

Όρια συνάρτησης στο Άπειρο

Στις προηγούμενες περιπτώσεις ασχοληθήκαμε με όρια συναρτήσεων όπου η μεταβλητή προσεγγίζει έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την συμπεριφορά που έχουν οι συναρτήσεις καθώς η μεταβλητή προσεγγίζει το άπειρο. Δηλαδή καθώς η μεταβλητή παίρνει οσοδήποτε μεγάλες, ή οσοδήποτε μικρές τιμές θέλουμε. Ασφαλώς θα πρέπει να ξεκινήσουμε δίνοντας τον αυστηρό ορισμό των συγκεκριμένων ορίων.

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι **σημείο συσσώρευσης** του A .

- Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο $+\infty$, υπάρχει και είναι $\ell \in \mathbb{R}$, και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν:}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $x > M$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

- Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο $+\infty$, είναι το $+\infty$, και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

αν και μόνο αν:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $x > M$ τότε $f(x) > \varepsilon$.

- Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο $+\infty$, είναι το $-\infty$, και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

αν και μόνο αν:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $x > M$ τότε $f(x) < -\varepsilon$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και θεωρώντας ότι $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A , μπορούμε να ορίσουμε τα αντίστοιχα όρια.

Σημειώνεται ότι ο παραπάνω ορισμός είναι εκτός ύλης αλλά παρουσιάζεται για λόγους πληρότητας, εφόσον παρουσιάστηκαν και οι υπόλοιποι ορισμοί.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $(\alpha, +\infty)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Όταν το x αυξάνει απεριορίιστα με οποιονδήποτε τρόπο, δηλαδή καθώς το x τείνει στο $+\infty$ τότε μπορούν να συμβούν τα παρακάτω:

- το $f(x)$ να προσεγγίσει όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ οπότε γράφουμε
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$
- το $f(x)$ να αυξάνεται απεριορίιστα οπότε γράφουμε
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$
- το $f(x)$ να μειώνεται απεριορίιστα οπότε γράφουμε
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Αντίστοιχα,

έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $(-\infty, \alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Όταν το x μειώνεται απεριορίιστα με οποιονδήποτε τρόπο, δηλαδή καθώς το x τείνει στο $-\infty$ τότε μπορούν να συμβούν τα παρακάτω:

- το $f(x)$ να προσεγγίσει όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ οπότε γράφουμε
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$
- το $f(x)$ να αυξάνεται απεριορίιστα οπότε γράφουμε
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$
- το $f(x)$ να μειώνεται απεριορίιστα οπότε γράφουμε
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Προσοχή: Για τα όρια συναρτήσεων στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 , με την προϋπόθεση ότι:

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Βασικά Όρια

Τα βασικά όρια που θα χρησιμοποιήσουμε είναι τα παρακάτω:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2v} = +\infty$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2v+1} = -\infty$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

Όρια Πολυωνυμικών και Ρητών Συναρτήσεων

- Έστω το πολύωνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha_v \neq 0$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_v x^v$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^v \left(\alpha_v + \alpha_{v-1} \frac{1}{x} + \dots + \alpha_1 \frac{1}{x^{v-1}} + \alpha_0 \frac{1}{x^v} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^v (\alpha_v + \alpha_{v-1} \cdot 0 + \dots + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 \cdot 0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_v x^v \end{aligned}$$

$$\text{εφόσον } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^v} = 0$$

- Αντίστοιχα για την ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$$, Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \text{ πολύωνυμο του } x \text{ με } \alpha_v \neq 0 \text{ και } \beta_\mu \neq 0$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_v x^v}{\beta_\mu x^\mu}.$$

Η απόδειξη είναι όπως πριν, βγάζοντας κοινό παράγοντα από κάθε πολύωνυμο τον μεγατοβάθμιο όρο και απλοποιώντας μετά.

Βασικές Ιδιότητες των Ορίων

1. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell > 0$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ τότε υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$
2. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell < 0$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ τότε υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) < 0$
3. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell > 0$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ τότε υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$
4. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell < 0$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ τότε υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) < 0$
5. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ δηλαδή για πολύ μεγάλα x , (αντίστοιχα για κάθε x κοντά στο $-\infty$ δηλαδή για πολύ μικρά x), και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$) τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$).
6. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ δηλαδή για πολύ μεγάλα x , (αντίστοιχα για κάθε x κοντά στο $-\infty$ δηλαδή για πολύ μικρά x), και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$) τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

Προσοχή: Για τα όρια συναρτήσεων στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, ισχύει **και το κριτήριο της παρεμβολής** αρκεί:

- οι συναρτήσεις να είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- να μην προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Τριγωνομετρικά Όρια στο Άπειρο

Τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$ υπάρχει.

Εφόσον $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$ δεν μπορεί να είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = \ell \in \mathbb{R}$.

Ισχύει: $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\eta\mu(x + \pi)] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x + \pi)$.

Θέτουμε $u = x + \pi$ με $u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \pi) = +\infty$.

Άρα: $\ell = -\lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u = -\ell$.

Επομένως $\ell = -\ell \Leftrightarrow 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = 0$.

Επιπλέον έχουμε: $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Θέτουμε $u = x + \frac{\pi}{2}$ με $u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$.

Άρα: $0 = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu u$. Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0$

Τελικά έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu^2 x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \end{array} \right\}$$

Όμως:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu^2 x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow 0 + 0 = 1 \Rightarrow 0 = 1$$

Άτοπο.

Άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$ δεν υπάρχει.

Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχει εφόσον αν υπήρχε, δεν θα μπορούσε να είναι $+\infty$ ή $-\infty$, οπότε θα ήταν κάποιος πραγματικός αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$.

Άρα $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x$ και αν θέσω $u = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = u - \frac{\pi}{2}$ με $u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, τότε θα

έχω $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu \left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u$ το οποίο μόλις απέδειξα ότι δεν υπάρχει.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν.

Προσοχή:

- Η παραπάνω απόδειξη γίνεται με εργαλεία εντός ύλης, αλλά δεν είναι απαραίτητο να την γνωρίζει ο μαθητής.
- Από τα παραπάνω έπεται άμεσα ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \eta\mu \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$, και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν.

Πράγματι για το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu \frac{1}{x}$ έστω ότι υπάρχει.

Θέτω $\frac{1}{x} = u$ με $u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ οπότε έχω: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu \frac{1}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u$ το οποίο αποδείξαμε ότι δεν υπάρχει.

Ομοίως λειτουργούμε για τα υπόλοιπα όρια.

Παρατήρηση: Το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \epsilon\phi x$ δεν ορίζεται και αυτό γιατί η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει πεδίο

ορισμού το σύνολο $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \dots$ το οποίο δεν περιέχει το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Όρια Εκθετικής Συνάρτησης

Για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
- Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Όρια Λογαριθμικής Συνάρτησης

Για την λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $x > 0$ ισχύει ότι:

- Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.
- Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.

Παρατηρήσεις:

1. Για να θυμόμαστε τα παραπάνω όρια, καλό είναι να απομνημονεύσουμε τις γραφικές παραστάσεις των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.
2. Με βάση τις οδηγίες του Υπουργείου στις λογαριθμικές συναρτήσεις θα συναντήσουμε βάσεις που θα είναι μόνο το 10 ή το e.