

Συνέχεια Συνάρτησης

Συνέχεια σε σημείο

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται **συνεχής σε ένα σημείο** $x_0 \in A$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Παρατηρήσεις

1. Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι, σε σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Δηλαδή η συνέχεια έχει νόημα μόνο σε σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ενώ το όριο έχει νόημα και σε σημεία που δεν ανήκουν σε αυτό.
2. Η έκφραση «η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 », σημαίνει ότι:

α. $x_0 \in A$

β. Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

δ. $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3. Μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής** στο $x_0 \in A$ **όταν**:

- δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

4. Υπάρχουν συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα και δεν είναι πουθενά συνεχή.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ η οποία δεν είναι

συνεχής σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της, που είναι όλο το $\mathbb{R}$

5. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

α. Μια συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

β. Μια συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

(γιατί;)

- γ.** Μια συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$
(γιατί;)
- δ.** Μια συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \lambda h) = f(x_0)$
όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (γιατί;)
- ε.** Μια συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν: $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0)$
(γιατί;)

Συνέχεια σε Σύνολο

- Μια συνάρτηση f καλείται **συνεχής στο ανοικτό διάστημα** (a, β) αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .
- Μια συνάρτηση f καλείται **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[a, \beta]$ αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον ισχύουν ότι $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, ενώ $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.
- Μια συνάρτηση f καλείται συνεχής στο δεξιά ημιάνοικτο διάστημα $[a, \beta)$ αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- Μια συνάρτηση f καλείται συνεχής στο αριστερά ημιάνοικτο διάστημα $(a, \beta]$ αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$, θα καλείται **συνεχής συνάρτηση**.

Παρατηρήσεις

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε το γράφημά της είναι μια συνεχής γραμμή, δηλαδή μια γραμμή χωρίς κενά (τρύπες ή άλματα). Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να σχεδιάσουμε την συνάρτηση f χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι μας από το χαρτί.
2. Αν η συνάρτηση f δεν είναι ορισμένη σε διάστημα αλλά σε ένωση διαστημάτων, το παραπάνω δεν θα ισχύει, π.χ. η $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ η οποία είναι συνεχής, σε όλο το πεδίο ορισμού της, αλλά η γραφική της παράσταση «σπάει» σε δυο κομμάτια.
3. Από τον ορισμό της συνέχειας στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι αν διαμερίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης σε διαστήματα ξένα ανά δυο μεταξύ τους, η f μπορεί να είναι συνεχής σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα, αλλά όχι στο πεδίο ορισμού της.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 1 \\ x+3, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2, \\ x^2+2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο $(1, 2)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+3) = 4 = f(1) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) = 5 = f(2).$$

Άρα στο $[1, 2]$ η f είναι συνεχής.

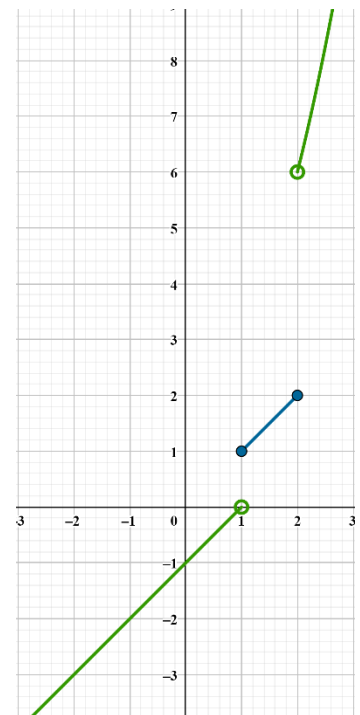
- Στο $(2, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Όμως $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, και

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \neq 6 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ άρα η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x_0 = 1$$

ούτε στο $x_0 = 2$.

4. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 , δεν είναι αναγκαστικά συνεχής και σε μια περιοχή αυτού του σημείου.



Συνέχεια Βασικών Συναρτήσεων

1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$
2. Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, όπου $p(x), q(x)$ πολυώνυμα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \eta\mu x_0$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sigma\upsilon\nu x_0$
5. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a^{x_0}$
6. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a > 0$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \log_a x_0$

Συνέχεια και Πράξεις Συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις:

$$f + g, c \cdot f \text{ με } c \in \mathbb{R}, f \cdot g, \frac{f}{g} \text{ με } g(x_0) \neq 0, |f| \text{ και } \sqrt[n]{f} \text{ με } f(x_0) \geq 0$$

είναι συνεχείς στο x_0 , με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα το οποίο περιέχει το x_0 .

Παρατήρηση

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η συνάρτηση $f + g$ ή $f \cdot g$ ή $\frac{f}{g}$ ή $|f|$ ή $0 \cdot f$ είναι συνεχής στο x_0 , αυτό δεν σημαίνει κατ' ανάγκην ότι και οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 .

$$\text{Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \geq 0 \\ 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Οι f και g **δεν** είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$ **όμως**:

- $(f + g)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0
 - $(f \cdot g)(x) = -1, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0
 - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0
 - $|f(x)| = 1, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0
 - $(0 \cdot f)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0
2. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ είναι συνεχής στο $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \mu\epsilon \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ είναι συνεχής στο $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq \kappa\pi, \mu\epsilon \kappa \in \mathbb{Z}\}$.

Πρόταση (Σύνθεση Συναρτήσεων και Συνέχεια)

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι επίσης συνεχής στο x_0 .

Παρατήρηση

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Δηλαδή αν η $g \circ f$ στο x_0 , δεν έπεται υποχρεωτικά ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$.

Πράγματι αν $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ τότε $(g \circ f)(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ενώ η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $f(1) = 1$.

Πρόταση (Συνέχεια και Μονοτονία)

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, με το ίδιο είδος μονοτονίας, στα διαστήματα $(a, \beta]$ και (β, γ) και συνεχής στο β , τότε θα είναι γνησίως μονότονη και στο διάστημα $\Delta = [a, \gamma) = (a, \beta] \cup (\beta, \gamma)$.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(a, \beta]$ και (β, γ) και συνεχής στο β .

Για να δείξω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, γ) αρκεί να δείξω ότι για οποιοδήποτε $x_1 \in (a, \beta]$ και $x_2 \in (\beta, \gamma)$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$. (Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι φανερό ότι ικανοποιείται ο ορισμός.

Έστω τυχαία $x_1 \in (a, \beta]$ και $x_2 \in (\beta, \gamma)$.

Θεωρούμε τον αριθμό $\lambda \in (\beta, x_2)$.

Τότε:

Είναι $a < x_1 \leq \beta$ άρα $f(x_1) \leq f(\beta)$ γιατί f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, \beta]$

Για κάθε αριθμό $\rho \in (\beta, \lambda)$ είναι $\beta < \rho < \lambda < x_2 < \gamma$ άρα $f(\rho) < f(\lambda) < f(x_2)$ εφόσον f είναι γνησίως αύξουσα στο (β, γ) .

Είναι $f(\rho) < f(\lambda)$ οπότε $\lim_{\rho \rightarrow \beta} f(\rho) \leq \lim_{\rho \rightarrow \beta} f(\lambda)$.

Όμως $\lim_{\rho \rightarrow \beta} f(\rho) = f(\beta)$ αφού f συνεχής στο β και $\lim_{\rho \rightarrow \beta} f(\lambda) = f(\lambda)$ αφού $f(\lambda)$ ανεξάρτητο του ρ .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $f(x_1) \leq f(\beta) \leq f(\lambda) < f(x_2)$.

Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, γ)

Τα Βασικά Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

Θεώρημα Bolzano (Θ. Β)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και επιπλέον ισχύει
- $f(a) f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, είναι συνεχής σε αυτό και επιπλέον ισχύει ότι οι τιμές της $f(a), f(\beta)$ στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες (δηλαδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$), τότε η γραφική της παράσταση θα τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον άξονα $x'x$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Παρατηρήσεις

1. Το Θεώρημα Bolzano ανήκει στην κατηγορία των υπαρκτικών θεωρημάτων, μιας και δεν μας αναφέρει τίποτα για την τιμή της ρίζας, ούτε για το πως να την υπολογίσουμε, ούτε για το πλήθος των ριζών. Μας βοηθάει να διαπιστώσουμε μόνο την ύπαρξή της.
2. Στο Θεώρημα Bolzano η έκφραση «υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ » είναι ισοδύναμη με την «η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β) »
3. Η συνθήκη $f(a) f(\beta) < 0$ είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία για να υπάρχει ρίζα.
4. Το αντίστροφο του Θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει.
Δηλαδή υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$
 - η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, έχει ρίζα στο (a, β) , αλλά $f(a) f(\beta) > 0$

- που έχει ρίζα στο (a, β) , που ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$, αλλά δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

Πράγματι

- αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ στο διάστημα $[-2, 2]$ μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως πολυωνυμική και έχει ρίζα στο $(-2, 2)$ την $x=1$, όμως $f(2)f(-2) = 9 > 0$

- Ακόμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{αν } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 2, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}$

Είναι ορισμένη στο $[-1, 1]$, $f(1)f(-1) = -4 < 0$ έχει ρίζα στο $(-1, 1)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ επομένως ούτε στο $[-1, 1]$.

5. Η συνέχεια στα άκρα του Θεωρήματος Bolzano είναι πολύ σημαντική για το συμπέρασμα.

Πράγματι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x = 0 \\ 2, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}$, αυτή είναι ορισμένη στο

$[0, 1]$, $f(1)f(0) = -2 < 0$ όμως δεν υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ γιατί η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

6. Επίσης απαραίτητο είναι στο θεώρημα και το γινόμενο των τιμών της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος $[a, \beta]$ να είναι αρνητικό, διαφορετικά το συμπέρασμα δεν ισχύει.

Πράγματι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο $[0, 1]$, αυτή είναι συνεχής, ισχύει ότι $f(0)f(1) = e > 0$ αλλά δεν υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Ακόμα αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ στο $[-3, 3]$, αυτή είναι συνεχής στο $[-3, 3]$ και $f(3)f(-3) = 64 > 0$ αλλά $1 \in (-3, 3)$ και $f(1) = 0$.

Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι είναι απαραίτητο $f(a)f(\beta) < 0$.

7. Το Θεώρημα Bolzano μπορεί εύκολα να επεκταθεί – γενικευτεί και για ανοικτά διαστήματα.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (a, β) . Αν:

- η f είναι συνεχής στο (a, β) και επιπλέον
- τα όρια $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ υπάρχουν (ακόμα και αν είναι άπειρα) και είναι ετερόσημα

τότε υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Πράγματι:

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) < 0$ ή $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, οπότε υπάρχει $\kappa \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) < 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) > 0$ ή $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$, οπότε υπάρχει $\lambda \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\lambda) > 0$.

Τότε, στο διάστημα $[\kappa, \lambda] \subseteq (a, \beta)$, ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος

Bolzano και επομένως υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Αντίστοιχα μπορούμε να το γενικεύσουμε (το Θ.Β) και για ημιάνοικτα διαστήματα.

8. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. **Αν:**

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και επιπλέον ισχύει
- $f(a)f(\beta) \leq 0$

τότε υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Πράγματι:

Εφόσον $f(a)f(\beta) \leq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(a)f(\beta) < 0$ τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano και επομένως υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
- Αν $f(a)f(\beta) = 0 \Leftrightarrow (f(a) = 0 \text{ ή } f(\beta) = 0)$ τότε $(x_0 = a \text{ ή } x_0 = \beta)$.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Πρόταση Σταθερό Πρόσημο Συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και επιπλέον ισχύει ότι η f δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ . Δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Πράγματι:

Αν η f είναι συνεχής στο Δ και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε θα υπάρχουν $a, \beta \in \Delta$ τέτοια ώστε $f(a) > 0$ και $f(\beta) < 0$. Τότε στο $[a, \beta]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. **Άτοπο** γιατί έχουμε υποθέσει ότι η f δεν μηδενίζεται στο Δ .

Άρα η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

Η παραπάνω πρόταση είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη, στην εύρεση τύπου συνάρτησης που θα δούμε αναλυτικά στην μεθοδολογία.

Παρατήρηση:

1. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι θα ισχύει :
 - Αν f είναι συνεχής στο Δ , $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και για κάποιο $x_0 \in \Delta$ το $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
 - Αν f είναι συνεχής στο Δ , $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και για κάποιο $x_0 \in \Delta$ το $f(x_0) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$
2. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Δηλαδή αν ρ_1, ρ_2 δυο διαδοχικές ρίζες της συνεχούς συνάρτησης f , τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες.

Πράγματι,

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και ρ_1, ρ_2 δυο διαδοχικές ρίζες της, τότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$. Από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (ρ_1, ρ_2) .

Επιπλέον αν το διάστημα είναι της μορφής $(-\infty, \rho_1)$ ή $(\rho_1, +\infty)$ ισχύει αντίστοιχο επιχείρημα (να το αναφέρετε).

3. Για το παραπάνω είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι για να προσδιορίσουμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης επακριβώς για κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της, αυτή θα πρέπει να έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών ή να μην έχει ρίζες.

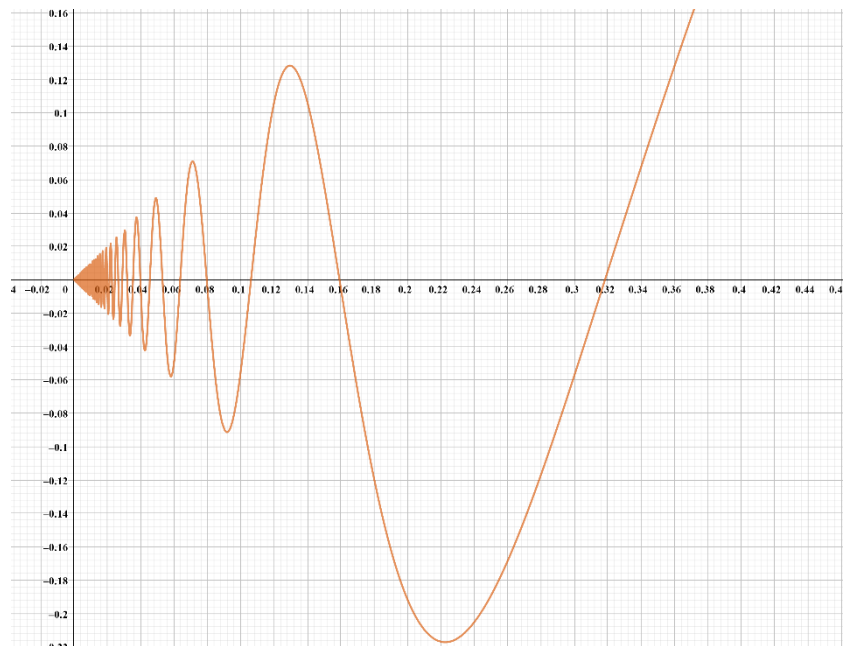
Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \eta \mu \frac{1}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0,1]$ (γιατί;).

Ακόμα στο $[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ \left(x = 0 \text{ ή } x \eta \mu \frac{1}{x} = 0 \right) &\Leftrightarrow \\ \left(x = 0 \text{ ή } \eta \mu \frac{1}{x} = 0 \right) &\Leftrightarrow \\ \left(x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}^* \right) \end{aligned}$$



Επομένως εφόσον έχουμε άπειρο αριθμό ριζών, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε επακριβώς όλα τα διαστήματα του $[0,1]$ στα οποία η συνάρτηση διατηρεί πρόσημο.

4. Ασφαλώς η παραπάνω πρόταση ισχύει μόνο για συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Παρατήρηση:

Η παραπάνω πρόταση είναι εξαιρετικά σημαντική, εφόσον μας επιτρέπει να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f , αρκεί να μπορέσουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να επιλέξουμε έναν τυχαίο αριθμό x_0 από κάθε διάστημα που χωρίζουν οι ρίζες το πεδίο ορισμού της. Το πρόσημο του $f(x_0)$ θα είναι και το πρόσημο της συνάρτησης στο συγκεκριμένο διάστημα.

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και επιπλέον ισχύει

- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η που βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Γεωμετρική Ερμηνεία

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, είναι συνεχής σε αυτό και επιπλέον ισχύει ότι οι τιμές της $f(a), f(\beta)$ στα άκρα του διαστήματος είναι διαφορετικές, τότε για κάθε η που βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y = \eta$ θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο που θα ανήκει στο διάστημα (a, β) .

Παρατηρήσεις

1. Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών ανήκει στην κατηγορία των υπαρκτικών θεωρημάτων.
2. Στο Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η έκφραση «υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$ » είναι ισοδύναμη με την «η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β) »
3. Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε δεν είναι υποχρεωτικό να παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 3]$ (γιατί;) και

κανέναν $\eta \in (f(0), f(3)) = (0, 1)$ δεν είναι τιμή της f .

4. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(a) \neq f(\beta)$, παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές, τότε αυτή δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } 1 \leq x \leq 3 \\ x+1, & \text{αν } 3 < x \leq 5 \end{cases}$ που ορίζεται στο $A = [1, 5]$

Το Σύνολο Τιμών της είναι το $f(A) = f([1, 3]) \cup f((3, 5]) = [3, 5] \cup (4, 6] = [3, 6]$.

Η συνάρτηση παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στο $f(1)$ και $f(5)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ (γιατί;).

5. Το Θεώρημα Bolzano μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του Θ.Ε.Τ όπου η ενδιάμεση τιμή των $f(a)$ και $f(b)$ είναι $\eta = 0$.

Στην πραγματικότητα τα δυο Θεωρήματα είναι ισοδύναμα, μιας και το κάθε ένα από αυτά μπορεί να αποδειχτεί από το άλλο. Στο σχολικό βιβλίο υπάρχει η απόδειξη του Θ.Ε.Τ από το Θεώρημα Bolzano. Για λόγους πληρότητας ας αναφέρουμε και την απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) \cdot f(b) < 0$. Τότε $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$. Σε κάθε περίπτωση από το Θ.Ε.Τ υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Άμεσο συμπέρασμα από το Θ.Ε.Τ είναι ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Ερώτηση: Υπάρχει συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$, όπου A είναι διάστημα;

Απάντηση

Όχι, γιατί το $f(A) = \mathbb{Q}$ δεν είναι διάστημα.

Προσοχή:

Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή (άρα και συνεχής) στο διάστημα Δ τότε το $f(\Delta)$ είναι μονοσύνολο και όχι διάστημα.

Προσοχή:

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και «1-1», τότε είναι και γνησίως μονότονη

Απόδειξη 1 (απαγωγή σε άτοπο)

Θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ συνεχή και «1-1», η οποία όμως δεν είναι γνησίως μονότονη.

Άρα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) θα υπάρχουν $x_0, x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_0 < x_1 < x_2$ ώστε $f(x_0) < f(x_1)$ και $f(x_2) < f(x_1)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$ τότε για το $\eta = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$ παρατηρώ ότι $\eta \in (f(x_0), f(x_1))$ και $\eta \in (f(x_2), f(x_1))$.

Επομένως εφαρμόζοντας το Θ.Ε.Τ στα διαστήματα $[x_0, x_1]$ και $[x_1, x_2]$ αντίστοιχα θα έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x_0, x_1)$ και $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοια ώστε $f(\xi_1) = \eta$ και $f(\xi_2) = \eta$. Άρα εφόσον η f είναι «1-1» θα έχουμε $\xi_1 = \xi_2$.

Άτοπο γιατί $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$

- Αν $f(x_0) < f(x_2) < f(x_1)$ τότε για το $\eta = \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2}$ παρατηρώ ότι $\eta \in (f(x_2), f(x_1))$ και $\eta \in (f(x_0), f(x_1))$.

Επομένως εφαρμόζοντας το Θ.Ε.Τ στα διαστήματα $[x_0, x_1]$ και $[x_1, x_2]$ αντίστοιχα θα έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x_0, x_1)$ και $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοια ώστε $f(\xi_1) = \eta$ και $f(\xi_2) = \eta$. Άρα εφόσον η f είναι «1-1» θα έχουμε $\xi_1 = \xi_2$.

Άτοπο γιατί $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$

- Η περίπτωση $f(x_0) = f(x_2) = f(x_1)$ απορρίπτεται εφόσον η f είναι «1-1».

Άρα η συνάρτηση f θα είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ .

Απόδειξη 2 (ευθεία απόδειξη)

Έστω δυο αριθμοί $a, \beta \in \Delta$ με $a < \beta$. Εφόσον η συνάρτηση είναι «1-1» στο Δ θα είναι $f(a) \neq f(\beta)$

Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(a) < f(\beta)$.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Θεωρούμε την συνάρτηση $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(t) = f((1-t)a + tx_1) - f((1-t)\beta + tx_2)$, όπου $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

Τα $(1-t)a + tx_1$ και $(1-t)\beta + tx_2$ είναι στοιχεία του Δ άρα η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη (γιατί!).

Παρατηρούμε ότι

η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων

για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει ότι $(1-t)a + tx_1 < (1-t)\beta + tx_2$ γιατί:

$$\left. \begin{array}{l} t \geq 0 \\ 1-t \geq 0 \\ a < \beta \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (1-t)a < (1-t)\beta \\ tx_1 < tx_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} (1-t)a + tx_1 < (1-t)\beta + tx_2,$$

$$\text{Άρα: } (1-t)a + tx_1 \neq (1-t)\beta + tx_2 \stackrel{f \text{ είναι "1-1"}}{\Leftrightarrow} f((1-t)a + tx_1) \neq f((1-t)\beta + tx_2) \Leftrightarrow g(t) \neq 0$$

Άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $[0,1]$.

Όμως για $t=0$ έχουμε $g(0) = f(a) - f(\beta) < 0$, άρα $g(t) < 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω για $t=1$ έχουμε: $g(1) < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (Θ. Μ. Ε. Τ)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Παρατηρήσεις

1. Το Θ.Μ.Ε.Τ και το Θ.Ε.Τ προκύπτει ότι αν $\Delta = [a, \beta]$ και η f είναι μια **συνεχής και μη σταθερή** συνάρτηση, τότε $f(\Delta) = [m, M]$

Πράγματι

- Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$ με $y_0 \notin [m, M]$.
Αυτό σημαίνει είτε ότι το m δεν είναι η ελάχιστη τιμή (αν $y_0 < m$), είτε το M δεν είναι η μέγιστη τιμή (αν $y_0 > M$). Άποπο άρα για κάθε $x \in [a, \beta]$ θα ισχύει $f(x) = y_0 \in [m, M]$.
- Εφόσον το M είναι η μέγιστη τιμή και m η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο $[a, \beta]$ θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε, $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας θεωρήσουμε $x_1 < x_2$. Έστω $y_0 \in (m, M)$.
Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [a, \beta]$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$ και $y_0 \in (f(x_1), f(x_2))$.

Οπότε από το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$.

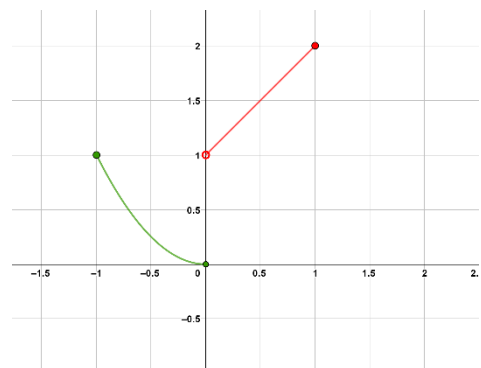
2. Αν $m = M$ τότε η συνάρτηση f θα είναι η σταθερή συνάρτηση
3. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα και λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό, δεν σημαίνει κατ' ανάγκην ότι η συνάρτηση θα είναι συνεχής στο διάστημα αυτό ούτε αν μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα, λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό, δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι το διάστημα θα είναι κλειστό.

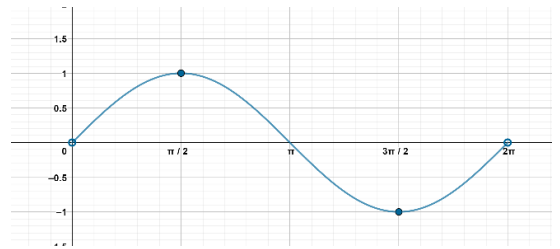
Για παράδειγμα

- η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ x+1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ είναι

ορισμένη στο $[-1, 1]$, λαμβάνει μέγιστη τιμή για $x_1 = 1$ ίση με $f(1) = 1$ και λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x_2 = 0$ ίση με $f(0) = 0$ όμως δεν είναι συνεχής στο 0 , άρα δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.



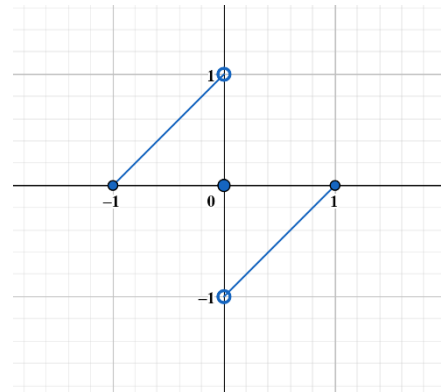
- η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0, 2\pi)$ και λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.



4. Είναι πολύ σημαντικό και σε αυτό το Θεώρημα να αναδείξουμε την σημασία των προϋποθέσεων που θέτει για να ισχύει. Δηλαδή ότι έστω και μια από αυτές να μην συμβαίνει τότε το συμπέρασμα δεν θα ισχύει.

Αρχικάας δούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x-1, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}$$

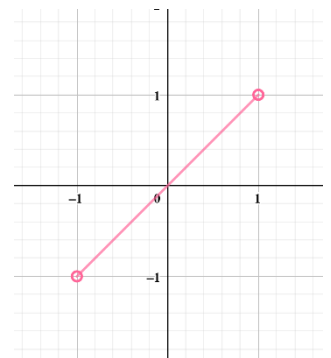


Η f ορίζεται στο $[-1, 1]$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

και έχει για Σύνολο Τιμών το $f([-1, 1]) = (-1, 1)$ το οποίο δεν έχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

Άρα η συνέχεια της συνάρτησης είναι απαραίτητη.

Ακόμα η συνάρτηση $f(x) = x$ με $x \in (-1, 1)$, είναι συνεχής και έχει για Σύνολο Τιμών το $f((-1, 1)) = (-1, 1)$ το οποίο δεν έχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο. Άρα είναι απαραίτητο η συνάρτηση να ορίζεται σε ανοικτό διάστημα.

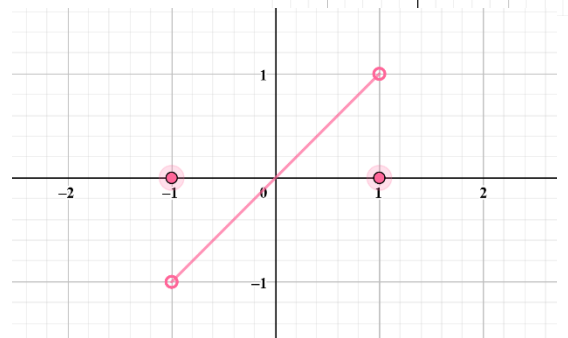


Στο (2) έχουμε ήδη δείξει την σημασία η συνάρτηση να μην είναι σταθερή.

Τέλοςας δούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{αν } x = -1 \text{ ή } x = 1 \end{cases}, \text{ η οποία ορίζεται στο}$$

$[-1, 1]$, είναι συνεχής στο $(-1, 1)$, ασυνεχής για $x = -1$ και $x = 1$, αλλά δεν έχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο εφόσον έχει για Σύνολο Τιμών το $f([-1, 1]) = (-1, 1)$.



Σύνολο Τιμών Συνεχούς Συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο ανοικτό διάστημα $\Delta = (a, \beta)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $f(\Delta) = (A, B)$, ενώ αν f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta = (a, \beta)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $f(\Delta) = (B, A)$, όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

Παρατηρήσεις

Ανάλογα συμπεράσματα με το παραπάνω μπορούμε να έχουμε και αν f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[a, \beta]$, $(a, \beta]$, $[a, \beta)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$ και $[a, +\infty)$. Αυτά μπορούμε να τα συνοψίσουμε στον παρακάτω πίνακα:

Διάστημα Δ	Μονοτονία της f	$f(\Delta)$
$[a, \beta]$	γν. αυξ.	$[f(a), f(\beta)]$
$[a, \beta]$	γν. φθιν	$[f(\beta), f(a)]$
$(a, \beta]$	γν. αυξ.	$(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(\beta)]$
$(a, \beta]$	γν. φθιν	$[f(\beta), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x))$
$[a, \beta)$	γν. αυξ.	$[f(a), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$
$[a, \beta)$	γν. φθιν	$(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(a)]$
$(-\infty, a)$	γν. αυξ.	$(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x))$
$(-\infty, a)$	γν. φθιν	$(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x))$
$(-\infty, a]$	γν. αυξ.	$(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)]$
$(-\infty, a]$	γν. φθιν	$[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x))$
$(a, +\infty)$	γν. αυξ.	$(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

$(a, +\infty)$	γν. φθιν	$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$
$[a, +\infty)$	γν. αυξ.	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$
$[a, +\infty)$	γν. φθιν	$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (a, β) και τα όρια στα άκρα είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - y_0$ με $x \in (a, \beta)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} g(x) = +\infty$, οπότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε $g(\kappa) < 0$ και $g(\lambda) > 0$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ και $g(\kappa)g(\lambda) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $x_0 \in (\kappa, \lambda) \subseteq (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Δηλαδή θα υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$.

Συνέχεια και Αντιστρεψιμότητα

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και «1-1» σε ένα σύνολο A τότε η f^{-1} είναι απαραίτητα συνεχής στο $f(A)$;

Όχι!

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{αν } x \in (2, 3) \\ x-3, & \text{αν } x \in [4, 5) \end{cases}$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο σύνολο A με $f(A) = (0, 2)$ και

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x \in (0, 1) \\ x+3, & \text{αν } x \in [1, 2) \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο A αλλά η f^{-1} δεν είναι συνεχής στο $f(A)$, εφόσον δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Όμως **ισχύει** η παρακάτω **πρόταση**:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.

Αυτή η πρόταση δεν έχει απόδειξη στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου και επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, στις εξετάσεις από τους μαθητές, όμως για λόγους πληρότητας την αναφέρουμε.

Απόδειξη (Spivak)

Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, αφού για την άλλη περίπτωση δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε το γνωστό τέχνασμα με την $-f$. Μπορούμε επίσης κάλλιστα να υποθέσουμε ότι το διάστημά μας είναι ανοικτό, αφού, όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, μια συνεχής αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση σε κάποιο διάστημα μπορεί να επεκταθεί σε μια όμοια συνάρτηση ορισμένη σε ένα μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα.

Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \beta} f^{-1}(x) = f^{-1}(\beta)$ για κάθε $\beta \in f(\Delta)$.

Κάθε τέτοιος αριθμός β είναι της μορφής $f(a)$ για κάποιον $a \in \Delta$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$, θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x ,

$$\text{αν } f(a) - \delta < x < f(a) + \delta \text{ τότε } a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon$$

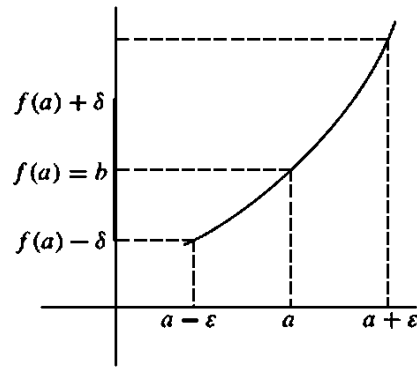
Το διπλανό σχήμα, μας καθοδηγεί στην εύρεση του δ αφού

$$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon \Rightarrow f(a - \varepsilon) < f(a) < f(a + \varepsilon)$$

παιρνουμε ως δ το μικρότερο από τους $f(a + \varepsilon) - f(a)$ και $f(a) - f(a - \varepsilon)$.

Η επιλογή του δ μας εξασφαλίζει ότι:

$$f(a - \varepsilon) \leq f(a) - \delta \text{ και } f(a) + \delta \leq f(a + \varepsilon).$$



Επομένως αν

$$f(a) - \delta < x < f(a) + \delta \text{ τότε } f(a - \varepsilon) < x < f(a + \varepsilon).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και η f^{-1} είναι επίσης αύξουσα και παίρνουμε

$$f^{-1}(f(a - \varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a + \varepsilon))$$

δηλαδή

$$a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon$$

που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε.

Σχόλιο:

Ασφαλώς τοπολογικά ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Αν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση και I είναι διάστημα, τότε η $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής!