

Α. Μελέτη Συνέχειας Συνάρτησης

1. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο σημείο x_0 τις συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & , \text{αν } x \neq 4 \\ 6 & , \text{αν } x = 4 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 4$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} & , \text{αν } x \neq 1 \\ 1 & , \text{αν } x = 1 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 1$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} x \eta \mu \frac{1}{x} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 0$$

2. Να αιτιολογήσετε γιατί είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = x^2 + \eta \mu x$$

$$\beta. f(x) = e^{2x} + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\gamma. f(x) = \sqrt{\ln(1 + |x|)}$$

$$\delta. f(x) = (x - 1)\sqrt{x^2}$$

$$\epsilon. f(x) = (x^2 - x + 1)^{100}$$

στ.

3. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} x + e^{x-1} & , \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} \eta \mu\left(\frac{\pi x}{4}\right) & , \text{αν } x < 2 \\ x^2 + \ln(x-1) & , \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3x+1}-1} & , \text{αν } x < 0 \\ \frac{x+2}{3} & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta. f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x-2} & , \text{αν } x \neq 2 \\ 7 & , \text{αν } x = 2 \end{cases}$$

4. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς;

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ x & , \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x & , \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x & , \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\delta. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ x & , \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι οι συναρτήσεις $f + 3g$ και $g + 3f$ είναι συνεχείς. Να δείξετε ότι και οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς.

Β. Προσδιορισμός - Εύρεση Παραμέτρων

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2 + 2 & , \text{αν } x \leq a \\ 3ax - 1 & , \text{αν } x > a \end{cases}$.

Να προσδιοριστεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = a$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1} & , \text{αν } x \neq 1 \\ 1 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

Να προσδιοριστούν τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{3a}{x^3} + 1 & , \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & , \text{αν } x > 2 \end{cases}$.

Να προσδιοριστεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} + x & , \text{αν } x \leq -1 \\ 2x^2 - ax + 3\beta & , \text{αν } -1 < x < 0 \\ \beta \eta \mu x + a \sigma \nu x + 1 & , \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$.

Να προσδιοριστούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x & , \text{αν } x < 2 \\ -2 & , \text{αν } x = 2 \\ x^3 + \beta x^2 + 2a & , \text{αν } x > 2 \end{cases}$.

Να προσδιοριστούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ. Εύρεση Τιμής ή Τύπου Συνάρτησης

11. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$, τέτοια ώστε $x^2 f(x) = \eta \mu^2(4x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί το $f(0)$.

12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$, τέτοια ώστε $\eta \mu 3x - x^2 \leq x \cdot f(x) \leq x^2 + \eta \mu 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί το $f(0)$.

13. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$, τέτοια ώστε $|f(x)| \leq \frac{x^4}{1-\sin x}$ για κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Να βρεθεί το $f(0)$.
14. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$. Να βρεθεί το $f(0)$.
15. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει $x \sin x < x \cdot f(x) < \eta\mu x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
16. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $x^2 f(x) + \sin x - 1 = 5x^4 + 4|x|^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .
17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x+4)f(x) = x^2 + 3x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .
18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x \cdot f(x) - f(x) = x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .
19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $1 + (x^2 + 1)f(x) = (1 + f(x))\sin^2 x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .
20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι περιττή, συνεχής στο $x_0 = -1$ και $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 2 - \eta\mu(x+1)}{x+1} = 1$, τότε :
- α. Να βρείτε την τιμή της f στο $x_0 = -1$
- β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 1$
- γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

Δ. Θεωρητικές Ασκήσεις

21. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
22. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = a$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
23. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
24. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
25. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = y \cdot f(x) + x \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$, τότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
26. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι υπάρχει $c \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
27. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι υπάρχουν $c, a \in (0, +\infty)$ τέτοιοι ώστε $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^a$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
28. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) - f(y) \leq 2009|x - y|$. Να αποδείξετε ότι :
- α. $|f(x) - f(y)| \leq 2009|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- β. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- γ. Η εξίσωση $f(x) = c \cdot x$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$ με $c > 2009$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα
29. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.
- β. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $f(x+y) = f(x)\sin y + f(y)\sin x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Να δείξετε ότι:

α. $f(0) = 0$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

γ. η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

δ. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sin a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Ε. Κριτήριο Παρεμβολής

31. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) + g^2(x) = (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι f και g είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) + g^2(x) + \sin x \leq 2xf(x) + 2g(x)\sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι f και g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$

37. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) + g^2(x) + x^2 = 2xf(x) + 2g(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι f και g είναι συνεχείς.
38. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x) - x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την συνάρτηση g να είναι φραγμένη και την f συνεχή στο $x_0 = 0$. Αν οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν την σχέση $xf(x) - x \leq g(x)(\sqrt{1+x^2} - 1) - \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να υπολογιστεί το $f(0)$.

ΣΤ. Θεώρημα Bolzano

41. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά

α. $x \ln \sqrt{x} + x^2 \ln x = 2$ στο $(1, e)$

β. $x + \ln x = \sqrt{x}$ στο $\left(\frac{1}{2}, e\right)$

γ. $2^x + x = 0$ στο $(-1, 1)$

δ. $\eta\mu x - 2 = -2x$ στο $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

ε. $xe^x = 1$ στο $(0, 1)$

στ. $e^x - e^{-x} + x = 0$ στο $(-1, 1)$

42. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά

α. $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^4}{x-1} = 0$ στο $(1, 2)$

β. $\frac{x^{2018} + 2018}{x-1} + \frac{x^{2019} + 2019}{x-2} = 0$ στο $(1, 2)$

γ. $\frac{2x^3 - 1}{x-1} + \frac{\sin x}{x} = 0$ στο $(0, 1)$

δ. $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ στο $(1, 2)$

43. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά

α. $\ln(3x) = x$ στο $(0, 1)$

β. $\ln x + e^x = 0$ στο $(0, 1)$

$$\gamma. \ln x = x^2 - 4x + 2 \text{ στο } (0, 1)$$

$$\delta. 3x + 4 + \ln(x + 3) = 0 \text{ στο } (-3, +\infty)$$

$$\epsilon. e^x = \varepsilon \varphi x \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sigma\tau. x^2 + \ln x = x + \ln(2 - x) \text{ στο } (0, 2)$$

44. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, έχουν δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά

$$\alpha. 2^x - 3x^2 - x + 1 = 0 \text{ στο } (-1, 1)$$

$$\beta. \sin x + x \eta \mu x - x^2 = 0 \text{ στο } (-\pi, \pi)$$

$$\gamma. 3x^3 - x - 1 = 0 \text{ στο } (-1, 1)$$

$$\delta. x \varepsilon \varphi x = 1 \text{ στο } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\epsilon. \varepsilon \varphi x = \frac{\pi}{2} - x \text{ στο } (0, \pi)$$

$$\sigma\tau. x^2 + \eta \mu x = 1 \text{ στο } \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

45. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, έχουν μια τουλάχιστον ρίζα

$$\alpha. \ln x + \eta \mu x = e^{-x}$$

$$\beta. x^2 + \ln x = \sin x$$

$$\gamma. e^{x^2} = \frac{3x+1}{x^2+x}$$

46. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, έχουν μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα που δίνεται κάθε φορά

$$\alpha. x^5 + 3x = 1 \text{ στο } (0, 1)$$

$$\beta. \ln x = \frac{1}{x} \text{ στο } (1, e)$$

$$\gamma. e^x = 2 - x \text{ στο } \mathbb{R}$$

$$\delta. 2^{-x} = \ln x \text{ στο } (0, +\infty)$$

$$\epsilon. 3\eta \mu x = 1 + \sin x \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sigma\tau. (x+1)2^{x+1} = 1 \text{ στο } (-1, +\infty)$$

47. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού, έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x^2) - f(x) = x - \frac{1}{2} \text{ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.}$$

49. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = 2f(x_0) - x_0$.

50. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) = 2\sin x - 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

51. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $xf(x) - 5x = x^2 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- α. $f(0) = 1$
- β. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, \pi)$.
52. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(a)f(\beta) + a\beta < af(\beta) + \beta f(a)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
53. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(2) + f(3) < 5 < f(1) + f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 4)$ τέτοια ώστε $x_1 + x_2 = 5$ και $f(x_1) + f(x_2) = 5$.
54. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x_0)}{a - x_0} = \frac{f(a) + f(\beta)}{\beta - a}$.
55. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$, $f(1) \neq f(2)$ και $f(3) \neq f(4)$. Να αποδείξετε ότι:
- α. υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$
- β. η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.
56. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) + f(3) + f(4) = 9$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
57. Να αποδείξετε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow [a, \beta]$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή ένα σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
58. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^{x-2} + ax + \beta$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ σταθεροί αριθμοί ώστε $a + \beta = -1$. Να αποδείξετε ότι:
- α. $f(0) + f(2) = 0$
- β. υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

- 59.** Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [a, \beta] \rightarrow [a, \beta]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x)) + g(f(x)) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$.
- 60.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = f(2)$.
- α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $T(x) = f(x) - f(x+1)$.
- β.** Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + 1)$.
- 61.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) \in [-2, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [-1, 2)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) + f(x_0) + 2x_0 = 0$.
- 62.** Δίνεται μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(1)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2018}\right)$.
- 63.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$, για κάθε $x \neq 0$. Να υπολογίσετε το $f(0)$.
- 64.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = -2015$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
Να υπολογίσετε το $f(0)$.
- 65.** Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $f(2) = 3$ και $f(f(x)) = x^2 - 4x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δε μπορεί να είναι συνεχής.
- 66.** Δίνεται η εξίσωση $h^{2009} + 9x = 10xh$ (1) με άγνωστο το h και $x \in \mathbb{R}$ με $x > 1$.
- α.** Να δείξετε ότι η (1) έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ με $h_1(x) < 0 < h_2(x) < 1 < h_3(x)$.
- β.** Να υπολογίσετε τα όρια
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_2(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_3(x)$

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x^2 - \sqrt{x} \ln x^4 + x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ ώστε: $f(x_0) = 0$
68. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση: $f^2(x) + g^2(x) = h^2(x)$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $2f(x)g(x) = xh^2(x)$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα
69. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$
- α. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$
- β. Να βρείτε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(-\sqrt{2})$
- γ. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$
70. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- α. Να βρείτε το $f(1)$ και τη μονοτονία της f στο $(0, +\infty)$.
- β. Αν επιπλέον, η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $\rho > 1$ είναι ρίζα της, να δείξετε ότι:
- i. η g διατηρεί πρόσημο στο $(0, \rho)$
- ii. η εξίσωση $a^2 f(x) + \beta^2 g(x) = 0$ με $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ έχει μοναδική λύση στο $(1, \rho)$.
71. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x + 3$ και $g(x) = 2x^3 - 4x + 2$ έχουν 3 κοινά σημεία. Είναι δύσκολο να βρεθούν, αλλά δείξτε ότι βρίσκονται στην ίδια ευθεία, η οποία μάλιστα έχει κλίση 2

Ζ Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano

(Διατήρηση Προσήμου και Εύρεση Τύπου Συνάρτησης)

72. Να βρεθεί το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:

α. $f(x) = x - \eta\mu x$ στο $\mathbb{R}$

β. $f(x) = x + \eta\mu x$ στο $\mathbb{R}$

γ. $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu x - 1$ στο $[0, \pi]$

δ. $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, \pi]$

ε. $f(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

στ. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ στο $\mathbb{R}$

ζ. $f(x) = \eta\mu^3 x - 2\eta\mu^2 x - 8\eta\mu x$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

η. $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ στο $\mathbb{R}$

θ. $f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ι.

73. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) > 0$ για την οποία ισχύει

$$4x^2 + 9f^2(x) = 36 \text{ για κάθε } x \in [-3, 3].$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-3, 3)$

β. Να βρείτε τον τύπο της f

74. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) < 0$ για την οποία ισχύει

$$3(x^2 - 1) + 4f^2(x) = 9 \text{ για κάθε } x \in [-2, 2].$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$

β. Να βρείτε τον τύπο της f

75. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f(x) - 2\sigma\upsilon\nu x)(f(x) + 2\sigma\upsilon\nu x) = 4\eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f$$

76. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 4x = x^2 + 4$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

77. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 1 = 2xf(x)$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$ να βρείτε τον τύπο της f .

78. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2e^x + x^2 = e^{2x} + 2xf(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .
79. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $(f(x) - e^x)(f(x) + e^x) = 1 - 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιες από αυτές είναι συνεχείς;
80. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) = x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιες από αυτές είναι συνεχείς;
81. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) - 6f(x) + 5 = x^4 + 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
82. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x) - 6f(x) + 8 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιες από αυτές είναι συνεχείς;
83. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 2x = e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .
84. Δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x) \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = g(x)$ ή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = -g(x)$.
85. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) + f(1) + f(5) = 0$.
- α. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- β. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
86. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα $f(1)f(3)f(9) = 27$. Να αποδείξετε ότι:
- α. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- β. υπάρχει $x_0 \in [1, 9]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3$
- γ. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα

87. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(f(x))} = -1$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

β. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $f(0) > 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

88. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Έστω

$x_1, x_2, x_3 \in [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1)f(x_2)f(x_3) = x_1x_2x_3$. Να δείξετε ότι η γραφική

παράσταση της f τέμνει τη διχοτόμου του 1ου και 3ου τεταρτημόριου.

89. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 6$, $f(x)f(f(x)) = 12$ για κάθε

$x > 0$ γνησίως μονότονη. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{12}{x}$.

90. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = -2$ και οι αριθμοί -1 και 2 είναι

διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 f(0) + 1}{x^2 + 2}$

91. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$f(x) = -3x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

92. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, τότε η εξίσωση $f(x) = ax$ με $a < 0$ έχει μοναδική λύση.

93. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \xi$.

94. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) = 2xf(x) + 1$, να

βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu|x|}$

95. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ είναι συνεχής και υπάρχουν $0 < a < \beta < \gamma$ ώστε

$$f\left(\frac{a}{\beta}\right)f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)f\left(\frac{\gamma}{a}\right) = 1. \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (0, +\infty) \text{ ώστε } f(x_0) = x_0^{2018}$$

Η. Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

96. Μπορεί μια συνεχής, μη σταθερή συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ να παίρνει μόνο τις τιμές 2, 3;

Μόνο τις 1, 2, 3; Μόνο ακέραιες τιμές;

97. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ με $f(2018) = 2019$. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.

98. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 4]$ με $f(1)f(2)f(4) = 8$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

β. η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα για κάθε $[1, 4]$.

γ. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα για κάθε $[1, 4]$.

99. Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) - f(x) = x^2 - x$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη

β. αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$ τότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

100. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 6$, $f(x)f(f(x)) = 6$ για κάθε $x > 0$.

α. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) = 2$

β. Να υπολογιστεί το $f(2)$

γ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρεθεί ο τύπος της.

101. Αν για την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)f(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(10) = 9$, να βρεθεί το $f(5)$.

- 102.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1) = 3$ και $f(f(x)) + f(x) = 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
- α.** Η συνάρτηση f δεν είναι 1-1
 - β.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 6$, όπου $g(x) = f(x) + x$
 - γ.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(3, 01, 4, 99)$
 - δ.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3, 01)x^{2016} + 2016}{f(4, 99)x^{2015} + 2015}$
- 103.** Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(4) = 4$ η οποία για κάθε $x \in [0, 4]$ ικανοποιεί την σχέση $f^2(x) - 4f(x) - x^2 = 2x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[0, 4]$.
- 104.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)f(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι $f(1000) = 999$ να βρείτε το $f(500)$
- 105.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι συνεχής.
- 106.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x) + f(f(x)) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 1$
- α.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[(f(x) - 3) \eta \mu \frac{1}{x-1} \right]$$
 - β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- 107.** Η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $f(f(x)) = -x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποια η μέγιστη τιμή της f
- Ισχύει το ίδιο αν η f δεν υποτεθεί συνεχής;
- 108.** Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1, 3]$ που έχει ελάχιστο το $f(2)$. Να δειχτεί ότι η f δεν είναι 1-1 στο $[1, 3]$.

109. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με $f(0) = 1$
 $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in (-\infty, -2)$ και $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η
 συνάρτηση f έχει ελάχιστο στο σύνολο $\mathbb{R}$

110. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν ότι
 $f(x)g(x) = x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) > 3, g(2) > 2$ Να δειχθεί ότι

α. $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$

β. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ ώστε $g(x_2) - g(x_1) = 1$

111. Έστω συνάρτηση $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0, f(a) = a$.

Αν ισχύει: $f^3(x) - f(x) = x^2 - x, x \in [0, a]$, να αποδείξετε ότι:

α. $a = 1$

β. η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[0, a]$

112. Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0, 1]$ και σύνολο τιμών $[0, 3]$. Να δειχθεί ότι
 υπάρχει $\kappa \in [0, 1]$ ώστε $f(\kappa) = 2\kappa^2 - \kappa + 1$.

113. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύουν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) \cdot f(y)} \text{ και } f(x) \cdot f(y) \neq 1.$$

Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β. $-1 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θ. Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

114. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [2, 5]$ τέτοιο ώστε

$$6f(x_0) = 4f(3) + 2f(4)$$

115. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in [a, \beta], \text{ τέτοιο ώστε: } f(x_0) = \frac{f(a) + 2f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + 3f(\beta)}{6}$$

116. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τέτοια ώστε $[a, \beta] \subseteq f([a, \beta])$ και

$$f(a) < a < f(\beta) < \beta. \text{ Να δείξετε ότι η εξίσωση } \frac{x-a}{f(x)-a} - \frac{x-\beta}{f(x)-\beta} = 0 \text{ έχει μία}$$

τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

117. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in [a, \beta] \text{ τέτοιο ώστε } f(x) - f(x_0) \geq x - x_0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

118. Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(f(x)) < f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

119. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$

$$\text{και } f(0)f(2)f(4) = 27. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in [0, 4] \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 3.$$

120. Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(f(x)) < f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι:

α. $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

β. η συνάρτηση f δεν εμφανίζει ολικό ελάχιστο

γ. η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής

121. Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0) = f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(x^2) > f(x)$ για

κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι:

α. το $f(0)$ δεν είναι το ολικό μέγιστο της συνάρτησης f

β. η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής

I. Σύνολο Τιμών

- 122.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- 123.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + x - 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- α.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της
- β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της
- γ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x(1 + \eta\mu x) = 1 - x \sin^2 x$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, \pi)$
- 124.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^{2x+1}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
- 125.** Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x}$
- α.** Να μελετήσετε την παραπάνω συνάρτηση ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της
- β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης
- γ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- 126.** Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = \frac{e^x}{4e^{2x} + 1}$
- 127.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
- α.** Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε του επιπέδου έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .
- 128.** Δίνεται η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$.
Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ πεπερασμένα ή άπειρα. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:
- α.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **β.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **γ.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + f(x)}{\eta\mu x + x}$ **δ.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2}{x + 1}$

129. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$
- γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$
- $f(-1) = -7$ και $f(1) = 7$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \lambda^2 + 8\lambda$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

γ. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in [-7, 7]$.

130. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 4 \ln x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f^{-1}(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

δ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Κ. Ερωτήσεις Κρίσεως

131. Η παρακάτω συνεπαγωγή είναι σωστή ή λάθος;

Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$

132. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε x πραγματικό ισχύει $f(f(x)) + x = 0$. Γιατί η f δεν είναι συνεχής;

133. Μια χαριτωμένη ερώτηση κρίσεως για τους μαθητές θα ήταν: Είναι δυνατό μια συνάρτηση να είναι συνεχής στα $(-\infty, a)$, $[a, \beta]$, $(\beta, +\infty)$ αλλά να μην είναι συνεχής;

Επαναληπτικές

- 134.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 2}$ και $g(x) = e^x + x$
- α.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της f^{-1}
 - β.** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$
 - γ.** Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και g^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο
 - δ.** Να βρείτε την τιμή του $m > 0$, ώστε η εξίσωση $e^{mx^2 + mx + 1} + \frac{mx^2 + mx + 1}{e^{2013x}} = 1$ να έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.
- 135.** Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και τέτοια ώστε $f(1) = 3$. Αν η εξίσωση $f(x) + f(0) = 0$ έχει λύση και επιπλέον ισχύει $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
- 136.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{2e^x}{1 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- α.** Να δείξετε ότι $g(x_1) = g(x_2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - β.** Να βρείτε το $f(0)$
 - γ.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - δ.** Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) > 0$
- 137.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$
- α.** Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
 - γ.** Αφού δείξετε ότι $f(-x)f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.
 - δ.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει $(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) = 1$ να αποδείξετε ότι $a + b = 0$.

ε. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

138. Δίδονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq |x - y| \quad (1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

α. Ναδειχθεί ότι οι f, g είναι συνεχείς.

β. Αν είναι $f(1) < f(3) < f(2)$ ναδειχθεί ότι η f δεν είναι 1-1.

γ. Αν υπάρχουν a, β με $a < \beta$ τέτοια ώστε $f(a) = a, f(\beta) = \beta$ τότε:

i. Ναδειχθεί ότι: $\exists \xi \in (a, \beta) \mid f(a + \beta - \xi) = \xi$

ii. Ναδειχθεί ότι: $\exists x_1, x_2 \in [a, \beta]$ με $x_1 - x_2 = \frac{\beta - a}{2}$ τέτοια ώστε $g(x_1) = g(x_2)$.

139. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ακόμη ισχύει ότι

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Ναδειχθεί ότι}$$

α. $f(0) = 1$

β. $f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$

γ. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

α. Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της.

β. Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

141. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για την οποία

$$\text{ισχύουν } 2x + \frac{1}{e^{f(x)}} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) = \ln\left(2x + \frac{1}{e^{f(x)}}\right) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $a < 0 < \beta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1 - f(a)}{x - a} + \frac{f(\beta) + 1}{x - \beta} = 2014$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\eta\mu(f(x+1) - f(x)) \cdot \sigma\upsilon\nu(f(x+1) + f(x))]$.

ε. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f^4(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right)$.

142. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε x στο πεδίο ορισμού και για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x f(x)$

α. Να υπολογίσετε το $f(1)$?

β. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

γ. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού.

δ. να υπολογίσετε τα όρια στο 0 και στο άπειρο.

143. Έστω $f^3(x) + f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

β. Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

γ. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 0

δ. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln f^{-1}(x)]$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln f^{-1}(x)]$

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$, με $x \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να προσδιορίσετε τη λύση x_0 της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα x_1 , ώστε να ισχύει $f(x_1) = 0$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < x_0$.

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x))$. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της g και να δείξετε ότι $g(x) = \ln(x^2 + x \ln x) + x$.

ε. Να προσδιορίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\eta\mu x}{g(x)}$.

145. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν τα παρακάτω:

- η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,
- $f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,

- $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και $f(2012) = 2012$
- $\frac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \frac{f(f(x)+1)}{f(f(x)-1)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδειχθεί ότι:

- α. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- β. $f(1)f(2) = f(3)f(4)$,
- γ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$,
- δ. οι f και g δεν είναι αντιστρέψιμες.

146. Έστω οι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η f είναι συνεχής, ώστε να ισχύει $f(g(x)) = g(f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη
- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x_0) = x_0$
- γ. Για το x_0 του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι $g(x_0) = x_0$

147. Να προσδιορίσετε όλες τις περιττές και συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

148. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$

- α. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.
- β. Να βρεθεί ο a ώστε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \begin{cases} g(x) & x < a \\ f(x) & x \geq a \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- γ. Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα $f = \frac{1}{g^{-1}}$.

149. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν :

- $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$,
- $g(-1) > 0$ και $g(2) < 0$,
- $3x^4 f(x) - f^3(x) = 2x^6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $g(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

γ. Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = xg(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

i. Να βρείτε το πρόσημο της g .

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

150. Έστω a σταθερός αριθμός και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$$f(f(x)) = (x-a)^2 + a \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι 1-1 στο διάστημα $[a, +\infty)$, αλλά όχι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

β. Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν $f(a) = a+1$, τότε η f δεν είναι συνεχής.

151. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - 10^{x+g(x)}$ και $f(-1) < 0$, $g(0) < 0$
 $g(1) > -1$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες ετερόσημες.

δ. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ τέμνει την ευθεία $y = -x$ σε δυο τουλάχιστον σημεία.

ε. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ έχει μια τουλάχιστον αρνητική ρίζα.

152. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

γ. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f , αν υπάρχει.

δ. Βρείτε την συνάρτηση: $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2018}$