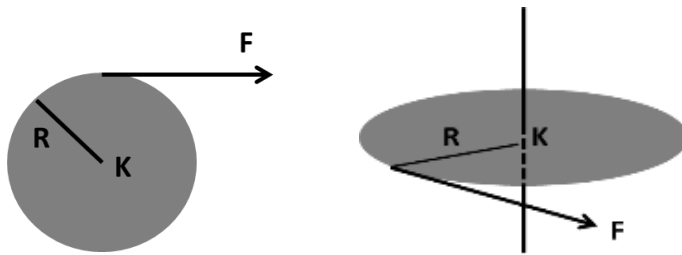


Ο Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

A. Τροχός με σταθερό άξονα περιστροφής

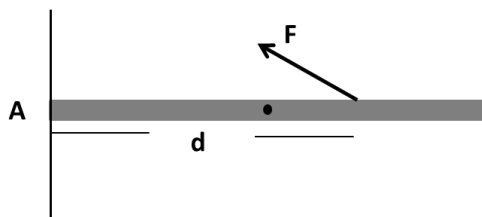


Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{(K)} = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

B. Ράβδος με σταθερό άξονα περιστροφής

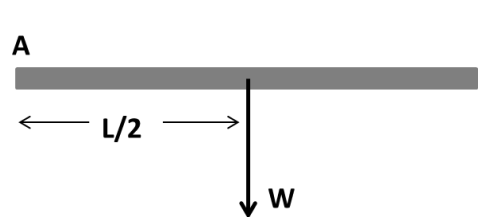
B1. Οριζόντιο επίπεδο (κατακόρυφος άξονας)



Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot d = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

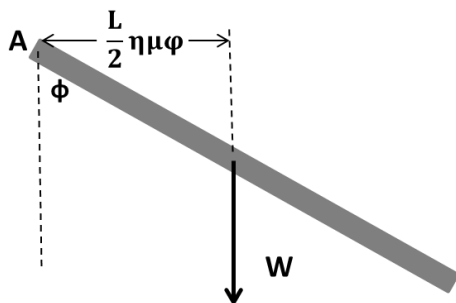
B2. Κατακόρυφο επίπεδο (οριζόντιος άξονας)



Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow W \cdot \frac{L}{2} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή



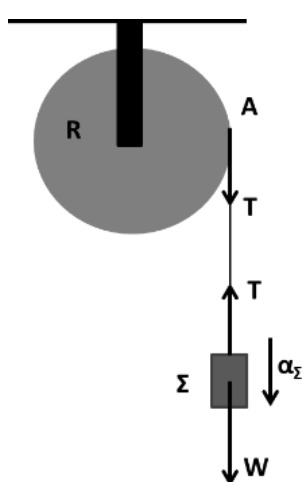
Στην τυχαία θέση:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow W \cdot \frac{L}{2} \eta\mu\phi = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Η επιτάχυνση είναι η στιγμιαία (δεν είναι σταθερή)

Γ. Τροχαλία με σταθερό άξονα και σώμα που κρέμεται

Γ1. Απλή τροχαλία



Για την τροχαλία:

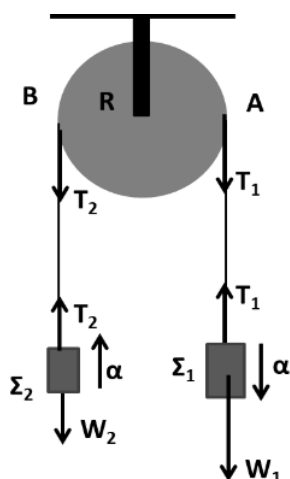
$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Για το σώμα Σ:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m \cdot \alpha_z \rightarrow W - T = m \cdot \alpha_z$$

$$\text{Για τις επιταχύνσεις: } \alpha_z = \alpha_A \rightarrow \alpha_z = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Γ2. Απλή τροχαλία με δύο σώματα



Για την τροχαλία:

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow (T_1 - T_2) \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Σώμα Σ₁:

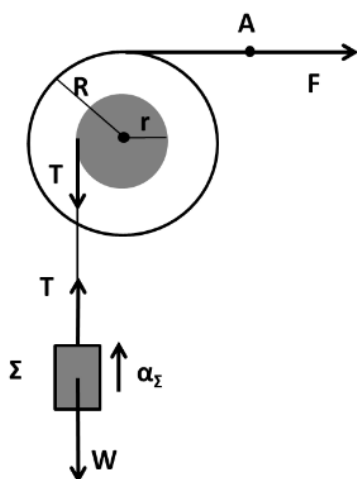
$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m_1 \cdot \alpha \rightarrow W_1 - T_1 = m_1 \cdot \alpha$$

Σώμα Σ₂:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m_2 \cdot \alpha \rightarrow T_2 - W_2 = m_2 \cdot \alpha$$

$$\text{Για τις επιταχύνσεις: } \alpha_{\Sigma 1} = \alpha_{\Sigma 2} = \alpha_A = \alpha_B = R \cdot \alpha_{γων}$$

Γ3. Διπλή τροχαλία



Για την τροχαλία:

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot R - T \cdot r = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Για το σώμα Σ:

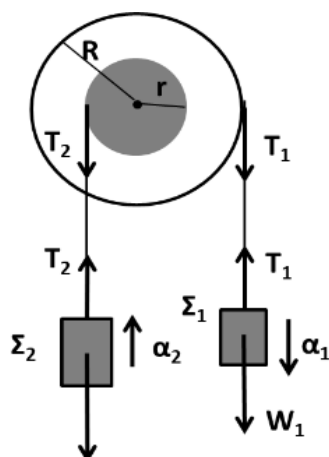
$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m \cdot \alpha_{\Sigma} \rightarrow T - W = m \cdot \alpha_{\Sigma}$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha_{\Sigma} = r \cdot \alpha_{γων}, \quad \alpha_A = R \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{Μετατόπιση σημείου A: } x = \frac{1}{2} \alpha_A \cdot t^2$$

$$\text{Νήμα που τυλίγεται: } y = \frac{1}{2} \alpha_{\Sigma} \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad \frac{x}{2\pi R} = \frac{y}{2\pi r}$$

Γ4. Διπλή τροχαλία με δύο σώματα



Ελέγχουμε τη φορά περιστροφής ως εξής: Ακινητοποιούμε την τροχαλία οπότε $T_1 = W_1$ και $T_2 = W_2$.

Συγκρίνουμε τις ροπές $T_1 \cdot R$ και $T_2 \cdot r$

Τροχαλία:

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T_1 \cdot R - T_2 \cdot r = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Σώμα Σ₁:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m_1 \cdot \alpha_1 \rightarrow W_1 - T_1 = m_1 \cdot \alpha_1$$

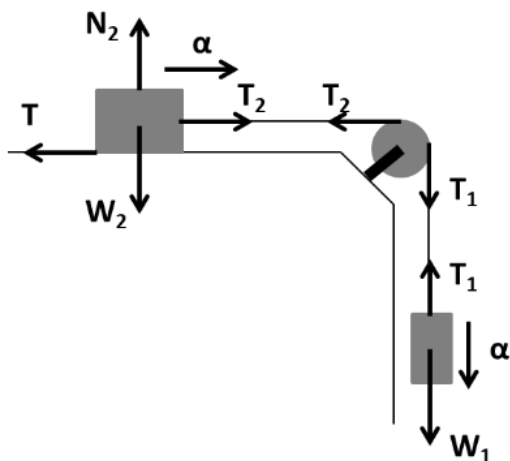
Σώμα Σ₂:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m_2 \cdot \alpha_2 \rightarrow T_2 - W_2 = m_2 \cdot \alpha_2$$

$$\text{Για τις επιταχύνσεις: } \alpha_1 = R \cdot \alpha_{γων} \text{ και } \alpha_2 = r \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{Σχέση μηκών: } dy_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 dt^2, \quad dy_2 = \frac{1}{2} \alpha_2 dt^2, \quad d\theta = \frac{1}{2} \alpha_{γων} dt^2$$

Γ5. Διπλή τροχαλία με δύο σώματα (κατακόρυφο και οριζόντιο επίπεδο)



Τροχαλία:

Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow (T_1 - T_2) \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Σώμα Σ₁:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m_1 \cdot \alpha \rightarrow W_1 - T_1 = m_1 \cdot \alpha$$

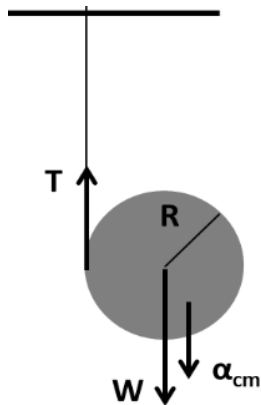
Σώμα Σ₂:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m_2 \cdot \alpha \rightarrow T_2 - T = m_2 \cdot \alpha$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha = R \cdot \alpha_{γων}$$

Δ. Κινούμενη τροχαλία (γιο-γιο)

Δ1. Σταθερό σημείο εξάρτησης



Στροφική κίνηση τροχαλίας:

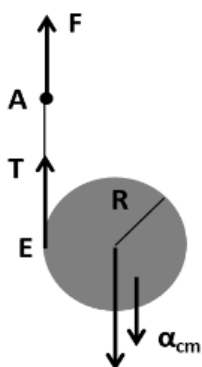
$$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Μεταφορική κίνηση τροχαλίας:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow W - T = m \cdot \alpha_{cm}$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{γων}$$

Δ2. Κινούμενο σημείο εξάρτησης



Τροχαλία:

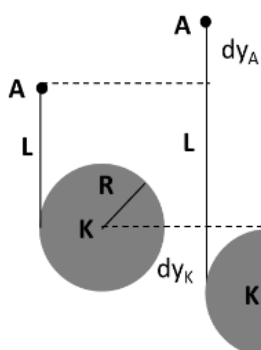
$$\text{Μεταφορική κίνηση: } W - T = m \cdot \alpha_{cm}$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{Δυνάμεις: } F = T$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha_A = \alpha_E = \alpha_{επιτρ} - \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_A = R \cdot \alpha_{γων} - \alpha_{cm}$$

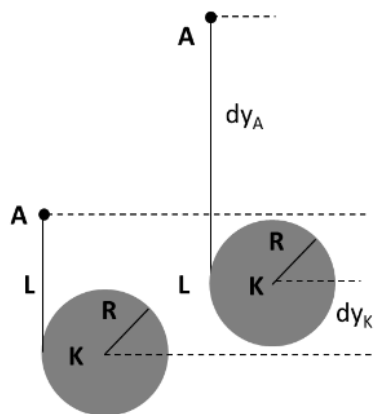
Αντιμέτωπιση με τις μετατοπίσεις



$$dy_A = \frac{1}{2} \alpha_A \cdot dt^2, \quad dy_K = \frac{1}{2} \alpha_K \cdot dt^2, \quad dL = dy_A + dy_K$$

$$dL = R \cdot d\theta, \quad d\theta = \frac{1}{2} \alpha_{γων} \cdot dt^2$$

$$R \cdot \alpha_{γων} = \alpha_A + \alpha_K$$



$$dy_A = \frac{1}{2} \alpha_A \cdot dt^2, \quad dy_K = \frac{1}{2} \alpha_K \cdot dt^2,$$

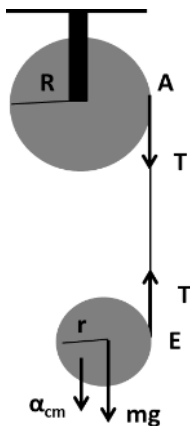
$$L' = dy_A + L - dy_K \quad \text{άρα} \quad dL = dy_A - dy_K$$

$$dL = R \cdot d\theta, \quad d\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot dt^2$$

$$R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_A - \alpha_K \quad (\text{όταν } \alpha_A > \alpha_K)$$

Όταν δε μετατοπίζεται το σημείο K είναι $\alpha_K = 0$

Ε. Ακίνητη και κινούμενη τροχαλία



Η ακίνητη τροχαλία:

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm1} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu1} \rightarrow T \cdot R = I_{cm1} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu1}$$

Η κινούμενη τροχαλία:

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu2} \rightarrow T \cdot R = I_{cm2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu2}$$

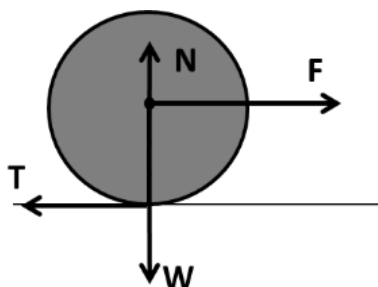
$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow mg - T = m \cdot \alpha_{cm}$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: Επειδή } dL = R \cdot d\theta_1 + r \cdot d\theta_2$$

$$\text{παίρνουμε } \alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu1} + r \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu2}$$

Ζ. Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο

Ζ1. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης στο κέντρο μάζας

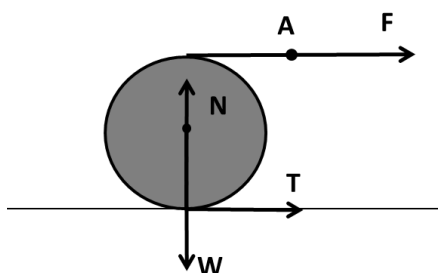


$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F - T = m \cdot \alpha_{cm}$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Ζ2. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης σε σημείο της περιφέρειας



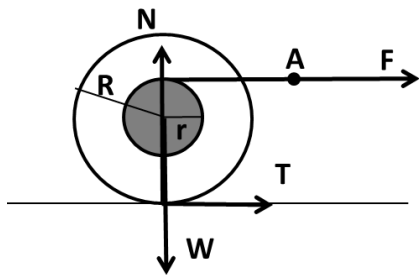
$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F + T = m \cdot \alpha_{cm}$$

$$\text{Στροφική κίνηση: } \Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow (F - T) \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}, \quad \alpha_A = 2\alpha_{cm}$$

$$\text{Σχέση μετατοπίσεων: } x_A = \frac{1}{2} \alpha_A t^2, \quad x_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2, \quad x_A = 2x_{cm}$$

Z3A. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης σε ενδιάμεσο σημείο



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot a_{cm} \rightarrow F + T = m \cdot a_{cm}$

Στροφική κίνηση: $\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot r - T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$

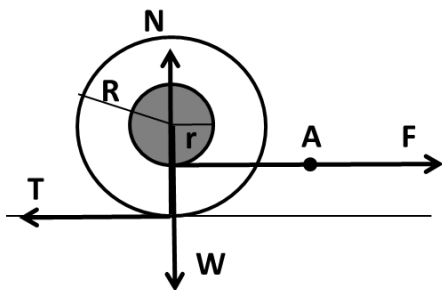
Σχέση ταχυτήτων: $v_{cm} = \omega \cdot R$, $v_A = v_{cm} + \omega \cdot r$

Σχέση επιταχύνσεων: $a_{cm} = R \cdot \alpha_{γων}$, $a_A = (R+r) \cdot \alpha_{γων}$

Μετατοπίσεις: $x_A = \frac{1}{2} a_A t^2$, $x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$

.... Το νήμα ξετυλίγεται

Z3B. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης σε ενδιάμεσο σημείο



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot a_{cm} \rightarrow F - T = m \cdot a_{cm}$

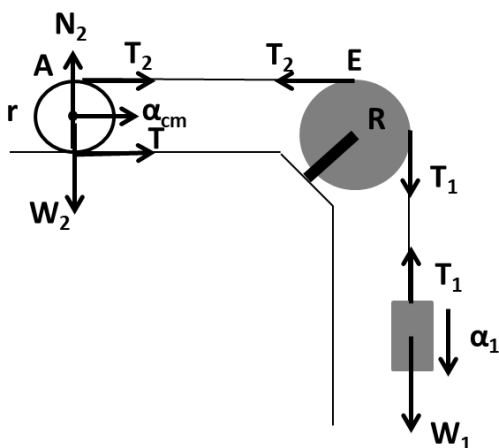
Στροφική κίνηση: $\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T \cdot R - F \cdot r = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$

Σχέση ταχυτήτων: $v_{cm} = \omega \cdot R$, $v_A = v_{cm} - \omega \cdot r$

Σχέση επιταχύνσεων: $a_{cm} = R \cdot \alpha_{γων}$, $a_A = (R-r) \cdot \alpha_{γων}$

... Το νήμα τυλίγεται

Η. Συνδιασμός κύλισης σε οριζόντιο επίπεδο – τροχαλίας - σώματος



Σώμα m_1 :

Μεταφορική κίνηση:

$\Sigma F = m_1 \cdot a \rightarrow W_1 - T_1 = m_1 \cdot a$

Τροχαλία R:

Στροφική κίνηση:

$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm1} \cdot \alpha_{γων1} \rightarrow (T_1 - T_2) \cdot R = I_{cm1} \cdot \alpha_{γων1}$

Κύλινδρος r:

Μεταφορική κίνηση:

$\Sigma F = m_2 \cdot a_{cm} \rightarrow T_2 + T = m_2 \cdot a_{cm}$

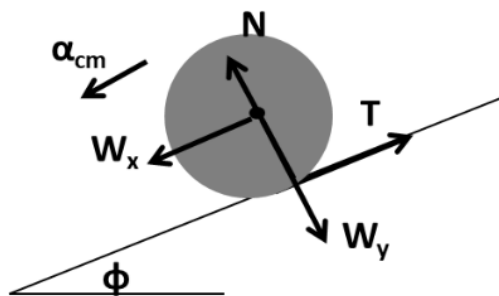
Στροφική κίνηση:

$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm2} \cdot \alpha_{γων2} \rightarrow (T_2 - T) \cdot r = I_{cm2} \cdot \alpha_{γων2}$

Σχέσεις επιταχύνσεων: $a_1 = a_E$ ($a_E = R \cdot \alpha_{γων1}$), $a_E = a_A$ ($a_A = 2a_{cm}$), $a_{cm} = r \cdot \alpha_{γων2}$

Η. Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Η1. Κάθοδος στερεού



Μεταφορική κίνηση:

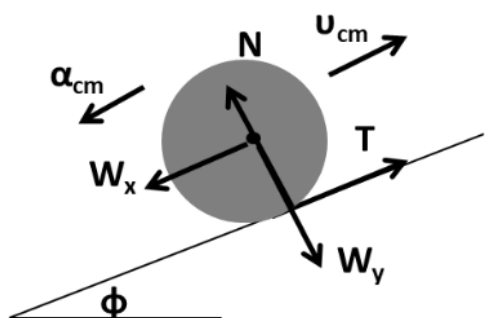
$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow W_x - T = m \cdot \alpha_{cm}$$

Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{Σχέση επιταχύνσεων: } \alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{γων}$$

Η2. Άνοδος στερεού



Η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση α_{cm}

Μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow W_x - T = m \cdot \alpha_{cm}$$

Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Σχέση επιταχύνσεων:

$$\alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{γων}$$

$$\text{Εξισώσεις κίνησης: } x = u_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2, \quad u = u_0 - \alpha_{cm} t$$

Με φορά τη φορά κίνησης

Μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow T - W_x = m \cdot \alpha_{cm}$$

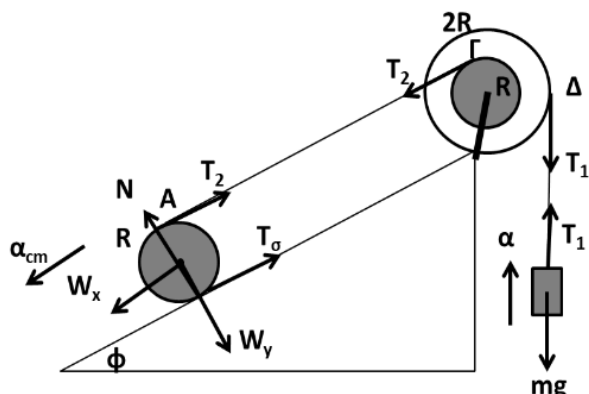
Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow -T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha_{γων}$$

Σχέση επιταχύνσεων:

$$\alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{γων}$$

Θ. Συνδιασμοί σε κεκλιμένο επίπεδο (τροχαλία – κύλινδρος με νήμα)



Σώμα m:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot a \rightarrow$

$$T_1 - m \cdot g = m \cdot a$$

Τροχαλία:

Στροφική κίνηση: $\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \alpha_{γων1} \rightarrow$

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot 2R = I_{cm} \alpha_{γων1}$$

Κύλινδρος:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow$

$$W_x - T_2 - T_\sigma = M \cdot \alpha_{cm}$$

Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm2} \cdot \alpha_{\gamma\omega v2} \rightarrow T_{\sigma} \cdot R - T_2 \cdot R = I_{cm2} \cdot \alpha_{\gamma\omega v2}$$

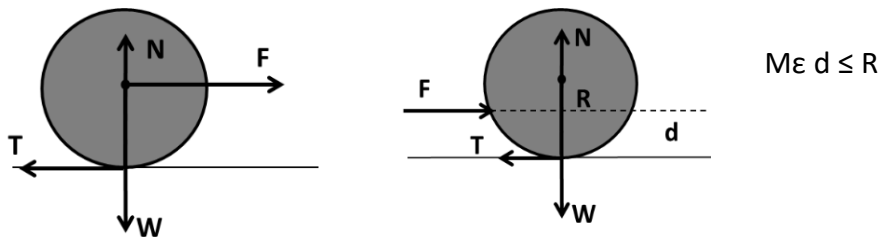
Σχέσεις επιταχύνσεων:

$$\alpha = \alpha_{\Delta} \text{ (με } \alpha_{\Delta} = 2R \cdot \alpha_{\gamma\omega v1}), \alpha_A = \alpha_{\Gamma} \text{ (με } \alpha_{\Gamma} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega v1}), \alpha_A = 2\alpha_{cm} \text{ (με } \alpha_{cm} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega v2})$$

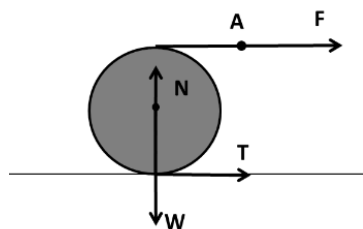
Η τριβή κατά την κύλιση στερεού

Οριζόντιο επίπεδο

1. Η τριβή έχει φορά αντίθετη με τη φορά κίνησης για να επιταχύνει τη στροφική κίνηση



2. Η τριβή έχει φορά τη φορά κίνησης επειδή:



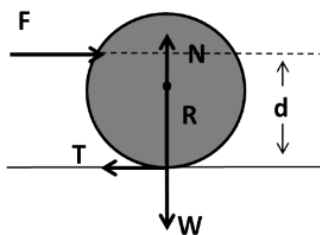
$$\text{Ισχύει } \Sigma F_x = m\alpha_{cm} \rightarrow F + T = m\alpha_{cm}$$

$$\text{και } \Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \alpha_{\gamma\omega v} \rightarrow (F - T)R = kmR^2 \alpha_{\gamma\omega v} \text{ (με } k \leq 1)$$

$$\text{οπότε } F - T = k m \alpha_{cm}$$

γιατί σε διαφορετική περίπτωση η διαφορά των δυνάμεων θα ήταν μεγαλύτερη από το άθροισμα

3. Για $2R \geq d > R$ υπάρχει θέση εφαρμογής της δύναμης στην οποία η στατική τριβή είναι μηδέν (επειδή αλλάζει η φορά της μεταξύ των δύο αυτών θέσεων)



$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \rightarrow F - T = m\alpha_{cm}$$

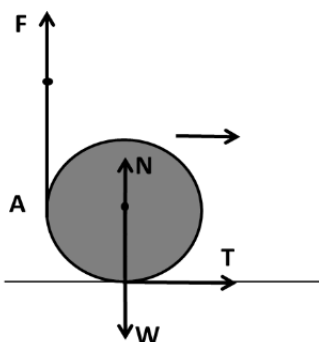
$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \alpha_{\gamma\omega v} \rightarrow F(d - R) + TR = kmR^2 \alpha_{\gamma\omega v}$$

$$\alpha_{cm} = R \alpha_{\gamma\omega v}$$

$$\text{Για } T=0 \text{ παίρνουμε: } F = m\alpha_{cm}, m\alpha_{cm}(d - R) = kmR\alpha_{cm} \text{ οπότε } d = (k+1)R$$

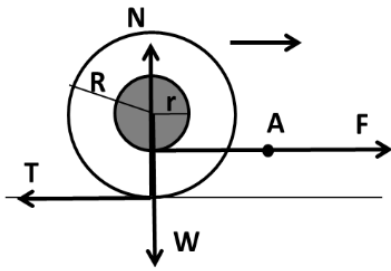
4. Η δύναμη ασκείται μέσω νήματος για διάφορες κατευθύνσεις

4Α.



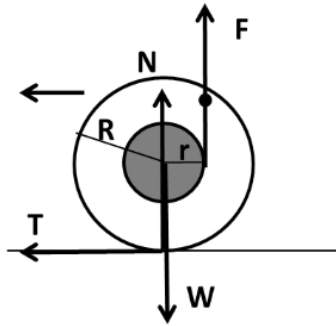
Η φορά της τριβής είναι προς τα δεξιά για να επιταχύνει τη στροφική κίνηση

4B.



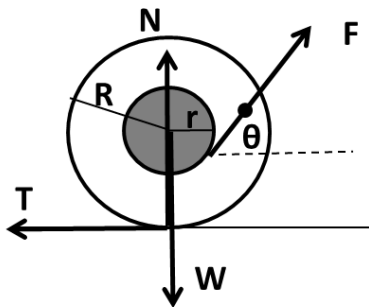
Το σώμα κινείται προς τα δεξιά και το νήμα τυλίγεται

4Γ.



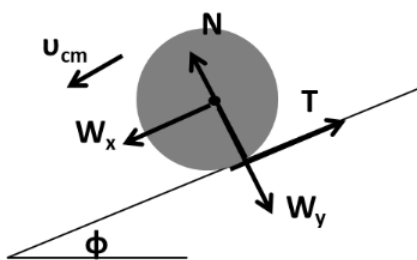
Το σώμα κινείται προς τα αριστερά και η τριβή έχει φορά προς τα αριστερά για να επιταχύνει τη μεταφορική κίνηση

4Δ.

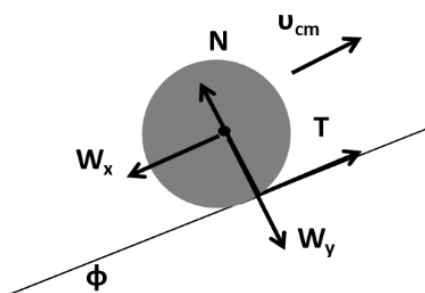


Μεταξύ των δύο θέσεων (Β, Γ) υπάρχει μια γωνιακή θέση του νήματος για την οποία το σώμα περιστρέφεται χωρίς να μεταφέρεται
Στην περίπτωση αυτή η τριβή είναι τριβή ολίσθησης

Κεκλιμένο επίπεδο



Στην κάθοδο η φορά της τριβής προς τα πάνω για να επιταχύνει τη στροφική κίνηση



Στην άνοδο η φορά της τριβής προς τα πάνω για να επιβραδύνει τη στροφική κίνηση