

Μεθοδολογία στην Συνέχεια Συναρτήσεων

Όλες οι ασκήσεις που αναφέρονται στην συνέχεια, εμπεριέχουν και την έννοια του ορίου και επομένως είναι λογικό τα όρια και οι ιδιότητές τους να είναι απολύτως απαραίτητα για την επίλυση ασκήσεων. Μερικοί βασικοί τύποι ασκήσεων που μπορούμε να συναντήσουμε είναι και η παρακάτω.

Μέθοδος 1: Μελέτη Συνέχειας

Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, ως προς την συνέχεια της, εργαζόμαστε ως εξής; Ελέγχουμε αν στα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της, που όμως δεν περιέχουν τα σημεία αλλαγής, αν η συνάρτηση είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Ελέγχουμε ξεχωριστά τα σημεία στα οποία η συνάρτηση αλλάζει τύπο με την βοήθεια του ορισμού.

Παράδειγμα 1: Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1}, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f για κάθε $x < 1$ είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση.

Επίσης η συνάρτηση f για κάθε $x > 1$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, της σύνθετης $\eta\mu(x-1)$ που αποτελείται από τις $\eta\mu x$ και την πολυωνυμική $x-1$, και της πολυωνυμικής $x-1$.

Αρκεί επομένως να μελετήσω την συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ που αλλάζει τύπο η συνάρτηση.

Έτσι έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x^2+1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \stackrel{\Theta \acute{\epsilon} \tau \omega \ x-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow u_0=0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$
- $f(1) = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

Όταν ελέγχουμε ως προς την συνέχεια, συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in \Delta_1 \\ y_0 & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$, χρήσιμο είναι να θυμόμαστε ότι αυτές δεν είναι πολλαπλού τύπου. Επομένως δεν χρειάζεται να ψάξω για πλευρικά όρια.

Παράδειγμα 2: Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 4, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως ρητή.

Θα μελετήσουμε την συνέχεια στο $x_0 = 1$.

Παρατηρούμε ότι: $f(1) = 4$

$$\text{Ακόμα: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Παράδειγμα 3: Έστω οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η g ασυνεχής για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $h(x) = e^x g(x) - (1+x^2)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και επομένως σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τότε θα ισχύει:

$$h(x) = e^x g(x) - (1+x^2)f(x) \Leftrightarrow$$

$$e^x g(x) = h(x) - (1+x^2)f(x) \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{h(x) - (1+x^2)f(x)}{e^x}$$

Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $(1+x^2)f(x)$ είναι συνεχής ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $1+x^2$ (πολυωνυμική) και της f (από υπόθεση).

Ακόμα η συνάρτηση $h(x) - (1+x^2)f(x)$ είναι συνεχής ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων h (από υπόθεση) και $(1+x^2)f(x)$ (το δείξαμε πριν).

Άρα και η συνάρτηση $g(x) = \frac{h(x) - (1+x^2)f(x)}{e^x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (επομένως και στο x_0) ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $h(x) - (1+x^2)f(x)$ (το δείξαμε πριν) και της e^x (εκθετική).

Άτοπο γιατί η g είναι ασυνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής στο x_0 .

Μέθοδος 2: Προσδιορισμός Παραμέτρων

Όταν μας δίνεται μια συνάρτηση f η οποία περιέχει παραμέτρους και ζητείται η εύρεσή τους ώστε αυτή να είναι συνεχής, τότε εντοπίζουμε τα σημεία που αλλάζει τύπο η συνάρτηση, καθώς και εκείνα στα οποία δίνεται μια συγκεκριμένη τιμή. Έπειτα χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο. Δηλαδή

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ οπότε απαιτούμε:

α. να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β. τα πλευρικά όρια να είναι ίσα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

γ. και τέλος $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Από τις παραπάνω συνθήκες θα προκύπτει κατάλληλο σύστημα έτσι ώστε με την επίλυσή του να καταλήξουμε στις τιμές των παραμέτρων που ζητάμε.

Σημαντικό είναι να θυμόμαστε ότι πολλές φορές θα χρειαστεί να επαληθεύσουμε τις τιμές των μεταβλητών που βρήκαμε.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 + \frac{\eta\mu(ax)}{\eta\mu 2x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

να είναι συνεχής.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως σύνθεση της πολυωνυμικής $x^2 + a^2$ και της $\sqrt{x}$.

Ακόμα η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, της σταθερής 1 και του πηλίκου των σύνθετων και συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu(ax)$, που αποτελείται από την $\eta\mu x$ και την ax και $\eta\mu 2x$ που αποτελείται από την $\eta\mu x$ και την $2x$.

Επομένως για να είναι συνεχής η συνάρτηση f 'στο $\mathbb{R}$ αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι για $a = 0$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2}, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 + \frac{\eta\mu(0 \cdot x)}{\eta\mu 2x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} |x|, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

η οποία δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ εφόσον $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Έτσι για $a \neq 0$ ισχύει ότι:

- $f(0) = \sqrt{0^2 + a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{0 + a^2} = |a|$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{\eta\mu(ax)}{\eta\mu 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{\eta\mu(ax)}{\eta\mu 2x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{\frac{\eta\mu(ax)}{ax}}{\frac{\eta\mu 2x}{2ax}} \right] = \ell$

Έχουμε:

$$\text{για το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu(ax)}{2ax} \stackrel{\text{θέτω } ax=u}{=} \lim_{u \rightarrow u_0=0} \frac{\eta\mu u}{2u} = 2$$

$$\text{για το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2ax} \stackrel{\text{θέτω } u=2x}{=} \lim_{u \rightarrow u_0=0} \frac{\eta\mu u}{au} = \frac{1}{a}$$

$$\text{Άρα } \ell = 1 + \frac{2}{\frac{1}{a}} = 1 + \frac{a}{2} = \frac{2+a}{2}$$

Έτσι για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$ αρκεί και πρόκειται

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{2+a}{2} = |a| \Leftrightarrow$$

$$\left(\left(\frac{2+a}{2} \right)^2 = |a|^2 \text{ και } \frac{2+a}{2} \geq 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a^2 + 4a + 4}{4} = a^2 \text{ και } 2+a \geq 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$(a^2 + 4a + 4 = 4a^2 \text{ και } a \geq -2) \Leftrightarrow$$

$$(3a^2 - 4a - 4 = 0 \text{ και } a \geq -2) \Leftrightarrow$$

$$\left(a = 2 \text{ ή } a = -\frac{2}{3} \text{ και } a \geq -2 \right) \Leftrightarrow$$

$$a = 2 \text{ ή } a = -\frac{2}{3}$$

Προσοχή: Έχουμε εργαστεί καθ' όλη την διάρκεια της επίλυσης της εξίσωσης με ισοδυναμίες και για αυτό δεν χρειάζεται να επαληθεύσουμε τις λύσεις που βρήκαμε.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + ax + \beta}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2a & \text{αν } x = 1 \end{cases}$. Να υπολογιστούν οι τιμές των

$a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η αυτή να είναι συνεχής.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως ρητή.

Επομένως για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

$$\text{Άρα πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad (1)$$

$$\text{Όμως } f(1) = 2a.$$

$$\text{Άρα πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2a$$

$$\text{Για } x \neq 1 \text{ ισχύει ότι } f(x) = \frac{x^3 + ax + \beta}{x-1} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2a.$$

Επομένως για κάθε $x \neq 1$ θα έχω ότι:

$$f(x) = \frac{x^3 + ax + \beta}{x-1} \Rightarrow (x-1)f(x) = x^3 + ax + \beta \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax + \beta) \Rightarrow$$

$$0 \cdot 2a = 1 + a + \beta \Rightarrow a + \beta = -1 \Rightarrow a = -\beta - 1 \quad (2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + \beta}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + (-\beta-1)x + \beta}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \beta x - x + \beta}{x-1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2-1) - \beta(x-1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1) - \beta(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x(x+1) - \beta]}{x-1} = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [x(x+1) - \beta] = 2 - \beta$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2a \Leftrightarrow 2 - \beta = 2a \Leftrightarrow 2a + \beta = 2 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) έχω:

$$\left. \begin{array}{l} a + \beta = -1 \\ 2a + \beta = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{(-1)} \\ \xLeftrightarrow{(-1)} \end{array} \left. \begin{array}{l} a + \beta = -1 \\ -2a - \beta = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{(+)} \\ \xLeftrightarrow{(-)} \end{array} \left. \begin{array}{l} -a = -3 \\ -2a - \beta = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{(-)} \\ \xLeftrightarrow{(-)} \end{array} \left. \begin{array}{l} a = 3 \\ -6 - \beta = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{(-)} \\ \xLeftrightarrow{(-)} \end{array} \left. \begin{array}{l} a = 3 \\ \beta = -4 \end{array} \right\}$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι $a = 3$ και $\beta = -4$ οι οποίες χρειάζονται επαλήθευση μιας και δεν έχουμε εργαστεί σε όλη την διαδικασία με ισοδυναμίες.

Για τις τιμές αυτές η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x - 4}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 6 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Παρατηρώ ότι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 4)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 4) = 6 = f(1).$$

Άρα πράγματι η συνάρτηση για $a = 3$ και $\beta = -4$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και αυτές οι τιμές είναι δεκτές.

Μέθοδος 3: Συνέχεια και Βοηθητική Συνάρτηση

Παράδειγμα 1: Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) - \eta\mu x}{x^2 + 3x} = 2$.

Να υπολογίσετε το $f(0)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x \cdot f(x) - \eta\mu x}{x^2 + 3x} \text{ με } x^2 + 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq -3) \text{ και για την οποία ισχύει}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2.$$

Για κάθε $x \neq \{0, -3\}$ ισχύει:

$$g(x) = \frac{x \cdot f(x) - \eta\mu x}{x^2 + 3x} \Leftrightarrow x \cdot f(x) - \eta\mu x = (x^2 + 3x)g(x) \Leftrightarrow x \cdot f(x) = (x^2 + 3x)g(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3x)g(x) + \eta\mu x}{x}$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ οπότε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 3x)g(x) + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(x^2 + 3x)g(x)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(x+3)g(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

Άρα $f(0) = 7$

Παράδειγμα 2: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $f(x_0) = a$.

Λύση

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - a}{x - x_0}$ με $x \neq x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ τότε για κάθε $x \neq x_0$ θα

ισχύει $f(x) = g(x)(x - x_0) + a$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 θα ισχύει :

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)(x - x_0) + a] = \ell \cdot 0 + a = a$$

Προσοχή: Η συγκεκριμένη άσκηση – εφαρμογή, θα πρέπει όποτε χρησιμοποιείται να αποδεικνύεται μιας και δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο.

Μέθοδος 4: Προσδιορισμός Τιμής και Τύπου

Από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A_f$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Έτσι :

- αν μας ζητείται να βρεθεί το $f(x_0)$ τότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- αν μας δίνεται ανισοτική σχέση (από τα δεδομένα) υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης και έτσι βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και επομένως και το $f(x_0)$.

Παράδειγμα 1: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $x \cdot f(x) = x^2 + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α. το $f(0)$

β. τον τύπο της f

Λύση

α. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $x \cdot f(x) = x^2 + \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + \eta\mu x}{x}$.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $x_0 = 0$ και είναι συνεχής σε αυτό, επομένως θα ισχύει ότι:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 + 1 = 1.$$

β. Ο τύπος της συνάρτησης θα είναι τελικά:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \eta\mu x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2: Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\eta\mu x \cdot f(x) \leq x(e^x - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

Λύση

Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ είναι το σημείο $(0, f(0))$.

Άρα αρκεί να υπολογίσω την τιμή $f(0)$.

Για κάθε $x < 0$ και κοντά στο 0 π.χ. για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ισχύει ότι $\eta\mu x < 0$ (γιατί;) και επομένως:

$$\eta\mu x \cdot f(x) \leq x(e^x - 1) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{x(e^x - 1)}{\eta\mu x}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(e^x - 1)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x(e^x - 1)}{\eta\mu x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

Επιπλέον για κάθε $x > 0$ και κοντά στο 0 π.χ. για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\eta\mu x > 0$ (γιατί;) και επομένως:

$$\eta\mu x \cdot f(x) \leq x(e^x - 1) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x(e^x - 1)}{\eta\mu x}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(e^x - 1)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x(e^x - 1)}{\eta\mu x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, επομένως υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ και επομένως $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq 0$.

Τελικά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Άρα αποδείξαμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ στην αρχή των αξόνων.

Μέθοδος 5: Κριτήριο Παρεμβολής

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

α. $f(0) = -2$

β. $|f(x) + 2| \leq 2\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Λύση

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f^2(x) + 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0$.

Άρα θα ισχύει και για $x = 0$ οπότε η σχέση θα γράφεται:

$$f^2(0) + 4f(0) + 4\sin^2 0 \leq 0 \Leftrightarrow f^2(0) + 4f(0) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) + 2)^2 \leq 0$$

$$\text{Έτσι } 0 \leq (f(0) + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = -2$$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$f^2(x) + 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 4f(x) + 4 + 4\sin^2 x \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 4f(x) + 4 \leq 4 - 4\sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + 2)^2 \leq 4(1 - \sin^2 x) \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + 2)^2 \leq 4\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(f(x) + 2)^2} \leq \sqrt{(2\eta\mu x)^2} \Leftrightarrow$$

$$|f(x) + 2| \leq |2\eta\mu x| \Leftrightarrow$$

$$|f(x) + 2| \leq 2|\eta\mu x|$$

γ. Για να δείξω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αρκεί να δείξω ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -2$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) + 2| \leq 2|\eta\mu x| \Leftrightarrow -2|\eta\mu x| \leq f(x) + 2 \leq 2|\eta\mu x| \Leftrightarrow -2|\eta\mu x| - 2 \leq f(x) \leq 2|\eta\mu x| - 2$$

Παρατηρώ ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} [-2|\eta\mu x| - 2] = -2 \cdot 0 - 2 = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [2|\eta\mu x| - 2] = 2 \cdot 0 - 2 = -2$

Από το Κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$.

Άρα πράγματι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μέθοδος 6: Συναρτησιακές Σχέσεις – Θεωρητικές Ασκήσεις

Παράδειγμα 1: Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x-y) = f(x) + f(y) - 3xy$

(1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Για να δείξω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξω ότι είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ θα έχω $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ άρα και για $x = y = 0$ οπότε γράφεται:

$$f(0-0) = f(0) + f(0) - 3 \cdot 0 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Για το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ισχύει:

$$\text{Θέτω } x = x_0 - u \Leftrightarrow u = x_0 - x \text{ με } u \rightarrow u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x_0 - x) = 0.$$

Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(x_0 - u) = \lim_{u \rightarrow 0} [f(x_0) + f(u) - 3x_0 u] = f(x_0) + f(0) = f(x_0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2: Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για να αποδείξω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αρκεί να δείξω ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Αρχικά θα υπολογίσω το $f(0)$.

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x = 0$ και γράφεται:

$$f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ εφόσον } f^2(0) + 1 \neq 0.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{f^2(x) + 1}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x)| = \left| \frac{x}{f^2(x) + 1} \right| = \frac{|x|}{|f^2(x) + 1|} \leq |x|$

Εδώ χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι:

$$f^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x) + 1} \leq \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x) + 1} \leq 1$$

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$

Παρατηρούμε $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$ και επομένως από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε στην συγκεκριμένη άσκηση κάτι πολύ ισχυρότερο.

Ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι,

αρκεί να δείξω ότι για το τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x = x_0$ και γράφεται: $f^3(x_0) + f(x_0) = x_0$ (2).

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)) + f(x) - f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1) = x - x_0 \Leftrightarrow (*)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} \right| = \frac{|x - x_0|}{|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1|} \leq |x - x_0|$$

$$\text{Άρα } |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq f(x) \leq |x - x_0|$$

Παρατηρούμε $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = \lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0$ και επομένως από το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ και επομένως είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Προσοχή: Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 \geq 1$$

Πράγματι για να δείξω την παραπάνω σχέση

$$\text{αρκεί να δείξω ότι } f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) \geq 0$$

$$\text{αρκεί να δείξω ότι } 2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) \geq 0$$

$$\text{αρκεί να δείξω ότι } f^2(x) + f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + f^2(x_0) \geq 0$$

αρκεί να δείξω ότι $f^2(x) + (f(x) + f(x_0))^2 + f^2(x_0) \geq 0$ που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε αν αντιμετωπίζαμε την παράσταση

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 \text{ σαν ένα τριώνυμο είτε του } f(x) \text{ είτε του } f(x_0).$$

Πράγματι αν την θεωρήσω τριώνυμο του $f(x)$, θα την γράψω στην μορφή

$$f^2(x) + f(x_0)f(x) + f^2(x_0) + 1, \text{ όπου } a = 1, \beta = f(x_0) \text{ και } \gamma = f^2(x_0) + 1.$$

Η Διακρίνουσα του τριωνύμου θα δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = f^2(x_0) - 4(f^2(x_0) + 1) = f^2(x_0) - 4f^2(x_0) - 4 = -3f^2(x_0) - 4 < 0$$

Άρα το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του $a > 0$ και επομένως

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία Στα Θεωρήματα της Συνέχειας

Θεώρημα Bolzano

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, β) , ή ότι υπάρχει κάποιο $x_0 \in (a, \beta)$ που ικανοποιεί μια σχέση τότε:

- α.** Απαλείφουμε τους παρανομαστές (αν υπάρχουν)
- β.** Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α μέλος.
- γ.** Θεωρούμε το α μέλος ως συνάρτηση για την οποία ελέγχουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano.

Παράδειγμα 1:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln \sqrt{x} + x^2 \ln x = 2$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Λύση

Η εξίσωση $x \ln \sqrt{x} + x^2 \ln x = 2$ ισοδύναμα γράφεται:

$$x \ln \sqrt{x} + x^2 \ln x - 2 = 0$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = x \ln \sqrt{x} + x^2 \ln x - 2$ με $x \in [1, e]$.

Αρκεί να δείξω ότι η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.

Παρατηρώ ότι:

- η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $f(1) = 1 \cdot \ln \sqrt{1} + 1^2 \cdot \ln 1 - 2 = -2 < 0$
- $f(e) = e \ln \sqrt{e} + e^2 \ln e - 2 = \frac{e}{2} + e^2 - 2 > 0$

Άρα ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ και $f(1)f(e) < 0$, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του

Θεωρήματος Bolzano και επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.

Παράδειγμα 2:

Έστω η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(a) + f(\beta) = a + \beta$ με

$$f(a) \neq \beta. \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (a, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } \frac{f(x_0) - \beta}{x_0 - a} = \frac{f(x_0) - a}{x_0 - \beta}.$$

Λύση

Για να δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x_0) - \beta}{x_0 - a} = \frac{f(x_0) - a}{x_0 - \beta}$

αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $(f(x_0) - \beta)(x_0 - \beta) - (f(x_0) - a)(x_0 - a) = 0$.

Έτσι θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = (f(x) - \beta)(x - \beta) - (f(x) - a)(x - a)$, με $x \in [a, \beta]$.

Παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

- $g(a) = (f(a) - \beta)(a - \beta) - (f(a) - a)(a - a) = (f(a) - \beta)(a - \beta)$
- $g(\beta) = (f(\beta) - \beta)(\beta - \beta) - (f(\beta) - a)(\beta - a) = -(f(\beta) - a)(\beta - a) =$
 $= (f(\beta) - a)(a - \beta) = (\beta - f(a))(a - \beta)$

Άρα $g(a)g(\beta) = (f(a) - \beta)(a - \beta)(\beta - f(a))(a - \beta) = -(f(a) - \beta)^2(a - \beta)^2 < 0$.

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(x_0) - \beta)(x_0 - \beta) - (f(x_0) - a)(x_0 - a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - \beta}{x_0 - a} = \frac{f(x_0) - a}{x_0 - \beta}$$

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε κάποιο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$

, τότε:

- α.** Απαλείφουμε τους παρανομαστές (αν υπάρχουν)
- β.** Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α μέλος.
- γ.** Θεωρούμε το α μέλος ως συνάρτηση για την οποία δείχνουμε ότι:

i. είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

ii. $f(a)f(\beta) \leq 0$

iii. διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- αν $f(a)f(\beta) = 0 \Leftrightarrow (f(a) = 0 \text{ ή } f(\beta) = 0)$ τότε η ζητούμενη λύση είναι το $x_0 = a$ ή το $x_0 = \beta$
- αν $f(a)f(\beta) < 0$ τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano

Παράδειγμα 3:

Έστω η συνεχής συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύει ότι $f(a) + f(\beta) = a^2 + \beta^2$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in [a, \beta]$.

Παρατηρώ ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(a) = f(a) - a^2$
- $g(\beta) = f(\beta) - \beta^2 = a^2 - f(a) = -(f(a) - a^2)$

$$\text{Άρα } g(a)g(\beta) = -(f(a) - a^2)^2 \leq 0$$

Εξετάζω τις περιπτώσεις:

- i. Αν $g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) - a^2 = 0 \Leftrightarrow f(a) = a^2$ τότε το ζητούμενο $x_0 = a$
- ii. Αν $g(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = \beta^2$ τότε το ζητούμενο $x_0 = \beta$
- iii. Αν $g(a)g(\beta) < 0$ τότε από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2$.

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μοναδική ρίζα σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε αρχικά εξασφαλίζουμε την ύπαρξη της ρίζας (με Θεώρημα Bolzano) και έπειτα αποδεικνύουμε την μοναδικότητα, είτε δείχνοντας ότι η συνάρτηση που εφαρμόσαμε το Bolzano είναι «1-1» είτε γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα 4:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 2 - x$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση

Η εξίσωση $e^x = 2 - x$ ισοδύναμα γράφεται: $e^x + x - 2 = 0$.

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$ με $x \in [0, 1]$.

Για να δείξω ότι η $e^x = 2 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$ αρκεί να δείξω ότι $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Παρατηρούμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $f(0) = e^0 + 0 - 2 = -1 < 0$
- $f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0)f(1) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Για να δείξω ότι αυτή η ρίζα είναι μοναδική αρκεί να δείξω ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο $[0, 1]$.

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) + (2) \Rightarrow e^{x_1} + x_1 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα «1-1» και η ρίζα που εξασφαλίσαμε με το Θεώρημα Bolzano είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση $e^x = 2 - x$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Αν δεν δίνεται το διάστημα στο οποίο πρέπει να εργαστούμε τότε προσπαθούμε εμείς να το εντοπίσουμε με δοκιμές, φροντίζοντας οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του να είναι ετερόσημες. Το παραπάνω ισχύει και για πλευρικά όρια (στην περίπτωση που το διάστημα που εργαζόμαστε είναι ανοικτό) αλλά ακόμα και καθώς στα άπειρα.

Παράδειγμα 5:

Δείξτε ότι η εξίσωση $2 \ln x + ex = 0$, έχει μοναδική λύση.

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x + ex$ με $x > 0$.

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση

Παρατηρώ ότι

- η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \ln x + ex) = -\infty$, άρα υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $f(a) < 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x + ex) = +\infty$, άρα υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\beta) > 0$

Άρα στο διάστημα $[a, \beta]$ η f είναι συνεχής και $f(a)f(\beta) < 0$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (a, β) άρα και στο $(0, +\infty)$.

Για να αποδείξω την μοναδικότητα της λύσης αρκεί να αποδείξω ότι η συνάρτηση είναι «1-1».

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$.

Τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow 2 \ln x_1 < 2 \ln x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ex_1 < ex_2 \quad (2)$$

$$\text{Από } (1)+(2) \Rightarrow 2 \ln x_1 + ex_1 < 2 \ln x_2 + ex_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επομένως «1-1».

Συνεπώς η εξίσωση $2 \ln x + ex = 0$, έχει μοναδική λύση.

Αν πρέπει να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστον δυο, ή και περισσότερες ρίζες εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano τόσες φορές, όσες και οι ρίζες που θέλουμε να έχουμε, φροντίζοντας να το εφαρμόζουμε σε διαστήματα που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία μεταξύ τους. Τα διαστήματα αυτά τα βρίσκουμε είτε με παρατήρηση είτε χωρίζοντας το βασικό διάστημα σε ισομήκη διαστήματα.

Παράδειγμα 6:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x^2 - 8x + 6 = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, 2)$.

Λύση

Για να δείξω ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x^2 - 8x + 6 = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, 2)$ αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, 2)$, όπου $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 6$, $x \in [0, 2]$

Παρατηρούμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική
- $f(0)=6>0$
- $f(1)=4-3-8+6=-1<0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)f(1)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(1)=-1<0$
- $f(2)=10>0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $f(1)f(2)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Εφόσον $0 < x_0 < 1 < x_1 < 2$, το $x_0 \neq x_1$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,2)$.

Προσδιορισμός Προσήμου Συνάρτησης

Ο προσδιορισμός προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης γίνεται καταρχήν αλγεβρικά. Σε περιπτώσεις που αυτό δεν μπορεί να γίνει η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε βασίζεται κυρίως στην παρατήρηση ότι «Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Δηλαδή αν ρ_1, ρ_2 δυο διαδοχικές ρίζες της συνεχούς συνάρτησης f , τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες»

Αυτό σημαίνει ότι για να προσδιορίσω το πρόσημό της f θα πρέπει:

1. Να αποδείξω την συνέχεια της
2. Να λύσω την εξίσωση $f(x)=0$
3. Να κατασκευάσω πίνακα προσήμων όπου θα βάλω τα άκρα του διαστήματος στο οποίο ορίζεται η f , τις ρίζες της, τα (πιθανά) σημεία ασυνέχειας και σε κάθε ένα από τα διαστήματα που ορίζονται

επιλέγω κατάλληλο αριθμό x_0 του οποίου υπολογίζω την τιμή $f(x_0)$. Το πρόσημο του $f(x_0)$ θα είναι και το αντίστοιχο πρόσημο της f στο διάστημα από το οποίο επιλέχτηκε ο x_0 .

Παράδειγμα 1:

Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = (\ln x - 1)(e^x - 1)(x - 1)$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x > 0$. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Ισχύει ότι:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(e^x - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(x = e \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1 \right)_{\text{απορ.}}$
- $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$
- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Κατασκευάζω πίνακα προσήμων και έχω:

	0	1	e	$+\infty$
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$e^x - 1$	+	+	+	+
$x - 1$	-	0	+	+
$f(x)$	+	-	+	+

Άρα στο διάστημα $(0, 1)$ έχουμε $f(x) > 0$, στο $(1, e)$ η $f(x) < 0$ και στο $(e, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$.

Παράδειγμα 2

Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x - x$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $A_f = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Ακόμα

- $\pi \in (0, +\infty)$ και $f(\pi) = \eta\mu\pi - \pi = -\pi < 0$
- $-\pi \in (-\infty, 0)$ και $f(-\pi) = \eta\mu(-\pi) - (-\pi) = \pi > 0$

Άρα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε $f(x) > 0$ και στο $(0, +\infty)$ έχουμε $f(x) < 0$.

Συνοπτικά τα παραπάνω φαίνονται στον πίνακα:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \eta\mu x - x$	+	$\emptyset$	-

Προσδιορισμός Τύπου Συνάρτησης

Παράδειγμα:

α. Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 1 = 0 \text{ ή } f(x) - 2 = 0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η παραπάνω σχέση μας δηλώνει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(\mathbb{R}) = \{1, 2\}$ και επομένως κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}$ μπορεί να αντιστοιχιστεί είτε στο 1 είτε στο 2. Αυτό σημαίνει ότι κάθε

$$\text{συνάρτηση της μορφής } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 2, & \text{αν } x \in B \end{cases} \text{ με } A \cup B = \mathbb{R}.$$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |g(x)| = \frac{1}{2}$$

$$\text{όπου } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = f(x) - \frac{3}{2}.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών των συναρτήσεων f και $\frac{3}{2}$ και $g(x) \neq 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

- Αν $g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{3}{2}$ τότε: $g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = 2, x \in \mathbb{R}.$
- Αν $g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < \frac{3}{2}$ τότε: $g(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = 1, x \in \mathbb{R}.$

Προσοχή: Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να λυθεί και με χρήση του συνόλου τιμών και του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών. Την συγκεκριμένη λύση θα την δούμε αργότερα.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} - 4x - 4e^{-f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{f(x)} - 4x - 4e^{-f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 4e^{f(x)}x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 4e^{f(x)}x + 4x^2 = 4x^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)} - 2x\right)^2 = 4x^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\left|e^{f(x)} - 2x\right| = \sqrt{4x^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$|g(x)| = \sqrt{4x^2 + 4}, \text{ όπου } g(x) = e^{f(x)} - 2x, x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (γιατί;) και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $4x^2 + 4 \neq 0$.

Επομένως η συνάρτηση g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(0) = e^{f(0)} - 0 = e^{\ln 2} = 2 > 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \sqrt{4x^2 + 4} \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{4x^2 + 4} \Leftrightarrow \\ e^{f(x)} - 2x &= \sqrt{4x^2 + 4} \Leftrightarrow e^{f(x)} = 2x + \sqrt{4x^2 + 4} \Leftrightarrow \\ f(x) &= \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 4}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) = 2(x^2 + 1)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= 2(x^2 + 1)f(x) \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 2(x^2 + 1)f(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 2(x^2 + 1)f(x) + (x^2 + 1)^2 &= (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow \\ (f(x) - (x^2 + 1))^2 &= (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow \\ |f(x) - (x^2 + 1)| &= x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ |g(x)| &= x^2 + 1 \text{ όπου } g(x) = f(x) - (x^2 + 1), x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (γιατί;) με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επομένως

- Αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $g(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) - (x^2 + 1) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- Αν $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $g(x) = -(x^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) - (x^2 + 1) = -(x^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Προσοχή: Αν γράφαμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) = 2(x^2 + 1)f(x) \Leftrightarrow f(x)(f(x) - 2(x^2 + 1)) = 0 \Leftrightarrow (f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = (x^2 + 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

Θα κάναμε λάθος και παρό το γεγονός ότι παίρνουμε τις σωστές συναρτήσεις η όλη διαδικασία είναι λανθασμένη!!!

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 6x = x^2 + 9$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η σχέση (1) επαληθεύεται από άπειρες συναρτήσεις.
- β.** Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (1).

Λύση

- α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f^2(x) + 6x = x^2 + 9 &\Leftrightarrow f^2(x) + 6x - x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - (x-3))(f(x) + (x-3)) &= 0 \Leftrightarrow (f(x) - x + 3)(f(x) + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - x + 3 = 0 \text{ ή } f(x) + x - 3 &= 0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ (f(x) = x - 3 \text{ ή } f(x) = -x + 3) &\text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επομένως κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{αν } x \in A \\ -x+3, & \text{αν } x \in B \end{cases}$ με $A \cup B = \mathbb{R}$ επαληθεύει την σχέση (1).

- β.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + 6x = x^2 + 9 \Leftrightarrow f^2(x) = (x-3)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x-3|$$

Παρατηρώ ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 3)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 3)$.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 3)$.

Ομοίως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(3, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(3, +\infty)$.

Έτσι οι συνεχείς συναρτήσεις που ζητάμε είναι οι:

$$f_1(x) = x - 3, x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -x + 3, x \in \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{αν } x \leq 3 \\ -x + 3, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{αν } x > 3 \\ -x + 3, & \text{αν } x \leq 3 \end{cases}.$$

Προσοχή: Για να μπορέσουμε να μην ξεχάσουμε καμία συνάρτηση μπορούμε να κατασκευάσουμε βοηθητικά, το διπλανό πίνακάκι.

Περίπτωση 1: $(+, +)$ οπότε έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} +|x-3|, & \text{αν } x < 3 \\ +|x-3|, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = |x-3| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 2: $(-, -)$ οπότε έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} -|x-3|, & \text{αν } x < 3 \\ -|x-3|, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = -|x-3| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 3: $(+, -)$ οπότε έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} +|x-3|, & \text{αν } x < 3 \\ -|x-3|, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{αν } x < 3 \\ -x+3, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = -x+3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 4: $(-, +)$ οπότε έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} -|x-3|, & \text{αν } x < 3 \\ +|x-3|, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{αν } x < 3 \\ x-3, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = x-3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα:

	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+
$f(x)$	-	0	-
$f(x)$	+	0	-
$f(x)$	-	0	+

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x) \neq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f^2(x) - 2xf(x) - 9 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 3$$

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Λύση

Α τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f^2(x) - 2xf(x) &= 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \\ (f(x) - x)^2 &= x^2 + 9 \Leftrightarrow |f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2 + 9} \quad (1) \end{aligned}$$

όπου $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $g(x) = f(x) - x$.

Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και εφόσον $g(0) = 3 > 0$ θα έχουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα

$$(1) \Rightarrow g(x) = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$$

Β τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \neq x$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εφόσον είναι συνεχής (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επιπλέον για $x = 0$ έχω $f(0) - 0 = 3 > 0$ οπότε $f(x) - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^2(x) - 2xf(x) - 9 = 0$.

Θεωρώντας την τελευταία ως δευτεροβάθμια συνάρτηση του $f(x)$, βρίσκουμε

$\Delta = 4(x^2 + 9)$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9} \quad \eta \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 + 9}$$

Όμως αν για κάποιο x_0 ισχύει $f(x_0) = x_0 - \sqrt{x_0^2 + 9}$ τότε επειδή $x_0 - \sqrt{x_0^2 + 9} < x_0$ καταλήγουμε σε άτοπο διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) > x$.

Άρα τελικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

Διατήρηση Προσήμου και Ύπαρξης Ρίζας

Πολλές φορές όταν χρειάζεται να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας ρίζας μιας εξίσωσης, το Θεώρημα Bolzano (και άλλα παραξιακά Θεωρήματα), δεν μπορεί να μας δώσει απάντηση, οπότε καταφεύγουμε στην απαγωγή σε άτοπο, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει ρίζα και χρησιμοποιώντας την πρόταση σταθερού προσήμου.

Παράδειγμα:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(f(x)) + 3f(x) = 12 - 2x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) = x_0$.

β. Αποδείξτε ότι $f(2) = 2$.

Λύση

α. Έστω ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $f(x) > x$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η (2) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και αν θέσω όπου x το $f(x)$.

Έτσι: $f(f(x)) > f(x) > x$ (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμα $f(x) > x \Rightarrow 3f(x) > 3x$ (4) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από (3)+(4) $\Rightarrow f(f(x)) + 3f(x) > x + 3x \Rightarrow$

$$f(f(x)) + 3f(x) > 4x \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 12 - 2x > 4x \Rightarrow 12 > 6x \Rightarrow x < 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άτοπο.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

β. Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε θέτω όπου x το x_0 (που βρήκα στο (α)) και έχω:

$$f(f(x_0)) + 3f(x_0) = 12 - 2x_0 \Rightarrow f(x_0) + 3x_0 = 12 - 2x_0 \Rightarrow x_0 + 3x_0 = 12 - 2x_0 \Rightarrow x_0 = 2$$

Άρα $f(2) = 2$

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f:[a,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή " η ":

Αποδεικνύουμε ότι f συνεχής στο $[a,\beta]$

Αποδεικνύουμε ότι " η " ανήκει στο $f([a,\beta])$ είτε βρίσκοντας τα $f(a)$ και $f(\beta)$, δείχνοντας $f(a)\neq f(\beta)$ και ότι ο " η " βρίσκεται ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(\beta)$, είτε υπολογίζοντας το σύνολο

τιμών της (θα το δούμε παρακάτω) και δείχνοντας ότι $\eta\in f([a,\beta])$.

Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$.

Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:[0,3]\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2+3x-2\sin(\pi x)$ παίρνει την τιμή 14.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και ισχύει $f(0)=-2$, $f(3)=20$.

Παρατηρούμε ότι $-2<14<20$ άρα από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=14$.

$$\text{Υπαρξη } \xi\in[a,\beta] \text{ με } f(\xi)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\dots+\kappa_n f(x_n)}{\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_n}$$

Στην περίπτωση που μας ζητείται να αποδείξουμε ότι για μια συνάρτηση $f:[a,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ υπάρχει

$\xi\in[a,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\dots+\kappa_n f(x_n)}{\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_n}$, $\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_n\in(0,+\infty)$ για δοσμένα

$x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,\beta]$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a,\beta]$

Εφόσον η g είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή θα υπάρχουν m,M τέτοιοι ώστε για κάθε $x\in[a,\beta]$ να ισχύει $m\leq g(x)\leq M$.

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_v \in [a, \beta]$ και δημιουργώντας τις ανισότητες:

$$\left. \begin{aligned} m &\leq f(x_1) \leq M \\ m &\leq f(x_2) \leq M \\ &\vdots \\ m &\leq f(x_v) \leq M \end{aligned} \right\}$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε ανισότητα με τον κατάλληλο συντελεστή $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v \in (0, +\infty)$ οπότε δεν αλλάζει η φορά και έτσι έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 m &\leq \kappa_1 f(x_1) \leq \kappa_1 M \\ \kappa_2 m &\leq \kappa_2 f(x_2) \leq \kappa_2 M \\ &\vdots \\ \kappa_v m &\leq \kappa_v f(x_v) \leq \kappa_v M \end{aligned} \right\}$$

Προσθέτουμε (ή πολλαπλασιάζουμε) κατά μέλη τις ανισότητες που δημιουργήθηκαν και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \kappa_1 m + \kappa_2 m + \dots + \kappa_v m &\leq \kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \dots + \kappa_v f(x_v) \leq \kappa_1 M + \kappa_2 M + \dots + \kappa_v M \Rightarrow \\ (\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_v) m &\leq \kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \dots + \kappa_v f(x_v) \leq (\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_v) M \Rightarrow \\ m &\leq \underbrace{\frac{\kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \dots + \kappa_v f(x_v)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_v}}_{\eta} \leq M \end{aligned}$$

Σε περίπτωση που πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} \kappa_1 m + \kappa_2 m + \dots + \kappa_v m &\leq \kappa_1 f(x_1) + \kappa_2 f(x_2) + \dots + \kappa_v f(x_v) \leq \kappa_1 M + \kappa_2 M + \dots + \kappa_v M \Rightarrow \\ (\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_v) m^v &\leq \kappa_1 f(x_1) \cdot \kappa_2 f(x_2) \cdot \dots \cdot \kappa_v f(x_v) \leq (\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_v) M^v \Rightarrow \\ m^v &\leq \frac{\kappa_1 f(x_1) \cdot \kappa_2 f(x_2) \cdot \dots \cdot \kappa_v f(x_v)}{\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_v} \leq M^v \Rightarrow \\ m &\leq \underbrace{\sqrt[v]{\frac{\kappa_1 f(x_1) \cdot \kappa_2 f(x_2) \cdot \dots \cdot \kappa_v f(x_v)}{\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_v}}}_{\eta} \leq M \end{aligned}$$

Αν $m < M$, η συνάρτηση f δεν είναι η σταθερή, άρα ο αριθμός η ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f και επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [a, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \eta$.

Αν $m = M$, η συνάρτηση είναι η σταθερή, οπότε το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\xi \in [a, \beta]$.

Παράδειγμα 1:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 6]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(5)}{6}.$$

Λύση

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[1, 6]$ θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [1, 6]$ με $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$ τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in [1, 6]$ να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ (1).

Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\text{για } x = 2: m \leq f(2) \leq M$$

$$\text{για } x = 3: m \leq f(3) \leq M \Rightarrow 2m \leq 2f(3) \leq 2M$$

$$\text{για } x = 5: m \leq f(5) \leq M \Rightarrow 3m \leq 3f(5) \leq 3M$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω:

$$6m \leq f(2) + 2f(3) + 3f(5) \leq 6M \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(5)}{6} \leq M$$

Αν $m < M$, η συνάρτηση f δεν είναι η σταθερή, άρα ο αριθμός $\eta = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(5)}{6}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f και επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1, 6]$ ώστε $f(x_0) = \eta$.

Αν $m = M$, η συνάρτηση είναι η σταθερή, οπότε το ζητούμενο ισχύει για κάθε $x_0 \in [1, 6]$.

Σχόλιο: Η ίδια άσκηση θα μπορούσε να δοθεί με την διατύπωση

«Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 6]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(2)}{6} + \frac{f(3)}{3} + \frac{f(5)}{2} \text{.} \text{»}.$$

Χρήσιμο θα ήταν ακόμα να παρατηρήσουμε ότι το Θεώρημα Bolzano δεν είναι ο κατάλληλος τρόπος να προχωρήσουμε. Ας δούμε και το γιατί.

Αν θέσουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{f(2)}{6} - \frac{f(3)}{3} - \frac{f(5)}{2}$, εύκολα παρατηρούμε ότι

η g είναι συνεχής στο $[1, 6]$ (γιατί;) και επιπλέον

$$g(1) = f(1) - \frac{f(2)}{6} - \frac{f(3)}{3} - \frac{f(5)}{2} \text{ και}$$

$$g(6) = f(6) - \frac{f(2)}{6} - \frac{f(3)}{3} - \frac{f(5)}{2}$$

$$\text{με } g(1)g(6) = \left(f(1) - \frac{f(2)}{6} - \frac{f(3)}{3} - \frac{f(5)}{2} \right) \left(f(6) - \frac{f(2)}{6} - \frac{f(3)}{3} - \frac{f(5)}{2} \right)$$

Το πρόσημο του $g(1)g(6)$ είναι δύσκολο να προσδιοριστεί, επομένως το Θεώρημα Bolzano δεν ενδείκνυται σε τέτοιου τύπου ασκήσεις.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι ;

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 5]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 5]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)}.$$

Λύση

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[0, 5]$ θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή θα υπάρχουν

$x_1, x_2 \in [0, 5]$ με $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$ τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in [0, 5]$ να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ (1).

Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

- για $x=1: m \leq f(1) \leq M$
- για $x=2: m \leq f(2) \leq M$
- για $x=3: m \leq f(3) \leq M$

Η συνάρτηση f παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, άρα όλες οι παραπάνω ανισότητες είναι ανισότητες μόνο με μη αρνητικούς όρους και επομένως μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

Έτσι έχουμε:

$$m^3 \leq f(1)f(2)f(3) \leq M^3 \Rightarrow$$

$$m \leq \underbrace{\sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)}}_{\eta} \leq M$$

Η συνάρτηση f δεν είναι η σταθερή, άρα $m < M$.

Έτσι ο αριθμός $\eta = \sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f και επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 5]$ ώστε $f(x_0) = \eta$.

Παράδειγμα 3:

Δίνεται η συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι ;

$$f(1)f(2)f(4) = 8. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in [1, 5] \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = x_0.$$

Λύση

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση αρκεί να δείξουμε

α. είτε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει λύση

β. είτε η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 1$ έχει λύση

Θα δοκιμάσουμε να λύσουμε την άσκησή και με τους 2 τρόπους.

Α τρόπος:

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 5]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε ότι:

$$h(0) = f(0) - 0$$

$$h(5) = f(5) - 5$$

$$\text{Επομένως } h(0)h(5) = f(0)(f(5) - 5)$$

Ο προσδιορισμός του προσήμου $h(0)h(5)$ δεν είναι εύκολος και για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $f(x) > x$ για κάθε $x \in [1, 5]$. Τότε θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) > 1 \\ f(2) > 2 \\ f(4) > 4 \end{array} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f(1)f(2)f(4) > 8 \Rightarrow 8 > 8 \text{ Άτοπο.}$$

Άρα υπάρχει $a \in [1, 5]$ τέτοιο ώστε $f(a) < a \Rightarrow f(a) - a < 0$

Έστω $f(x) < x$ για κάθε $x \in [1, 5]$. Τότε θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) < 1 \\ f(2) < 2 \\ f(4) < 4 \end{array} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f(1)f(2)f(4) < 8 \Rightarrow 8 < 8 \text{ Άτοπο.}$$

Άρα υπάρχει $\beta \in [1, 5]$ τέτοιο ώστε $f(\beta) > \beta \Rightarrow f(\beta) - \beta > 0$

Αν υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $a < \beta$, τότε η συνάρτηση $h: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$h(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής στο $[a, \beta] \subseteq [1, 5]$ και $h(a)h(\beta) < 0$ επομένως ισχύει το Θεώρημα Bolzano.

Άρα υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ επομένως και στο $[1, 5]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

Β τρόπος

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 5]$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός

1 ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Εφόσον η g είναι συνεχής στο $[1, 5]$ θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [1, 5]$ με $g(x_1) = m$ και $g(x_2) = M$ τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in [1, 5]$ να ισχύει $m \leq g(x) \leq M$ (1).

Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\text{για } x=1: m \leq g(1) \leq M \Rightarrow m \leq f(1) \leq M$$

$$\text{για } x=2: m \leq g(2) \leq M \Rightarrow m \leq \frac{f(2)}{2} \leq M$$

$$\text{για } x=4: m \leq g(4) \leq M \Rightarrow m \leq \frac{f(4)}{4} \leq M$$

Η συνάρτηση g παίρνει μόνο θετικές τιμές (εφόσον και η f παίρνει μόνο θετικές τιμές), άρα όλες οι παραπάνω ανισότητες είναι ανισότητες μόνο με θετικούς όρους και επομένως μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

Έτσι έχουμε:

$$m^3 \leq f(1) \cdot \frac{f(2)}{2} \cdot \frac{f(4)}{4} \leq M^3 \Rightarrow m^3 \leq \frac{f(1)f(2)f(4)}{8} \leq M^3 \Rightarrow m \leq \sqrt[3]{\frac{f(1)f(2)f(4)}{8}} \leq M \Rightarrow$$

$$m \leq \sqrt[3]{\frac{8}{8}} \leq M \Rightarrow m \leq 1 \leq M.$$

Αν $m < M$, η συνάρτηση g δεν είναι η σταθερή, άρα ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης g και επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1, 5]$

$$\text{ώστε } g(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{f(x_0)}{x_0} = 1 \Rightarrow f(x_0) = x_0.$$

Αν $m = M$, η συνάρτηση g είναι σταθερή με $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [1, 5]$.

Επομένως $f(x) = x$ για κάθε $x \in [1, 5]$, οπότε το ζητούμενο ισχύει για κάθε $x \in [1, 5]$.

Εύρεση Συνόλου Τιμών

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 1 = 0 \text{ ή } f(x) - 2 = 0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η παραπάνω σχέση μας δηλώνει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(\mathbb{R}) \subseteq \{1, 2\}$ και επομένως κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}$ μπορεί να αντιστοιχιστεί είτε στο 1 είτε στο 2.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε θα υπάρχουν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ τέτοια ώστε $f(a) = 1$ και

$$f(\beta) = 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[a, \beta]$ και $f(a) = 1 < \frac{3}{2} < 2 = f(\beta)$.

Άρα από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

Άτοπο γιατί $\frac{3}{2} \notin f(\mathbb{R})$. Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f θα είναι:

$$f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Διαφορετικά (για το ότι η f είναι σταθερή):

Το $f(\mathbb{R}) \subseteq \{1, 2\}$ δεν είναι διάστημα και επιπλέον επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής.

Άρα

$$f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 2019$.

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία της.

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\ln x_0 = -e^{x_0-1}$

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (γιατί;)

Ακόμα έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \quad (2)$$

$$\text{Από} \quad (1) + (2) \Rightarrow \ln x_1 + e^{x_1-1} < \ln x_2 + e^{x_2-1} \Rightarrow$$

$$\ln x_1 + e^{x_1-1} - 2019 < \ln x_2 + e^{x_2-1} - 2019 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + e^{x-1} - 2019) = -\infty + e^{-1} - 2019 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + e^{x-1} - 2019) = +\infty + \infty - 2019 = +\infty$$

$$\text{Άρα } f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

γ. Για να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\ln x_0 = -e^{x_0-1}$

αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε

$$\ln x_0 = -e^{x_0-1} \Leftrightarrow \ln x_0 + e^{x_0-1} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + e^{x_0-1} - 2019 = -2019 \Leftrightarrow f(x_0) = -2019$$

Όμως το $2019 \in f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$ επομένως υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = -2019$.

Επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα θα είναι και «1-1».

Επομένως το $x_0 \in (0, +\infty)$ που βρήκαμε θα είναι και μοναδικό.

Άρα τελικά υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\ln x_0 = -e^{x_0-1}$.

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{1-x} - 2019$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (γιατί;)

Η μονοτονία της συνάρτησης δεν είναι εύκολο να βρεθεί χωρίς παραγώγους.

Μπορούμε εύκολα όμως να παρατηρήσουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + e^{1-x} - 2019) = -\infty + e - 2019 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + e^{1-x} - 2019) = +\infty + 0 - 2019 = +\infty$$

$$\text{Άρα } f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα:

Να αποδείξετε ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση

Θεωρούμε τη πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ περιττός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n > 0$.

Ισχύει ότι:

η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = a_n (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = a_n (-\infty) = -\infty$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και εφόσον $0 \in \mathbb{R}$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.