

Πεπερασμένο Όριο στο  $x_0$ 

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 4x - 6)^{10}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 4x - 6)^{10}$$

2. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  αν

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = 1$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{3\sqrt{x^2 + 3} - 6}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = 1$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} 2 - \sin x, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = 1$$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^3 - 8}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^3 - 1}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x-4}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-11}{2x^2 + 2x - 4} + \frac{x+2}{x^2 - 1} \right)$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x-2}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{6-x}}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{3-\sqrt{3x}}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+2x+10}-x-2}{x^2-4x+3}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2}-2x+1}{x^4-1}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x\sqrt{4x+16}}$$

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+3}+x+1}{x^2+2x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{13-x}}{x^2-25}$$

7. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-3}{x^2-1}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x+5}-2x}{x^2-4}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt[3]{x^2+x+2}-1}{x^2-4}$$

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2|+|x^2-3|-5}{|x|-1}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3|-|x-1|}{x^2-2x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3|x-1|+2|x-4|-7}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$$

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|+x^2-4}{|x-5|-3}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-3x|+x^2-6x+9}{|x^2-9|}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-2x-3|+|x-3|}{|x^2-4x+3|+x^2-6x+9}$$

10. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2 - x + 2) = 3$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 2$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{1-f(x)} = e$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
13. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-f(x)-2}{f(x)-2}$
14. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+x-5}{x^2-4} = 2$  να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:
- α.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$       β.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2}$       γ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-2f(x)-3}{x^2-6x+8}$
15. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 5$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(2x^2+x-10)] = 3$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)]$
16. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4} = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(1-\sqrt{x-1})] = 5$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)]$
17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)-(x-1)g(x)] = -2$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} [-2xf(x)+x^2g(x)] = 3$  να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$
18. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} [xf(x)-2g(x)] = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)-\sqrt{1+4x}g(x)] = 5$  τότε να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ .
19. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $8-2x-2x^2 \leq f(x) \leq 2x^3+6-4x$ .

20. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\frac{x^3}{3} - x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu x^2$  να υπολογίσετε τα όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

21. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $4x \leq f(x) + 4 \leq x^2 + 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε

α. το  $f(2)$                       β. το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$                       γ. το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

22. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $|f(x) - 2| \leq x^2$  για κάθε  $x$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

23. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $|f(x) - x^2| \leq (x-1)^{100}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

24. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $|f(x) - x^3| \leq x^4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $x \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  και να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$

25. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

26. Έστω  $x^3 - 3x + 2 \leq f(x)(x^2 - 2x + 1) \leq (12x - 12)(\sqrt{x+3} - 2)$  ω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $|xf(x) - \eta\mu x| \leq x^4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

27. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f^2(x) \leq 6f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

28. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\sigma\nu^2 x \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

29. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f^2(x) + 2x\eta\mu x \leq 2xf(x) + \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

30. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε  $f^2(x) + g^2(x) \leq \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

31. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  και  $0 < f(x) < g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) + g^3(x)\eta\mu x}{f^2(x) + g^2(x)}$

32. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) + 5 \leq 4g(x) + \sigma\nu\nu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$  και  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 2$

33. Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία ορίζεται κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ . Να αποδείξετε ότι

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \qquad \beta. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

34. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 + x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x^2 - x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\nu\nu x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\varphi x}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\nu\nu x} \right)$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \sigma\nu\nu x - 1}{x^2 - 4\eta\mu x}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\nu\nu x}{x^2}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sigma\nu\nu x} - 1}{\eta\mu x}$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu x - \sigma\nu\nu x}{1 - \eta\mu x - \sigma\nu\nu x}$$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\eta\mu^2 x}{2x^2 + \eta\mu^2 x}$$

ιδ.

ιε.

35. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{\eta\mu 2x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu^2 x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 5x}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 5x}{\epsilon\varphi 10x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2 - 5x + 6}$$

36. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x} + 2x^2 + 1 \right) \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

37. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{x} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{\eta\mu(x-1)} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{\sqrt[6]{x-1} - 1} \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - \sqrt[3]{\eta\mu x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

38. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)}{x}, a \neq 0$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + f(5x) - f(x)}{x} \quad \epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)f(3x)}{x^2} \quad \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} \quad \eta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x-2)}{x^2-4} \quad \theta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+x)}{x}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt[\nu]{x}}, \nu \in \mathbb{N} \text{ με } \nu > 1$$

39. Έστω άρτια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 3x + 4) = 5$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

40. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  και  $f(x-1) - xf(x) = 2x^2 - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

41. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f^3(x) - xf^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta\mu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$  με  $\ell \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\ell$ .

42. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  και  $f(x) \neq 1$  κοντά στο 2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 5f(x) - 6}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f^2(x) - 4| + |3 - f(x)| - 5}{f^2(x) - 1}$$

43. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2$ .

$$\text{Να υπολογίσετε το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}.$$

44. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x + \eta\mu x)}{2x + \eta\mu x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x - \eta\mu x)}{2x - \eta\mu x}$$

45. Να προσδιορίσετε τον  $a \in \mathbb{R}^*$  αν  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^2 - (a^2 - a)x - a^2}{|x - a|}$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

46. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} a^2x + \beta - 1 & , \text{αν } x > 1 \\ \beta x^2 + a + 5 & , \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$ . Να υπολογιστούν οι  $a, \beta \in \mathbb{R}$  αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

47. Να προσδιορίσετε τους  $a, \beta \in \mathbb{R}$  αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + \beta}{x - 1} = 4$

48. Να προσδιορίσετε τους  $a, \beta \in \mathbb{R}$  αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + \beta\sqrt{x} - 2}{x - 1} = -2$

49. Να προσδιορίσετε τους  $a, \beta \in \mathbb{R}$  αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x + a\sqrt{x+4} + \beta}{\eta\mu 5x} = 1$

## Για Δυνατούς Λύτες

50. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 + 2\alpha\beta x + a, & \text{av } x < 1 \\ 3^{2010}x^2 - \beta(\beta+1)x, & \text{av } x \geq 1 \end{cases}$  όπου  $a, \beta \in \mathbb{Z}$ . Να δείξετε ότι δεν

υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

51. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 3f(4-x)) = 4$ .

Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

52. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ . Να βρείτε το:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\eta\mu(\pi x)}$

53. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x+3\sqrt{x}}}$

54. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $f(A) = \mathbb{R}$  με  $(f \circ f)(x) - f(x) = 1 - x$ .

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

β. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  να δείξετε ότι υπάρχει και το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x)$ .

γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - x - 1}{f(x)}$ .

δ. Με δεδομένο ότι υπάρχουν τα ακόλουθα όρια, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow f(1)} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1-x}{f^{-1}(x)} \right).$$

ε. Να αποδείξετε ότι αν η  $f \circ f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

55. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^a x}{(1 - \eta\mu x)^\beta}$ ,  $a > 0, \beta > 0$

56. Αν για τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x-1} = 2$  να βρεθεί αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2x}$$



57. Αν για συνάρτηση  $f$  γνωρίζουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x^2}{x^3 - 1} = a$  να βρεθεί το  $a$  ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + f(x) - 6}{x - 1} = 5$$

58. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνήσια μονότονη συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)x^2 - f(2)x + 1}{x^2 - 1} = 2$$

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα.

β. Να δείξετε ότι  $f(1) = 5$  και  $f(2) = 6$

59. A. Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = x^3 + 3x - 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι η  $g$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

B. Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση ώστε να ισχύει  $f^3(x) + 3f(x) = x + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία

β. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 1 και 0 ανήκουν στο σύνολο τιμών της  $f$

γ. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της  $f$

δ. Αν γνωρίζουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα όρια:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi f(x))}{f(x) - 1} \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + f(-5)}{f(x) - 1} \quad (iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$$

60. Να υπολογισθεί, χωρίς χρήση L' Hospital, το όριο  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

61. Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του φυσικού αριθμού  $\nu > 1$  ώστε να ισχύει η σχέση  $|\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu \nu x| \leq 15|x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

62. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \quad |\eta\mu x| = |x + \pi| \quad \beta. \quad \eta\mu(x^2 - 1) + 1 = x^2 \quad \gamma. \quad e^x + x^3 = 1 + \eta\mu(e^x + x^3 - 1)$$

$$\delta. \quad \left| \sigma\upsilon\nu x \right| = \left| \frac{\pi}{2} - x \right| \quad \epsilon. \quad e^{|x|} + |x| = 1 + |\eta\mu x| \quad \sigma\tau. \quad e^{|\eta\mu x|} - e^{|x|} = |x| - |\eta\mu x|$$

Μη Πεπερασμένο Όριο στο  $x_0$ 

64. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{llll} \alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} & \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} & \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5}{x^4} & \delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^5} \\ \epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} & \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} & \zeta. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{\sqrt{x-2}} & \eta. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{\sqrt{x-2}} \end{array}$$

65. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x^3-6x^2+9x} & \beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x-2}{(x-2)^3(x+1)} \\ \gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} & \delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} x_0 \end{array}$$

66. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x-1} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{5-x}{(x+4)^2} - \frac{x}{x^2+3x-4} \right)$$

67. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{|x-1|(x+2)} & \beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x+2|-7}{x^2-4} & \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-5|-|x+5|}{x^3} \\ \delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+2}{|x|(x+1)} & \epsilon. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{|x-1|} \right) & \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{3}{|x-2|} - \frac{1}{x-2} \right) \end{array}$$

68. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-2x+1} & \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x-3\sqrt{x}+2} & \gamma. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+2}{\sqrt{x-3}-1} \\ \delta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{(x-2)^2} & \epsilon. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \right) & \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+5x-9}{(x-1)^2+\sqrt{x^2-2x+1}} \end{array}$$

69. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-7}{\sin x-1} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-2x}{\eta\mu^2 x} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu 2x}{\epsilon\phi x-1} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu^2 x}$$

$$\begin{array}{llll} \epsilon. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sigma\upsilon\nu x}{x - \eta\mu x} & \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x - \eta\mu x} & \zeta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sigma\upsilon\nu x}{x + \eta\mu x} & \eta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sigma\upsilon\nu x}{x + \eta\mu x} \\ \theta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \eta\mu^2 x}{x^2 - \eta\mu^2 x} & \iota. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x} & & \end{array}$$

70. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{3f(x) + 1} = +\infty$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

71. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x^2+5}-3} = -\infty$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

72. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x^2-4)}{x-1} = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{g(x)(x-2)} = +\infty$  να υπολογίσετε (αν υπάρχει)

το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

73. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} [|x|f(x)] = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x)\sigma\upsilon\nu(x-1)] = 3$  να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) + 2f(x)g(x)}{f^2(x) + 3g(x) - f^2(x)g(x)}$$

74. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ . Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} & \beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{f(x) + 2} \\ \gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f^3(x) - 3f(x) + 1}{2f^3(x) + 5f^2(x) - 6} & \delta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{f^3(x) - 2f^2(x) + f(x) - 3} \\ \epsilon. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4f^2(x) - 9f(x) + 3} & \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 5f(x) + 2}}{f(x) - 3} \end{array}$$

75. Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \lambda}{(x-1)^2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x - 3}{|x-1|}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda x^2 - \lambda}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}$$

76. Για τις διάφορες τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x + \eta \mu x + \beta}{x}$

77. Να βρείτε την τιμή του  $\mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2 + \mu x + \mu + 3} = -\infty$

78. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + (\beta-1)x + 4}{(x-2)^2}$  να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.

79. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (2-a)x + 1 - a + \beta}{|x-1|}$  να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.

80. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $x^2 f(x) \leq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} \dots$$

81. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $(x^2 - 2x + 1)f(x) \leq x - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

82. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $x^4 f(x) \leq (x-2)\eta \mu x \cdot \eta \mu 3x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{f^2(x) - 3f(x) + 7}$$

83. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  να

αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$

## Για Δυνατούς Λύτες

84. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - f(-x)) = +\infty$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
85. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2}{|f(x) - x|} = +\infty$ . Να αποδείξετε ότι:
- α.  $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x) - x| = 0$
- β.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
86. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .  
Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 1$
87. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$
88. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \eta\mu \frac{1}{x^2} \right)$
89. Να βρείτε την τιμή του  $\mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow \mu} \frac{x^2 + \mu}{x^2 - 4x + \mu^2} = +\infty$

## Όρια στο Άπειρο

91. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - x + 6)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 3)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2} - 5x + 1)$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^\nu + 6x + 3), \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > 1$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^\nu + 3x - 2), \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > 1$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2 - 3x^4)(x^3 + 1)^2]$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 1)^6 (-4x^2)]$$

92. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 2x + 9}{6x^4 - 2x^2}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x + 1}{x^4 + 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^5 - x^3 + 9}{3x + 2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^4 - 9}{2x^4 - e}$$

93. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{1+x^2} - x \right)$$

94. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 3x + 5}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 6x + 2}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 1}}{x + 3}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x^2 + 3}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

95. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x^3 - 5x^2 + x - 2| - x^3)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 + x - 2| - 3x^3 + x^2 + 1)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - |x-3|}{3x^2 + |5-2x|}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|10-2x|+3}{|x-4|+8}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - x|}{x + 4}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 6x + 3| - x^2}{x^3 - |x^3 - 5x^2 + 1|}$$

96. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 3)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x - 1})$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 5)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + \sqrt{4x^2 + x + 1})$$

97. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x + 1} - 3x)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 8x + x})$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x + \sqrt{16x^2 + 7x - 13})$$

98. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2 + 1})$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 7x^2 + x - 1} - \sqrt{4x^2 - x + 6})$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + x^2} - \sqrt[3]{8x^3 - x^2})$$

99. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1} - 2x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{16x^2 + 5})$$

100. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} x\eta\mu \frac{1}{x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\eta\mu^2 x}{x^3 + 1}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (\sqrt{x^2 + 3} - x) \eta\mu 3x \right]$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{x^3}{x^5 + 1}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{2 + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + \eta\mu x}{2x - \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sigma\upsilon\nu x)$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x^2}{x^3}$$

101. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^x \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x \quad \delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$$

102. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x}$$

103. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - 3^x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x - 3^x)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 3^x - 5^x}{3^x + 2 \cdot 5^x} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 3^{x+1}}{e^{x+3} + 3^x}$$

104. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2+1} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2-x^3}{x^2+1}} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2+1}})$$

105. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{e^x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \eta \mu x) \quad \delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+\sigma \nu \nu x}$$

106. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln 3x - \ln(x^2+1)] \quad \delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{x+1} \ln \frac{1}{1+x^2} \right)$$

107. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln^3 x - 9 \ln x + 7}{2 \ln^3 x + 3} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5 \ln^2 x + \ln x + 1}{5 \ln x - 1}$$

108. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^4 + x^2 + 1)f(x)] = 2019$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .



- 109.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} f(x) \right) = 8$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 110.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 5x^2 + 3) = 2$ . Να υπολογίσετε:
- α.** το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$       **β.** το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$       **γ.** τον  $a \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 f(x) + 5x^4 + ax^2}{f(x) + ax^2} = -1$
- 111.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)(2x - \sqrt{x})] = 5$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)]$
- 112.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Να υπολογίσετε τα όρια:
- α.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{f^2(x) + f(x) + 2} + f(x) \right]$       **β.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3f(x) - 5| - f(x)}{|2f(x) + 3|}$
- 113.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x) \geq x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 114.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(1+x^2)f(x) \leq x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 115.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\frac{x+1}{x+2} \leq x \cdot f(x) \leq \sqrt{x^2+1} - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 116.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $|f(x)| \leq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

117. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 4} \leq f(x) \leq \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$  για κάθε  $x > 0$ . Να υπολογίσετε

α. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$       β. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$       γ. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta \mu \frac{1}{x}$

118. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $-x^3 - 5x^2 \leq (x-1)f(x) \leq -x^3 + 2x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε

α. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$       β. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f^2(x) + 3f(x) - 2]$   
 γ. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4f^2(x) + 3f(x) + 2} + 2f(x)]$       δ. το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$

119. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ . Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  να

αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^6(x) + g^6(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$

120. Για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - 1)x^3 + 5\lambda x^2 - x + 6]$   
 β.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - 1)x^3 - (\lambda - 2\mu + 3)x^2 + (\mu + 4)x + 3\lambda]$   
 γ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 3)x^3 + 4\lambda x^2 - 3x + 1}{(\lambda - 2)x^2 + x + 1}$   
 δ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x^3 + \mu x^2 + x + 1}{\mu x^3 + \lambda x + 1}$   
 ε.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 5} + \lambda x)$   
 στ.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda x + 1 + \sqrt{x^2 - x})$   
 ζ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x} + \mu x)$   
 η.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} + \lambda^x}{3^x + \lambda^{x+1}}, \lambda > 0$   
 θ.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda^{x+1} - 5e^x + 3 \cdot 2^x}{\lambda^x + 4e^{x+1} + 3 \cdot 2^{x+1}}$

121. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - ax + \beta) = 7$ .
122. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + ax + \beta) = 6$ .
123. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu^2 x) = \ell \in \mathbb{R}$ .
124. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{2x^2 - x|x| + \frac{x+|x|}{x}} - \mu|x| \right) = 0$ .
125. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{2x^2 - x|x| + \frac{x+|x|}{x}} - \mu|x| \right) = +\infty$ .
126. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + x} - \sqrt{x^2 + \beta x}) = 1$ .
127. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{2\mu x + 1} = \frac{1}{4}$ .
128. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in (0, \pi)$  έτσι ώστε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4} + x \eta \mu a - \sigma \nu \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Για Δυνατούς Λύτες

129. Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x - \sigma \nu^2 x}{x + \eta \mu x}}$
130. Να υπολογιστούν τα όρια:
- α.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x \eta \mu \frac{1}{x} - x \eta \mu \frac{2}{x} \right)$       β.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x^3 \eta \mu \frac{1}{x} - x^3 \eta \mu \frac{2}{x} \right)$
- γ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \eta \mu \left( \frac{1}{x} \right)$       δ.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sigma \nu x - 1) \eta \mu \left( \frac{1}{x} \right)$
131. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$
- α. Να αποδείξετε ότι  $f(x) < f(2009x) < f(2^{11}x)$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$
- β. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2009x)}{f(x)}$

132. Να βρεθεί το:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 5x^3 \eta\mu \left( \frac{2}{x} \right) + x^2 + x \right) \left( \sqrt[3]{x^3 + 1} - x \right) \right]$

133. Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right) \right]$

134. Να βρεθεί, εφ' όσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{2 + \eta\mu x}{6 + \sigma\upsilon\nu x}}{x}$

135. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + f(x) = x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Έπειτα να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  και να βρείτε το  $f(\mathbb{R})$

136. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $f^3(x) + 3f(x) = 3x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να υπολογιστεί το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x)$

137. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα  $(0, +\infty)$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$  να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2012x)}{f(x)}$

138. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( a\sqrt{x^2 + 1} + \beta\sqrt{x^2 + 2} + \gamma\sqrt{x^2 + 3} \right)$  αν  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $a + \beta + \gamma = 0$

139. Να υπολογισθούν :

α.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$

β.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$