για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\eta\mu x} = -\infty. \text{ Άρα } \ell = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z}\}$ οπότε ορίζεται και στο

$A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\varphi x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\nu x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sigma\nu x \frac{1}{\eta\mu x} \right) = \ell.$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\nu x = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$ με $\eta\mu x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty. \text{ Άρα } \ell = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$