

Μεθοδολογία στο μη Πεπερασμένο Όριο στο x_0 **Μέθοδος 1: Μορφή $\frac{a}{0}$ με $a \neq 0$**

Για να υπολογίσουμε ένα όριο $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ που καταλήγει στην μορφή $\frac{a}{0}$ με $a \neq 0$

εργαζόμαστε ως εξής:

Παραγοντοποιούμε τον παραινομαστή (αν παραγοντοποιείται) και γράφουμε ξεχωριστά σε ένα κλάσμα τον παράγοντα που τον μηδενίζει. Έτσι το όριο παίρνει την μορφή

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{1}{g_2(x)} \right)$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = 0.$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την $g_2(x)$.

Αν η $g_2(x)$ διατηρεί πρόσημο αριστερά και δεξιά του x_0 τότε $A = +\infty$ ή $A = -\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του β .

Αν η συνάρτηση $g_2(x)$ αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του x_0 τότε εργαζόμαστε με πλευρικά όρια και διαπιστώνουμε ότι το δοσμένο όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{|x-1|}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x^2+2x+1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^3-3x^2+3x-1}$$

Λύση

$$\alpha. \text{ Ισχύει ότι: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(2x-3) \frac{1}{|x-1|} \right] = \ell$$

$$\text{Παρατηρώ ότι: } \lim_{x \rightarrow 1} (2x-3) = -1 < 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0 \text{ με } |x-1| > 0 \text{ κοντά στο } 1,$$

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty.$$

$$\text{Άρα } \ell = -1 \cdot (+\infty) = -\infty$$

β. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+3) \frac{1}{(x+1)^2} \right] = \ell$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0$ με $(x+1)^2 > 0$ κοντά στο -1 ,

επομένως $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$.

Άρα $\ell = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$

γ. Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^3-3x^2+3x-1} \stackrel{\%}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^2+x+1) \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \ell$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ με $(x-1)^2 > 0$ κοντά στο

1 , επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Άρα $\ell = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{x^2-4x+3}$.

Λύση

Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x-3} \cdot \frac{1}{x-1} \right)$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{x-3} = -\frac{1}{2} < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, όμως το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό

το πρόσημο κοντά στο 1 .

Έχω για $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$,

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2-x}{x-3} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{1}{2} (+\infty) = (-\infty)$

Ομοίως για $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$,

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2-x}{x-3} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{1}{2} (-\infty) = (+\infty)$

Άρα εφόσον τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{x^2-4x+3}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-7}{x-3\sqrt{x}+2}$.

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-7}{x-3\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-7}{\sqrt{x}^2-3\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x-7}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-7}{\sqrt{x}-1} = 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}-2) = 0$.

Έχω για $x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow \sqrt{x}-2 > 0$,

Άρα $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}-2} = +\infty$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{2x-7}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) = 1(+\infty) = +\infty$

Ομοίως για $3 < x < 4 \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0$,

Άρα $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x}-2} = -\infty$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{2x-7}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) = 1(-\infty) = -\infty$

Άρα εφόσον τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-7}{x-3\sqrt{x}+2}$ δεν υπάρχει.

Μέθοδος 2: Βοηθητική Συνάρτηση

Όταν δίνεται ότι το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ υπάρχει και είναι είτε κάποιος πραγματικός αριθμός είτε κάποιο άπειρο και ζητείται να βρεθεί το όριο της $f(x)$, λειτουργούμε όπως και στο πεπερασμένο όριο στο x_0 στην προηγούμενη ενότητα. Δηλαδή θέτουμε την παράσταση με μια νέα συνάρτηση, λύνουμε ως προς $f(x)$ και έπειτα υπολογίζουμε το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα 1: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)^2 f(x)] = 13$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Λύση

Θέτουμε $g(x) = (x-1)^2 f(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 13$.

Έχουμε για $x \neq 1$ ότι $g(x) = (x-1)^2 f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[g(x) \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \ell$.

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 13 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ με $(x-1)^2 > 0$ κοντά στο 1,

επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Άρα $\ell = 13 \cdot (+\infty) = +\infty$

Παράδειγμα 2: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{f(x)} = +\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Λύση

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)}$ κοντά στο 1, με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

Έχουμε ότι:

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)} \Leftrightarrow g(x)f(x) = f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)f(x) - f(x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$f(x)(1-g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1-g(x)}$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-g(x)} = \ell.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 1} (1-g(x)) = 1-(+\infty) = -\infty.$$

$$\text{Άρα } \ell = 0$$

Διαφορετικά:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{f(x)} = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)-1}{f(x)} - 1 \right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{f(x)} - 1 - \cancel{f(x)}}{f(x)} = +\infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{f(x)} = +\infty \Leftrightarrow -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Μέθοδος 3: Όρια και Απόλυτες Τιμές

Όταν το όριο το οποίο υπολογίζουμε περιέχει μια ή περισσότερες παραστάσεις μέσα σε απόλυτες τιμές και καταλήγει στην μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ τότε χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της διάταξης των ορίων και «διώχνουμε» τα απόλυτα.

Δηλαδή αν περιέχεται μια παράσταση της μορφής $|f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και αντίστοιχα αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Δηλαδή ο τρόπος εργασίας μας είναι όμοιος με το πεπερασμένο όριο.

Παράδειγμα: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. Να

υπολογίσετε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|3 - xf(x)| - |f(x) - 3|}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - xf(x)) = -\infty$, άρα κοντά στο 1 ισχύει ότι $3 - xf(x) < 0$ και επομένως $|3 - xf(x)| = -3 + xf(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 3) = +\infty$, άρα κοντά στο 1 ισχύει ότι $f(x) - 3 > 0$ και επομένως $|f(x) - 3| = f(x) - 3$.

Έτσι το όριο γράφεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\cancel{3} + xf(x) - f(x) \cancel{3}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{xf(x) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{f(x)\cancel{(x-1)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x+1) \frac{1}{f(x)} \right] = \ell \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\text{Άρα } \ell = 2 \cdot 0 = 0$$

Μέθοδος 4: Μη πεπερασμένο Όριο και Διάταξη

Σε περιπτώσεις που έχουμε ανισοτικές σχέσεις συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τις παρακάτω βασικές ιδιότητες της διάταξης.

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Παράδειγμα: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $(x^2 - 6x + 9)f(x) \leq x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^2 - 6x + 9)f(x) \leq x - 6$.

Για $x \neq 3$ ισχύει ότι:

$$(x^2 - 6x + 9)f(x) \leq x - 6 \Leftrightarrow (x - 3)^2 f(x) \leq x - 6 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x - 6}{(x - 3)^2}$$

$$\text{Έχουμε ότι: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 6}{(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x - 6) \frac{1}{(x - 3)^2} \right] = \ell.$$

Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 6) = -3 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^2 = 0$ με $(x - 3)^2 > 0$ κοντά στο 3,

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2} = +\infty.$$

$$\text{Άρα } \ell = -3 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Άρα από την παραπάνω βασική ιδιότητα έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

Μέθοδος 5: Προσδιορισμός Παραμέτρων ή Διερεύνηση

Σε αυτές τις ασκήσεις θα μας δίνουν μια συνάρτηση που θα περιέχει και άλλες μεταβλητές (εκτός του x) και να μας ζητάνε να βρούμε τις μεταβλητές αυτές προκειμένου το όριο να υπάρχει, ή να υπάρχει και να είναι ένας συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός ή άπειρο. Σε αυτήν την περίπτωση εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη με το πεπερασμένο όριο θέτοντας μια νέα συνάρτηση την παράσταση που βρίσκεται μέσα στο όριο και ακολουθώντας την σχετική διαδικασία..

Ακόμα μπορεί να ζητείται για τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου, να υπολογίσουμε την τιμή του ορίου. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε κάποιο όριο της μορφής

$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, \lambda)}{g(x)}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, \lambda) = h(\lambda)$, δηλαδή μια παράσταση του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Το όριο αυτό θα το γράφουμε: $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, \lambda)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x, \lambda) \frac{1}{g(x)} \right]$ και θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) αν $h(\lambda) > 0$, (β) αν $h(\lambda) < 0$ και (γ) αν $h(\lambda) = 0$.

Στις περιπτώσεις (α) και (β) η ύπαρξη ή μη του ορίου καθώς και η τιμή του θα εξαρτηθεί από την ύπαρξη ή μη του $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)}$ καθώς και την τιμή του. Στην περίπτωση (γ) θα έχουμε μια κλασσική απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ που έχουμε μελετήσει στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 1: Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2}{(x-1)^2}$.

Ποια η τιμή του ορίου για $\lambda = \sqrt{\pi} + 2$;

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2}{(x-1)^2}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ με $(x-1)^2 > 0$ κοντά στο 1, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Ακόμα το όριο της $f(x)$ καθώς το $x \rightarrow 1$ οδηγεί στην μορφή $\frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{0} = \frac{h(\lambda)}{0}$.

Αυτό σημαίνει ότι το $h(\lambda)$ θα καθορίσει την τιμή και τον τρόπο υπολογισμού του ορίου.

Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -1$ τότε:

- ο για $\lambda = 2$ το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(4x+2) \frac{1}{x-1} \right] = \ell$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

- ο για $\lambda = -1$ το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x+2) \frac{1}{x-1} \right] = \ell$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

- Αν $\lambda^2 - \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow (\lambda > 2 \text{ ή } \lambda < -1) \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2) \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \ell$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2 > 0$ θα ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

- Αν $\lambda^2 - \lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow (-1 < \lambda < 2) \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 2)$ τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2) \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \ell$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2 < 0$ θα ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} -\infty & , \text{αν } \lambda \in (-1, 2) \\ +\infty & , \text{αν } \lambda \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ \text{δεν υπάρχει} & , \text{αν } \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2 \end{cases}$$

Από την παραπάνω διερεύνηση μπορούμε να δούμε εύκολα ότι εφόσον $\lambda = \sqrt{\pi} + 2 > 2$ η τιμή του ορίου θα είναι $+\infty$.

Παράδειγμα 2: Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^2 + \mu x - \mu + 3} = +\infty$ να βρείτε την τιμή της μεταβλητής $\mu \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = \frac{x-5}{x^2 + \mu x - \mu + 3}$ για την οποία $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ και επομένως $f(x) > 0$ κοντά στο 3.

Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = 0$

$$\text{Έτσι κοντά στο } 3 \text{ ισχύει: } f(x) = \frac{x-5}{x^2 + \mu x - \mu + 3} \Leftrightarrow x^2 + \mu x - \mu + 3 = \frac{x-5}{f(x)} \quad (*).$$

Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + \mu x - \mu + 3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{f(x)} \Rightarrow \\ 9 + 3\mu - \mu + 3 &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-5) \frac{1}{f(x)} \right] \Rightarrow \\ 12 + 2\mu &= 0 \Rightarrow \mu = -6 \end{aligned}$$

Εφόσον έχουμε εργαστεί με συνεπαγωγές και όχι ισοδυναμίες (γιατί;), απαιτείται επαλήθευση της τιμής που βρήκαμε.

Έτσι για $\mu = -6$ το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^2-6x+6+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^2-6x+9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-5) \frac{1}{(x-3)^2} \right] = \ell$$

Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 3} (x-5) = -2 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0$ με $(x-3)^2 > 0$ κοντά στο 3,

επομένως $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$. Άρα $\ell = -2 \cdot (+\infty) = -\infty$.

Άτοπο, εφόσον θα έπρεπε το όριο να βγάλει $+\infty$. Άρα δεν υπάρχει τέτοιος $\mu \in \mathbb{R}$.

Προσοχή: Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, το σπάσιμο των ισοδυναμιών στην διαδικασία εύρεσης του αγνώστου, μας υποχρεώνει να κάνουμε επαλήθευση, η οποία είναι απολύτως αναγκαία, μιας και όπως είδαμε η τιμή που βρήκαμε απορρίφθηκε.

Οι ισοδυναμίες γίνανε συνεπαγωγές, όταν περάσαμε όρια στα δυο μέλη της ισότητας (*).

Μέθοδος 6: Το τέχνασμα του κοινού παράγοντα

Για να υπολογίσουμε τα επόμενα όρια στα οποία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, βγάζουμε από κάθε όρο το κλάσματος, κοινό παράγοντα την μεγαλύτερη δύναμη της $f(x)$. Αξίζει να προσέξουμε ότι καθώς το x πλησιάζει στο x_0 τα οι παραστάσεις $\frac{1}{f^p(x)}$ θα τείνουν στο 0.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Να υπολογίσετε τα όρια .

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - 2f(x) + 3}{f^2(x) + 3f(x) - 1} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 1}{2f^2(x) - 5f(x) + 6} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 7}{f^2(x) - f(x) + 1}$$

Λύση

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - 2f(x) + 3}{f^2(x) + 3f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) \left(1 - \frac{2}{f^2(x)} + \frac{3}{f^3(x)} \right)}{f^2(x) \left(1 + \frac{3}{f(x)} - \frac{1}{f^2(x)} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \left(1 - \frac{2}{f^2(x)} + \frac{3}{f^3(x)} \right)}{1 + \frac{3}{f(x)} - \frac{1}{f^2(x)}} = \frac{-\infty(1 - 0 + 0)}{1 + 0 - 0} = -\infty$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 1}{2f^2(x) - 5f(x) + 6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) \left(1 + \frac{3}{f(x)} - \frac{1}{f^2(x)} \right)}{f^2(x) \left(2 - \frac{5}{f(x)} + \frac{6}{f^2(x)} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{3}{f(x)} - \frac{1}{f^2(x)}}{2 - \frac{5}{f(x)} + \frac{6}{f^2(x)}} = \frac{1 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 7}{f^2(x) - f(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \left(1 - \frac{7}{f(x)} \right)}{f^2(x) \left(1 - \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f^2(x)} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{7}{f(x)}}{f(x) \left(1 - \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f^2(x)} \right)} = \frac{1-0}{-\infty(1-0+1)} = 0$$