

Μεθοδολογία στα Όρια Συναρτήσεων στο Άπειρο

Μέθοδος 1: Όρια Πολυωνυμικών και Ρητών Συναρτήσεων

Εδώ χρησιμοποιούμε τα βασικά όρια:

- Αν $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$ και $a_n \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$
- Αν $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_\mu x^\mu + \dots + b_1 x + b_0$ με $a_n \neq 0$ και $b_\mu \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_\mu x^\mu}$.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + x - 1)$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^7 - 9x^4 + 3x^3 - 1)$

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2 + 3x + 2)$

Λύση

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3)^{2(+\infty)} = +\infty$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^7 - 9x^4 + 3x^3 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^7)^{-5(+\infty)} = -\infty$

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3)^{4(-\infty)} = -\infty$

δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^2)^{-7(+\infty)} = -\infty$

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{4x^3 + 6x^2 - 4x + 2}$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{2x^3 - 5x^2 + x - 2}$

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + x - 1}{2x^3 + 7x^2 - 3x + 8}$

Λύση

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{4x^3 + 6x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\cancel{3}}}{4x^{\cancel{3}}} = \frac{1}{2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{2x^3 - 5x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x}{2} = +\infty$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + x - 1}{2x^3 + 7x^2 - 3x + 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{2x} = 0$$

Παρατήρηση:

- Άρα αν $\deg P(x) = \deg Q(x)$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$
- Άρα αν $\deg P(x) < \deg Q(x)$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
- Άρα αν $\deg P(x) > \deg Q(x)$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$ ή $-\infty$

Αν έχουμε διαφορά ρητών συναρτήσεων, τότε πρώτα υπολογίζουμε κάθε όριο ξεχωριστά. Αν καταλήξουμε σε απροσδιόριστη μορφή τότε τα κάνουμε ομώνυμα και υπολογίζουμε το τελικό όριο.

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστούν τα όρια

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 6x^2 - 2} \right) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x + 1} - \frac{x^2}{x - 1} \right)$$

Λύση

$$\text{Για το όριο } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 6x^2 - 2} \right) \text{ ισχύει:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 6x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2.$$

$$\text{Άρα } A = 0 + 2 = 2$$

$$\text{Για το όριο } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x + 1} - \frac{x^2}{x - 1} \right) \text{ ισχύει:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty .$$

Άρα $B = +\infty - (+\infty)$ που είναι απροσδιόριστη μορφή.

Έτσι:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

Μέθοδος 2: Όρια Άρρητων Συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε ένα όριο που περιλαμβάνει παραστάσεις της μορφής:

$$\sqrt[n]{f(x)} \pm g(x) \text{ ή } \sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} \text{ με } \kappa, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \kappa, \nu \geq 2$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Σε κάθε υπόρριζη ποσότητα βγάζουμε κοινό παράγοντα το x υψωμένο σε δύναμη ίση με την τάξη της ρίζας.
- Χωρίζουμε τις ρίζες και εμφανίζεται η ποσότητα $\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{αν } x \rightarrow -\infty \end{cases}$
- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και υπολογίζουμε το όριο.
- Αν καταλήξω σε μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$ τότε επιστρέφουμε στο αρχικό όριο, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με συζυγή παράσταση της ρίζας και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία
 θέτω $\frac{1}{x} = h$ και προχωράω κανονικά τον υπολογισμό του ορίου.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - 2x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} + x) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2+2x-3} - x)$$

Λύση

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 \right) \right] = +\infty(-1) = -\infty$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right) \right] =$$

$$= +\infty(1-1) = +\infty \cdot 0 \text{ απροσδιόριστη μορφή.}$$

Επιστρέφω στο αρχικό όριο και έχω:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1} = \frac{2 + 0}{-\sqrt{1 + 0 + 0} - 1} = -\frac{2}{2} = -1
 \end{aligned}$$

Θα μπορούσα όταν κατέληξα στην Απροσδιόριστη Μορφή $+\infty \cdot 0$ να κάνω την

αντικατάσταση $\frac{1}{x} = h$ με $x < 0 \Leftrightarrow h < 0$ και $h \rightarrow h_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

Οπότε το όριο γράφεται:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right) \right] &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{h} \left(\sqrt{1 + 2h + 3h^2} - 1 \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1 + 2h + 3h^2}}{h} \stackrel{\%}{=} \stackrel{\text{A.M}}{=} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1 + 2h + 3h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \sqrt{1 + 2h + 3h^2})(1 + \sqrt{1 + 2h + 3h^2})}{h(1 + \sqrt{1 + 2h + 3h^2})} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1^2 - \sqrt{1 + 2h + 3h^2}^2}{h(1 + \sqrt{1 + 2h + 3h^2})} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1 - 2h - 3h^2}{h(1 + \sqrt{1 + 2h + 3h^2})} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(-2 - 3h)}{h(1 + \sqrt{1 + 2h + 3h^2})} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2 - 3h}{1 + \sqrt{1 + 2h + 3h^2}} = \frac{-2}{2} = -1
 \end{aligned}$$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2 + 2x - 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)} - x \right) =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)} - 1 \right) \right] = +\infty (\sqrt[3]{0 + 0 - 0} - 1) = +\infty (-1) = -\infty
 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η παράστασή μας περιλαμβάνει πολλά ριζικά, τότε εφαρμόζω αρχικά την προηγούμενη μεθοδολογία και αν καταλήξω σε μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$, τότε

- αφαιρώ από κάθε ρίζα, μια ρίζα ίδιας τάξης που έχει μόνο τον μεγιστοβάθμιο όρο,
- πολλαπλασιάζω και διαιρώ κάθε μια από τις διαφορές που έφτιαξα με την συζυγή τους παράσταση
- εργάζομαι όπως πριν

Παράδειγμα : Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 3} + \sqrt{9x^2 - 4x + 6} \right)$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 7} + \sqrt{x^2 - 6x - 8} - \sqrt{4x^2 - 1} \right)$

Λύση

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 3} + \sqrt{9x^2 - 4x + 6} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)} - \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} \right)} + \sqrt{x^2 \left(9 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} \right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - |x| \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}} + |x| \sqrt{9 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - x \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}} + x \sqrt{9 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}} + \sqrt{9 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} \right) \right] =$$

$$= +\infty \left(\sqrt{1+0} - \sqrt[3]{1+0-0} + \sqrt{9-0+0} \right) = +\infty (1-1+3) = +\infty$$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 7} + \sqrt{x^2 - 6x - 8} - \sqrt{4x^2 - 1} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x^2} \right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}} + |x| \sqrt{1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} - |x| \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}} - x\sqrt{1-\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}} + x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}} + \sqrt{4-\frac{1}{x^2}} \right) \right] = -\infty \cdot (-1-1+2) = -\infty \cdot 0 = \text{A.M.}
 \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση επιστρέφουμε στο αρχικό όριο και εφαρμόζουμε την διαδικασία που αναφέραμε:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-7} + \sqrt{x^2-6x-8} - \sqrt{4x^2-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-7} - \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-6x-8} - \sqrt{x^2} - \sqrt{4x^2-1} + \sqrt{4x^2} \right) = \\
 &(\text{Εύκολα παρατηρούμε ότι για } x < 0 \text{ ισχύει } -\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + \sqrt{4x^2} = -|x| - |x| + 2|x| = 0, \\
 &\text{επομένως το αρχικό μας όριο δεν έχει αλλάξει μιας κα προσθέσαμε το 0!}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(\sqrt{x^2+3x-7} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2+3x-7} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+3x-7} + \sqrt{x^2}} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(\sqrt{x^2-6x-8} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2-6x-8} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2-6x-8} + \sqrt{x^2}} - \frac{(\sqrt{4x^2-1} - \sqrt{4x^2})(\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{4x^2})}{\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{4x^2}} \right] = \ell
 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα επιμέρους κλάσματα:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x-7} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2+3x-7} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+3x-7} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x-7}^2 - \sqrt{x^2}^2}{\sqrt{x^2+3x-7} + \sqrt{x^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3x-7-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-7}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}} + |x|} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-7}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(3-\frac{7}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+1\right)} = \\
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+1} = \frac{3-0}{1+1} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 6x - 8} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2 - 6x - 8} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 - 6x - 8} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 6x - 8}^2 - \sqrt{x^2}^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x - 8 - x^2}{|x| \sqrt{1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x - 8}{-x \sqrt{1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(6 - \frac{8}{x}\right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - \frac{8}{x}}{\sqrt{1 - \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} + 1} = \frac{6 - 0}{1 + 1} = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{4x^2})(\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2})}{\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1}^2 - \sqrt{4x^2}^2}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{4x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{|x| \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-x \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-x \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2\right)} = \frac{-1}{-\infty \cdot 4} = 0$$

$$\text{Άρα τελικά } \ell = \frac{3}{2} + 3 - 0 = \frac{9}{2}$$

Μέθοδος 3: Όρια και Απόλυτες Τιμές

Όταν το όριο το οποίο υπολογίζουμε περιέχει μια ή περισσότερες παραστάσεις μέσα σε απόλυτες τιμές και καταλήγει σε κάποια απροσδιόριστη μορφή, τότε χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της διάταξης των ορίων και «διώχνουμε» τα απόλυτα.

Δηλαδή τις ακόλουθες:

1. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell > 0$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ τότε υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$
2. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell < 0$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ τότε υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) < 0$
3. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell > 0$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ τότε υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$
4. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell < 0$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ τότε υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $f(x_0) < 0$

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|2x^3 + 3x^2 - 3x + 5| - |x^2 - 7x - 13|}{|x^3 + x - 5| + |7 - x|}$.

Να βρεθούν τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Λύση

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (γιατί;) οπότε και τα δυο όρια έχουν νόημα.

Για το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Παρατηρούμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 7x - 13) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$

Άρα από τα παραπάνω υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $2x^3 + 3x^2 - 3x + 5 > 0$, $x^2 - 7x - 13 > 0$, $x^3 + x - 5 > 0$ και $7 - x < 0$ για κάθε $x > x_0$.

Έτσι το όριο γράφεται:

$$\begin{aligned} A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) - (x^2 - 7x - 13)}{(x^3 + x - 5) + (-7 + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x + 5 - x^2 + 7x + 13}{x^3 + x - 5 - 7 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 18}{x^3 + 2x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \end{aligned}$$

Για το όριο $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

Παρατηρούμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 7x - 13) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$

Άρα από τα παραπάνω υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $2x^3 + 3x^2 - 3x + 5 < 0$, $x^2 - 7x - 13 > 0$, $x^3 + x - 5 < 0$ και $7 - x > 0$ για κάθε $x < x_0$.

Έτσι το όριο γράφεται:

$$\begin{aligned} B = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2x^3 - 3x^2 + 3x - 5) - (x^2 - 7x - 13)}{(-x^3 - x + 5) + (7 - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 - 3x^2 + 3x - 5 - x^2 + 7x + 13}{-x^3 - x + 5 + 7 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 - 4x^2 + 10x + 8}{-x^3 - 2x + 12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{-x^3} = 2 \end{aligned}$$

Μέθοδος 4: Βοηθητική Συνάρτηση

Όταν δίνεται ότι το όριο μιας παράστασης της $f(x)$ υπάρχει και είναι είτε κάποιος πραγματικός αριθμός είτε κάποιο άπειρο και ζητείται να βρεθεί το όριο της $f(x)$, λειτουργούμε όπως και στο πεπερασμένο όριο στο x_0 στην προηγούμενη ενότητα. Δηλαδή θέτουμε την παράσταση με μια νέα συνάρτηση, λύνουμε ως προς $f(x)$ και έπειτα υπολογίζουμε το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα 1: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ να υπολογιστούν τα:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3f(x)}{f(x) + 3x}$

Λύση

α. Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.

Έχουμε $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x \cdot g(x)$.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot g(x)] = 3(+\infty) = +\infty$.

β.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3f(x)}{f(x) + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(5 - \frac{3f(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\frac{f(x)}{x} + 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{3f(x)}{x}}{\frac{f(x)}{x} + 3} = \frac{5-9}{3+3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Διαφορετικά το ίδιο ερώτημα, θα μπορούσε να λυθεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3f(x)}{f(x) + 3x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3xg(x)}{xg(x) + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} (5 - 3g(x))}{\cancel{x} (g(x) + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3g(x)}{g(x) + 3} = \frac{5-9}{3+3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Μέθοδος 5: Όριο στο Άπειρο και Διάταξη

Σε περιπτώσεις που έχουμε ανισοτικές σχέσεις συναρτήσεων χρησιμοποιούμε τις παρακάτω βασικές ιδιότητες της διάταξης.

- Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ δηλαδή για πολύ μεγάλα x , (αντίστοιχα για κάθε x κοντά στο $-\infty$ δηλαδή για πολύ μικρά x), και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$) τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$).
- Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ δηλαδή για πολύ μεγάλα x , (αντίστοιχα για κάθε x κοντά στο $-\infty$ δηλαδή για πολύ μικρά x), και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$) τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

Παράδειγμα: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $(x^7 - 6x^2 + 7x + 9)f(x) \leq 5x^9 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 - 6x^2 + 7x + 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7) = -\infty$. Άρα υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $x^7 - 6x^2 + 7x + 9 < 0$ για κάθε $x < x_0$.

Επομένως για $x < x_0$ ισχύει:

$$(x^7 - 6x^2 + 7x + 9)f(x) \leq 5x^9 - 2x \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{5x^9 - 2x}{x^7 - 6x^2 + 7x + 9}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^9 - 2x}{x^7 - 6x^2 + 7x + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^9}{x^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2) = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Μέθοδος 6: Όριο και Κριτήριο Παρεμβολής

Για τα όρια συναρτήσεων στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, ισχύει και το κριτήριο της παρεμβολής αρκεί:

- οι συναρτήσεις να είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- να μην προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \leq (x^3 - 7x + 3) f(x) \leq 2x^3 - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει)

α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

Λύση

α. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 7x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$. Άρα υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιος ώστε $x^3 - 7x + 3 < 0$ για κάθε $x < x_0$.

Επομένως για κάθε $x < x_0$ ισχύει:

$$2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \leq (x^3 - 7x + 3) f(x) \leq 2x^3 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^3 - 7x + 3} \geq f(x) \geq \frac{2x^3 - 5}{x^3 - 7x + 3}$$

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^3 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5}{x^3 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

β. Έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $x < x_0$ ισχύει:

$$\frac{2x^3-5}{x^3-7x+3} \leq f(x) \leq \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^3-7x+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} \frac{2x^3-5}{x^3-7x+3} \geq \frac{1}{x} f(x) \geq \frac{1}{x} \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^3-7x+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3-5}{x^4-7x^2+3x} \geq f(x) \geq \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^4-7x^2+3x}$$

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^4-7x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-5}{x^4-7x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Μέθοδος 7: Όρια Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων στο $\pm\infty$

Επειδή γνωρίζουμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν, αλλά οι συναρτήσεις $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ είναι φραγμένες, προσπαθούμε να διαιρέσουμε τους όρους αυτούς με μια κατάλληλη ποσότητα που να τείνει στο 0, για χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Μηδενική x Φραγμένη.

Επίσης αν υπολογίζουμε κάποιο όριο στην μορφή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu A(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu A(x)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση, δηλαδή να θέσουμε $A(x) = u$ και να υπολογίσουμε το νέο όριο.

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια .

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \eta\mu x \right)$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ ισχύει ότι: } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\text{Άρα } -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\text{Παρατηρώ ότι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0.$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{\eta\mu x}{x^2}}{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}} = \ell$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ ισχύει ότι: } \left| \frac{\eta\mu x}{x^2} \right| = \left| \frac{1}{x^2} \right| |\eta\mu x| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|$$

$$\text{Άρα } -\left| \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|$$

Παρατηρώ ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x^2} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{1}{x^2} \right| \right) = 0.$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0$$

Ομοίως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0.$

Άρα $\ell = \frac{2-0}{1+0} = 2$

Επομένως το ζητούμενο όριο υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x} = 2$

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια.

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{3x^2 - 1}{x^3 + 1}$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$

Λύση

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{3x^2 - 1}{x^3 + 1} = \ell$

Θέτω $\frac{3x^2 - 1}{x^3 + 1} = u$ με $u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$

Άρα $\ell = \lim_{u \rightarrow 0} \eta\mu u = 0$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu \frac{2x^2 - 1}{x - 3} = \ell$

Θέτω $\frac{2x^2 - 1}{x - 3} = u$ με $u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$

Άρα $\ell = \lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu u$ το οποίο δεν υπάρχει.

Μέθοδος 8: Προσδιορισμός Παραμέτρων ή Διερεύνηση

Αν μας δώσουνε μια πολυωνυμική συνάρτηση που περιέχει και μια παράμετρο και μας ζητήσουν να βρούμε την τιμή του ορίου καθώς το x τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε εξετάζουμε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου καθώς και το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου και έπειτα υπολογίζουμε το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.

Παράδειγμα 1: Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^3 + (\lambda - 3)x^2 + \lambda x - 3]$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 3\lambda)x^3 + (\lambda - 3)x^2 + \lambda x - 3$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το όριο έχει νόημα.

- Αν $\lambda^2 - 3\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 3)$, τότε η πολυωνυμική συνάρτηση είναι 3^{ου} βαθμού και επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^3 + (\lambda - 3)x^2 + \lambda x - 3] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^3] = \ell$$

$$\circ \text{ Αν } \lambda^2 - 3\lambda > 0 \Leftrightarrow (\lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 3) \text{ τότε } \ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^3] = -\infty$$

$$\circ \text{ Αν } \lambda^2 - 3\lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 3 \text{ τότε } \ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^3] = +\infty$$

- Αν $\lambda = 0$ τότε το όριο γράφεται: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2) = -\infty$
- Αν $\lambda = 3$ τότε το όριο γράφεται: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty$

Αν μας δώσουν μια ρητή, παραμετρική συνάρτηση τότε εξετάζουμε τους βαθμούς και τα πρόσημα των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρανομαστή και υπολογίζουμε το όριο του πηλίκου τους.

Παράδειγμα 2: Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3 + x^2 + 3}{\lambda x^2 - 3x + 5}.$$

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι το πολώνυμο $p(x) = (\lambda - 2)x^3 + x^2 + 3$, ενώ ο παρανομαστής είναι το πολώνυμο $q(x) = \lambda x^2 - 3x + 5$. Οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων τους μηδενίζονται για $\lambda = 2$ και $\lambda = 0$ αντίστοιχα.

Έτσι με βάση τους βαθμούς και το πρόσημο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων διακρίνω τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{2x^2 - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

- Αν $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$ τότε το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3 + x^2 + 3}{\lambda x^2 - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3}{\lambda x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda - 2}{\lambda} x \right)^{\frac{\lambda - 2}{\lambda} > 0} = +\infty$$

- Αν $(\lambda - 2 < 0 \text{ και } \lambda > 0) \Leftrightarrow 0 < \lambda < 2$ τότε το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3 + x^2 + 3}{\lambda x^2 - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3}{\lambda x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda - 2}{\lambda} x \right)^{\frac{\lambda - 2}{\lambda} < 0} = -\infty$$

- Αν $\lambda = 0$ τότε το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 3}{-3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3} = +\infty$$

- Αν $\lambda < 0$ τότε το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3 + x^2 + 3}{\lambda x^2 - 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3}{\lambda x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda - 2}{\lambda} x \right)^{\frac{\lambda - 2}{\lambda} > 0} = +\infty$$

Αν μας δίνουν ένα όριο το οποίο περιέχει παραμέτρους και εμείς πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων ώστε το όριο να υπάρχει και να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός, προσπαθούμε να φέρουμε το όριο στην μορφή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^\rho f(x)$, με $\rho \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Έπειτα κάνουμε διερεύνηση για το πρόσημο του $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$. Αν $\ell = 0$ τότε θα έχουμε Αππροσδιόριστη Μορφή και θα ενεργήσουμε με τον κατάλληλο τρόπο. Ας μην ξεχάσουμε να σημειώσουμε ότι οποτεδήποτε υπολογίσουμε κάποιον άγνωστο χωρίς να στηριχούμε αποκλειστικά σε ισοδυναμίες, θα απαιτηθεί επαλήθευση.

Παράδειγμα 3: Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \alpha x + \beta \right) = 12$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η αναζήτηση του ορίου έχει νόημα.

Παρατηρώ ότι:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \alpha x + \beta \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} + \alpha x + \beta \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \alpha x + \beta \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \alpha x + \beta \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) \right] = (+\infty)(1-a) \end{aligned}$$

- Αν $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0$ τότε $\ell = (+\infty)(1-a) = -\infty$ Αδύνατο.
- Αν $\alpha < 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha > 0$ τότε $\ell = (+\infty)(1-a) = +\infty$ Αδύνατο.

Άρα $\alpha = 1$.

Έτσι για $\alpha = 1$ το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x \right)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - x} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 3}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 3}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{x}}{- \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)} + \beta \right) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{-2} + \beta = 12 \Leftrightarrow -1 + \beta = 12 \Leftrightarrow \beta = 13.$$

Άρα τελικά $\alpha = 1$ και $\beta = 13$.

Μέθοδος 9: Όρια Εκθετικών και Λογαριθμικών Συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(\alpha^x, \beta^x, \dots)}{g(\alpha^x, \beta^x, \dots)}$ το οποίο εμφανίζει απροσδιόριστη μορφή, βγάζουμε στον αριθμητή και στον παραινομαστή κοινό παράγοντα το εκθετικό με την μεγαλύτερη βάση όταν $x \rightarrow +\infty$ και το εκθετικό με την μικρότερη βάση όταν $x \rightarrow -\infty$, ώστε τα νέα εκθετικά που θα δημιουργηθούν να τείνουν στο 0.

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε τα όρια .

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x - 2}{2^x + 3^x} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 4^x}{2^x + 3^x}$$

Λύση

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x - 2}{2^x + 3^x} = \ell$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$. Άρα το παραπάνω όριο είναι

Απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Έτσι θα έχω:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x - 2}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \left(\frac{3^x}{4^x} + 1 - \frac{2}{4^x} \right)}{3^x \left(\frac{2^x}{3^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^x \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^x + 1 - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^x}{\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1} \right] = +\infty$$

(Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^x = +\infty$)

$$\beta. \ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 4^x}{2^x + 3^x}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$. Άρα το παραπάνω όριο είναι

Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Έτσι θα έχω:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 4^x}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x \left(1 + \frac{4^x}{3^x} \right)}{2^x \left(1 + \frac{3^x}{2^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x \frac{1 + \left(\frac{4}{3} \right)^x}{1 + \left(\frac{3}{2} \right)^x} = 0$$

(Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^x = 0$)

Αν έχουμε να υπολογίσουμε ένα όριο της μορφής $\ell = \ln f(x) \pm \ln g(x)$ και αυτό καταλήγει σε μια απροσδιόριστη μορφή, τότε εφαρμόζω τις ιδιότητες των λογαρίθμων, προσπαθώντας να έχω ένα όριο με έναν μόνο λογάριθμο, και μια μόνο παράσταση μέσα σε αυτόν. Έπειτα κάνω αντικατάσταση και υπολογίζω το νέο όριο.

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί το όριο $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln x]$

Λύση

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ (γιατί;) και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, οπότε το όριο είναι της μορφής $+\infty - (+\infty)$ που είναι Απροσδιόριστη Μορφή.

$$\text{Έτσι έχω: } \ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x}$$

$$\text{Θέτω } \frac{x+1}{x} = u \text{ με } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{Έτσι: } \ell = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

Αν έχω να υπολογίσω κάποιο όριο της μορφής, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{f(x)}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x)$, ή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x)$ τότε συχνά κάνω την αντικατάσταση $f(x) = u$ και καταλήγω σε μια από τις γνωστές ιδιότητες.

- Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\alpha} x = -\infty$.
- Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$.

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε τα όρια .

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2-2x+3}{2x^2-1}}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + \sin x) - \ln x]$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{2x+3}{x} \right)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln^2 x - 2\ln x + 4}{6\ln^2 x - 5\ln x - 3}$$

Λύση

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2-2x+3}{2x^2-1}} = \ell$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 1} = u \text{ με } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\Upsilon\tau\sigma\iota: \ell = \lim_{u \rightarrow \frac{1}{2}} e^u = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + \sigma\upsilon\nu x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x}\right) = \ell$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \frac{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} = u \text{ με}$$

$$u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right) = +\infty \text{ (γιατί;)}$$

$$\Upsilon\tau\sigma\iota: \ell = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{2x+3}{x}\right) = \ell$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \frac{2x+3}{x} = u \text{ με } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(2x+3)\frac{1}{x}\right] = +\infty \text{ (γιατί;)}$$

$$\Upsilon\tau\sigma\iota: \ell = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln^2 x - 2\ln x + 4}{6\ln^2 x - 5\ln x - 3} = \ell$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \ln x = u \text{ με } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$\Upsilon\tau\sigma\iota: \ell = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{3u^2 - 2u + 4}{6u^2 - 5u - 3} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{u}^2}{6\cancel{u}^2} = \frac{1}{2}$$

Αν έχω να υπολογίσω κάποιο όριο της μορφής, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}$, με $x_0 \in \mathbb{R}$, ή $x_0 = \pm\infty$ το οποίο ανάγεται σε μια από τις Απροσδιόριστες Μορφές 0^0 , ∞^0 ή 1^∞ , τότε

- το γράφω στην μορφή $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x) g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)}$
- θέτω $g(x) \ln f(x) = u$

και υπολογίζω όπως πριν τα όρια.

Κάποια από αυτά θα είναι ιδιαιτέρως δύσκολα να μελετηθούν με τις γνώσεις και τις μεθόδους που έχουμε συζητήσει μέχρι εδώ, αλλά θα είναι ιδιαιτέρως εύκολα αργότερα.