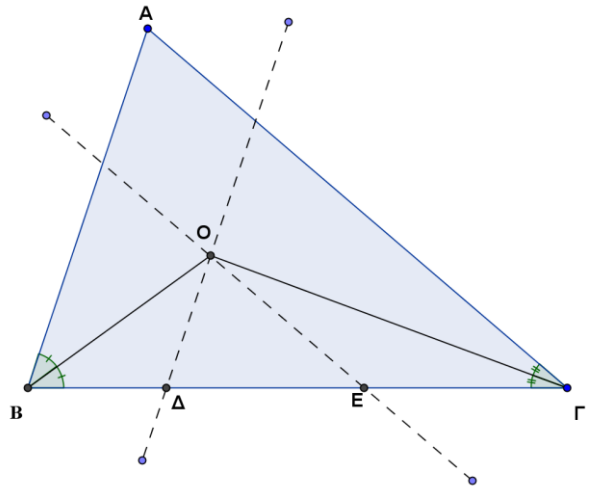


Έστω ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των

1. γωνιών του  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο  $O$ . Η παράλληλη από το  $O$  προς την  $AB$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $\Delta$  και η παράλληλη από το  $O$  προς την  $AG$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ .

α. Να δείξετε ότι  $\Delta O = B\Delta$  και  $O E = E\Gamma$ .

β. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου  $O\Delta E$  είναι ίση με την πλευρά  $B\Gamma$ .

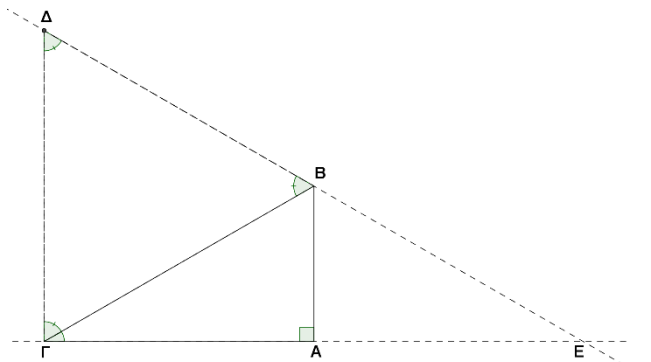


Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με

2.  $\Gamma = 30^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$ . Αν οι ευθείες  $AG$  και  $B\Delta$  τέμνονται στο  $E$  να δείξετε ότι:

α.  $AB \parallel \Gamma\Delta$

β. Το  $A$  είναι το μέσο του τμήματος  $E\Gamma$ .

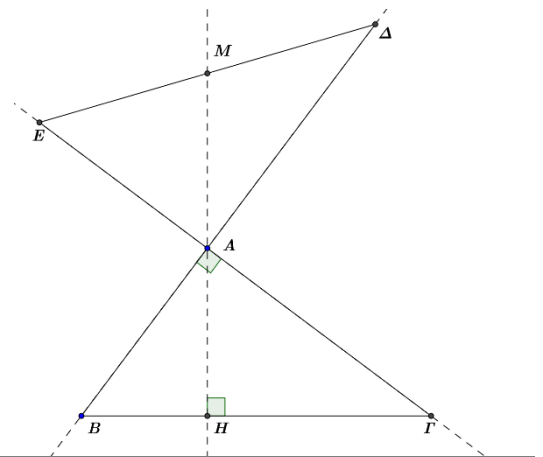


Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$ .

3. Στην προέκταση της πλευράς  $BA$  παίρνουμε τμήμα  $A\Delta = A\Gamma$  και στην προέκταση της πλευράς  $\Gamma A$  παίρνουμε τμήμα  $A E = A B$ .

α. Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $B\Delta E$  και  $E B \Gamma$  είναι ίσα μεταξύ τους.

β. Να αποδείξετε ότι το ύψος  $AH$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , προεκτεινόμενο προς το  $A$ , διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $E\Delta$ .

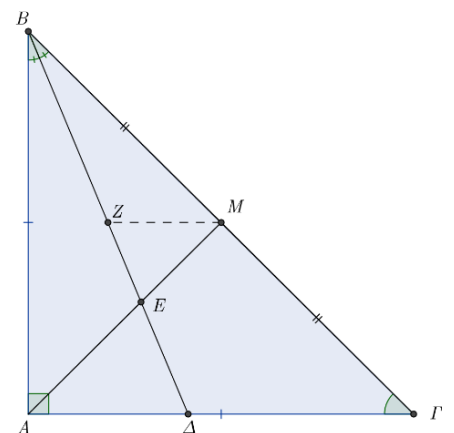


Έστω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Η διάμεσός του  $AM$  και η διχοτόμος του  $B\Delta$  τέμνονται στο  $E$ .

4. Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = 2 \cdot E M$ .

Υπόδειξη:

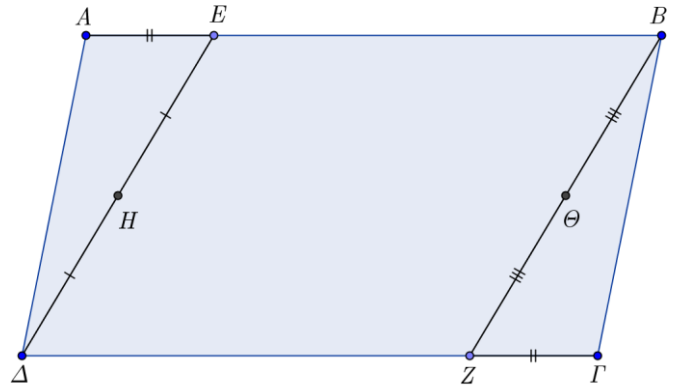
Φέρτε από το  $M$  παράλληλη στην  $A\Gamma$  και δείξτε ότι το τρίγωνο  $E Z M$  είναι ισοσκελές και ότι  $Z$  μέσο της  $B\Delta$



## Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Γεωμετρία Α Λυκείου

Στην πλευρά AB παραλληλογράμμου ABΓΔ παίρνουμε ένα τμήμα AE και στην πλευρά του ΓΔ παίρνουμε τμήμα ΓΖ=AE. Αν Η, Θ τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΕ και ΒΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- 5.
- α. Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
  - β. Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
  - γ. Το ΗΕΘΖ είναι παραλληλόγραμμο.
  - δ. Το ΑΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

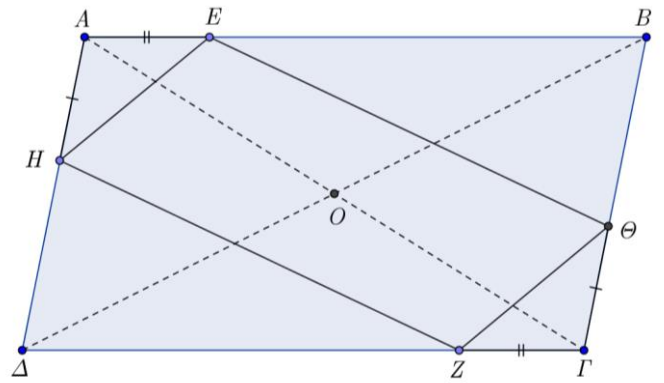


Υπόδειξη:

Δείξτε ότι  $EH=BΘ$

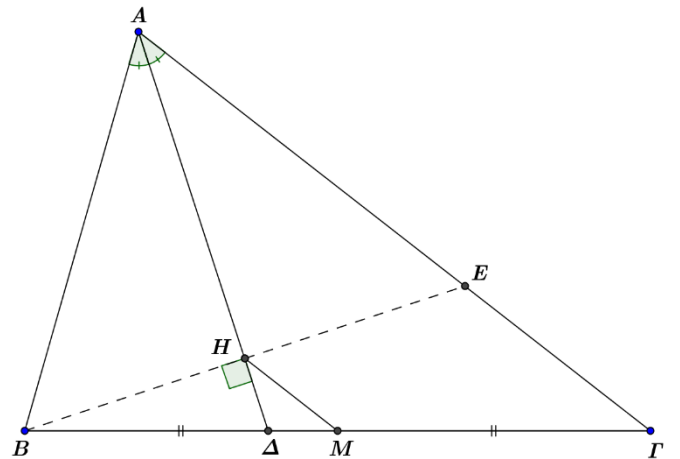
- 6.
- Έστω ένα παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Στην πλευρά του AB παίρνουμε ένα τμήμα AE και στην πλευρά του ΓΔ το τμήμα ΓΖ=AE. Επίσης στην πλευρά του ΑΔ παίρνουμε ένα τμήμα ΑΗ και στην πλευρά του ΓΒ το τμήμα ΓΘ=ΑΗ. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το ΕΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το σημείο τομής των διαγωνίων του ABΓΔ συμπίπτει με αυτό των διαγωνίων του ΕΘΖΗ.



- 7.
- Θεωρούμε ένα τρίγωνο με ABΓ με  $ΑΓ > ΑΒ$ , τη διχοτόμο του ΑΔ και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Η κάθετος από το Β στην ΑΔ την τέμνει στο Η και η προέκτασή της τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $ΑΒ=ΑΕ$ .
- β.  $ΗΜ // ΑΓ$ .
- γ.  $ΗΜ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

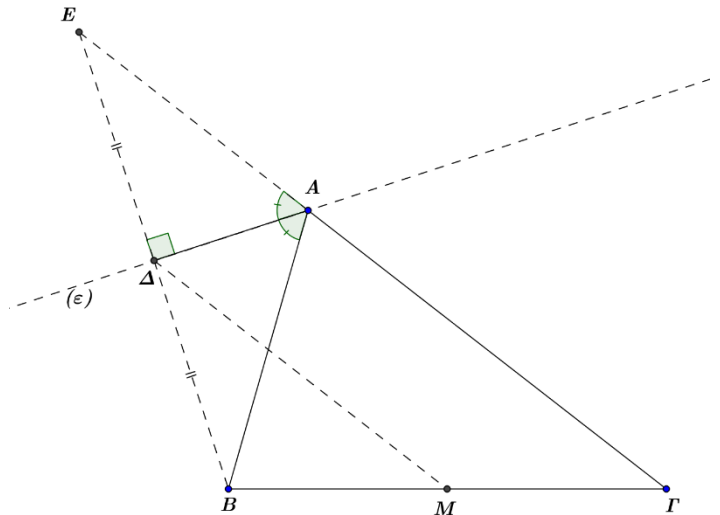


8. Θεωρούμε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το μέσο  $M$  της πλευράς του  $B\Gamma$  και την ευθεία  $(\epsilon)$  που περιέχει την διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας του  $A$ . Η κάθετος από το  $B$  προς την  $(\epsilon)$  τέμνει αυτήν στο  $\Delta$  και την ευθεία  $AG$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α.  $AB=AE$ .

β.  $M\Delta // AG$

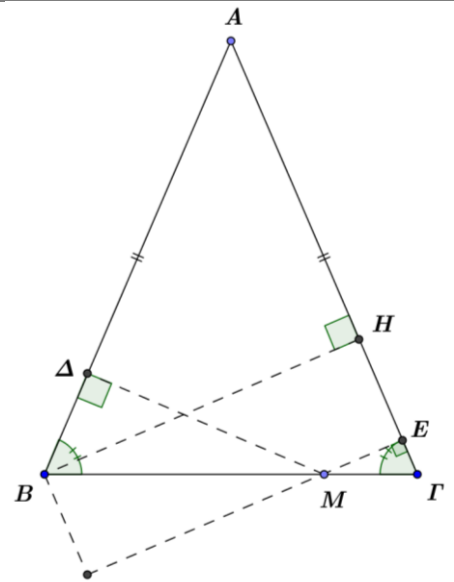
γ.  $M\Delta = \frac{AB+AG}{2}$



9. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , ένα σημείο  $M$  στην βάση του  $B\Gamma$  και τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  προς τις ίσες πλευρές  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα  $M\Delta+ME$  είναι σταθερο και ίσο με το ύψος  $BH$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , για τις διάφορες θέσεις του  $M$  στην βάση  $B\Gamma$ .

Υπόδειξη:

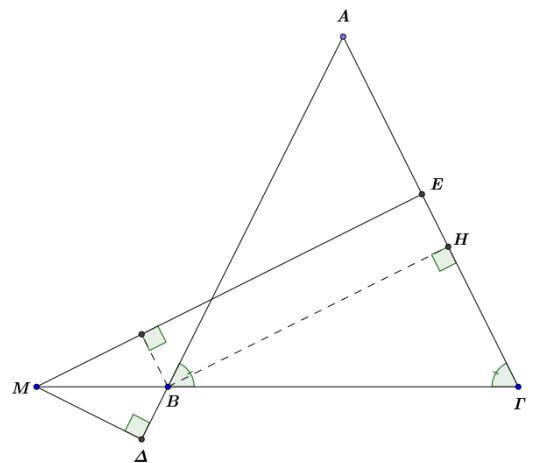
Φέρτε από το  $B$  παράλληλη στην  $AG$ .



10. Έστω  $AB\Gamma$  ισοσκελές τρίγωνο με  $AB=AG$ . Στην προέκταση της  $GB$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $M$ . Από το  $M$  φέρνουμε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  προς τις ίσες πλευρές του  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η διαφορά  $ME-M\Delta$  είναι σταθερή για τις διάφορες θέσεις του  $M$  στην προέκταση.

Υπόδειξη:

Φέρτε το ύψος  $BH$  και την παράλληλη από το  $B$  στην  $AG$ .

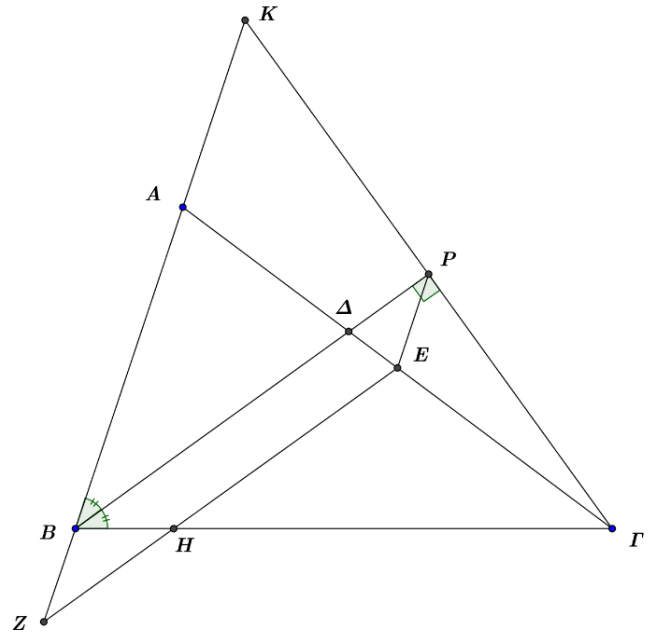


- α. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου που δεν είναι ρόμβος, σχηματίζουν ορθογώνιο.
11. β. Δείξτε ότι οι διαγώνιοι του παραπάνω ορθογωνίου είναι παράλληλες στις πλευρές του παραλληλογράμμου και
- γ. κάθε μια από αυτές ίση με την διαφορά δυο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρνουμε τη διχοτόμο  $BD$  και από το μέσο  $E$  της πλευράς  $AG$ , φέρνουμε

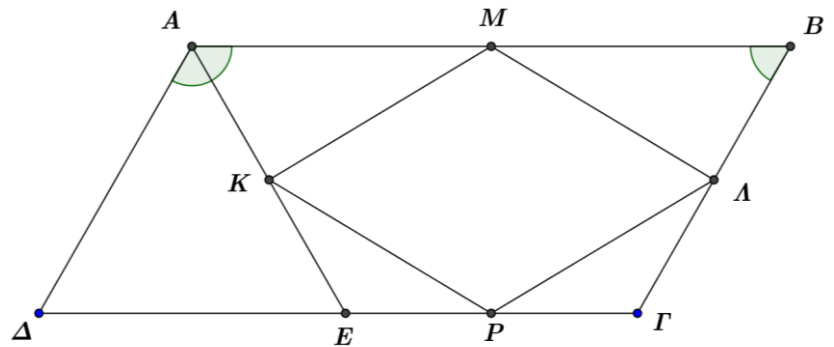
12. παράλληλη προς τη διχοτόμο  $BD$ , που τέμνει τις  $AB, B\Gamma$  στα  $Z, H$  αντίστοιχα. Ακόμα φέρνουμε  $GP$  κάθετη στη  $BD$  που τέμνει την  $AB$  στο  $K$ . Να δειχθεί:

- α. Το τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- β. Το τμήμα  $PE$  είναι παράλληλο προς το  $AK$  και ίσο με το μισό του.
- γ. Το τετράπλευρο  $ZEPB$  είναι παραλληλόγραμμο.
- δ.  $AK = 2 \cdot ZB$
- ε. Το τρίγωνο  $BZH$  είναι ισοσκελές.
- στ.  $H\Gamma = AZ$ .



Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 2\hat{B}$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει την πλευρά  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $E$ . Αν είναι  $K, \Lambda, M, P$  τα μέσα των  $AE, AB, B\Gamma$  και  $E\Gamma$  αντίστοιχα, τότε:

13. α. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  του παραλληλογράμμου
- β. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M P$  είναι ρόμβος.
- Αν  $AB = 2 \cdot B\Gamma$ , να αποδειχθεί ότι :
- δ. Η γωνία  $AEB$  είναι ορθή.
- ε. Το τρίγωνο  $\Delta A\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- στ.  $\Delta\Lambda = 2 \cdot AK$ , όπου  $K$  είναι η προβολή του  $A$  στην  $\Gamma\Delta$ .

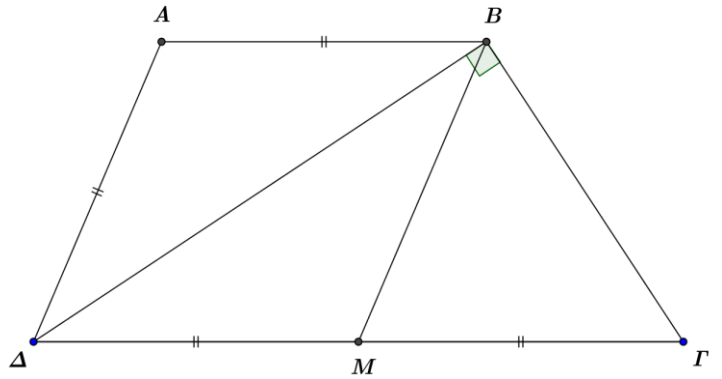


Σε ένα τραπέζιο  $ABΓΔ$  με  $AB//ΓΔ$

είναι  $ΓΔ = 2 \cdot AB = 2 \cdot AD$ .

14. Έστω  $M$  το μέσο του  $ΓΔ$ . Να αποδειχθεί ότι :

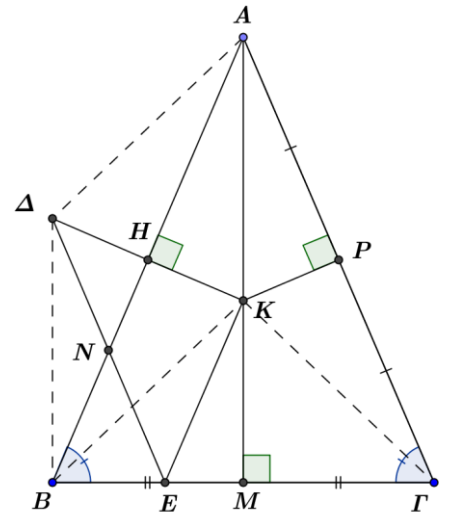
- α.  $AD=BM$
- β. Η  $ΔB$  διχοτομεί τη γωνία  $Δ$
- γ. Η γωνία  $ΔBΓ$  είναι ορθή
- δ. Αν η γωνία  $Γ$  είναι ίση με  $60^\circ$  να αποδειχθεί ότι το τραπέζιο είναι ισοσκελές.



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABΓ$ , το μέσο  $M$  της βάσης  $BΓ$  και η μεσοκάθετος της πλευράς  $ΑΓ$  που τέμνει την  $AM$  στο  $K$ . Από το

15.  $K$  φέρνουμε κάθετη στην  $AB$  που την τέμνει στο σημείο  $H$  και την προεκτείνουμε κατά  $ΗΔ=KH$ . Αν η κάθετη προς την  $KΔ$  στο σημείο  $K$  τέμνει τη  $BΓ$  στο  $E$ , να αποδειχθεί ότι:

- α.  $KA = KB$
- β. Το τετράπλευρο  $AΔBK$  είναι ρόμβος.
- γ. Η  $ΔB$  είναι κάθετη στην  $BΓ$ .
- δ. Η  $AB$  διέρχεται από το μέσο  $N$  του  $ΔE$ .
- ε.  $ΔE//ΑΓ$

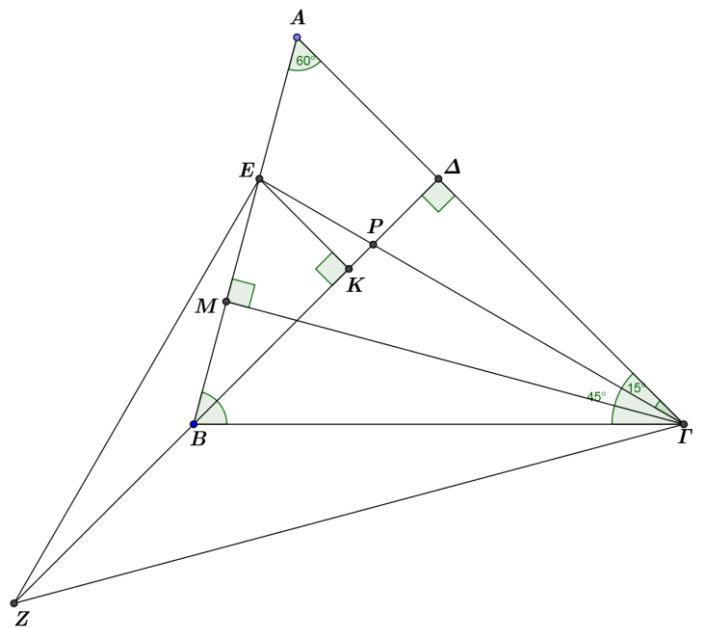


Σε ένα τρίγωνο  $ABΓ$  η γωνία  $\hat{A}$  είναι  $60^\circ$  και

η γωνία  $\hat{Γ}$  είναι  $45^\circ$ . Φέρνουμε το ύψος  $BΔ$

16. και στην  $AB$  παίρνουμε σημείο  $E$ , έτσι ώστε η γωνία  $ΑΓE$  να είναι  $15^\circ$ . Η κάθετη προς την  $EΓ$  στο  $E$  τέμνει την ευθεία  $ΔB$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι :

- α.  $ΓB=ΓE$  και  $BP= BE$ , όπου  $P$  είναι το σημείο τομής των  $BΔ, ΓE$ .
- β. Το τρίγωνο  $BEZ$  είναι ισοσκελές.
- γ. Αν  $K, M$  είναι οι προβολές των  $E, Γ$  στις  $ΔZ, AB$  αντίστοιχα, τότε τα τρίγωνα  $BΜΓ$  και  $EΚZ$  είναι ίσα.



- δ. Η γωνία  $ΔZΓ$  είναι ίση με  $30^\circ$ .

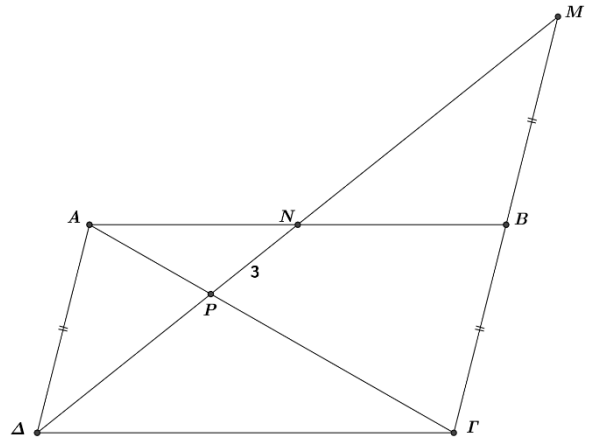
Στην προέκταση της πλευράς ΓΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τμήμα

17.  $BM=BG$ .

Η ΜΔ τέμνει την ΑΒ στο Ν και την ΑΓ στο Ρ. Αν  $PN=3$ , να υπολογιστεί το τμήμα ΡΔ.

Υπόδειξη:

Βρείτε βαρύκεντρο και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα του.

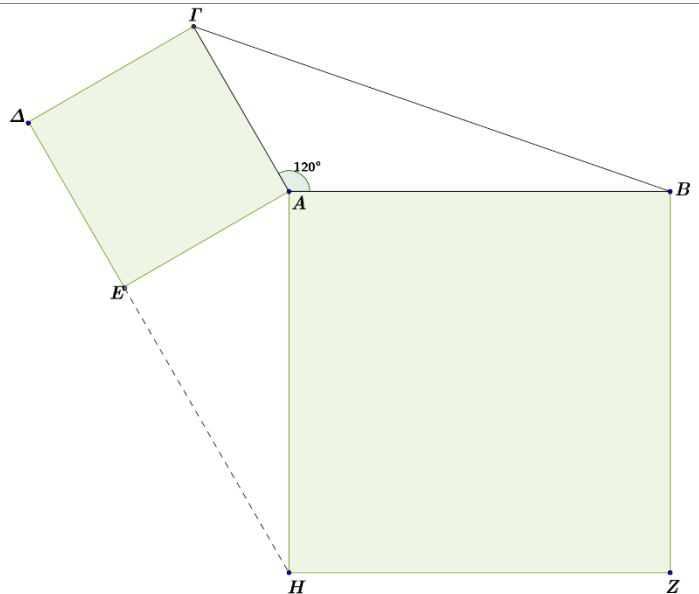


Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 2 \cdot AG$  και

$\angle A = 120^\circ$ .

18. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΖΗ και ΑΓΔΕ.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Η είναι συνευθειακά.



Δίνεται κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ

στο οποίο οι γωνίες Γ και Ε είναι ορθές, οι πλευρές ΒΓ και ΓΔ είναι ίσες, καθώς επίσης ίσες είναι και οι πλευρές ΔΕ, ΑΕ. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, προεκτείνουμε την ΕΜ κατά ίσο τμήμα ΜΗ. Να δείξετε ότι:

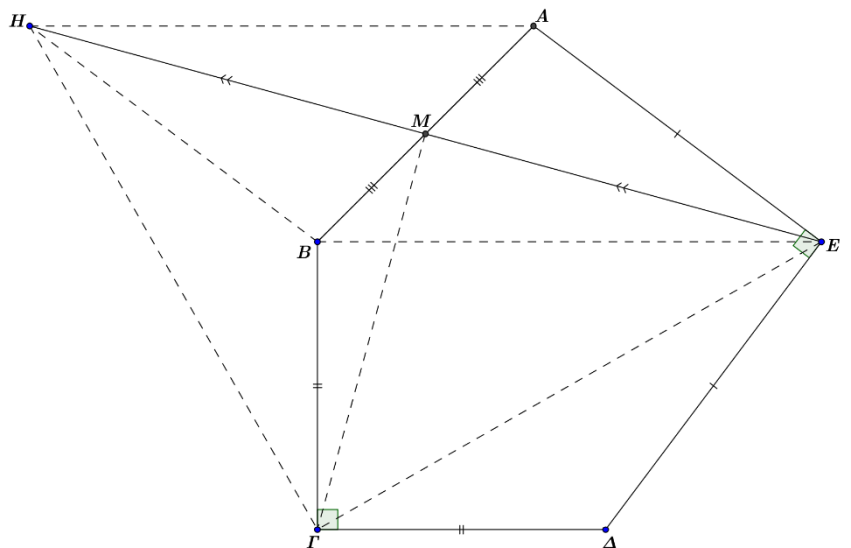
19.

α. Το τετράπλευρο ΑΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα ΗΒΓ, ΕΔΓ είναι ίσα.

γ. Το τρίγωνο ΕΓΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

δ. Το τρίγωνο ΕΜΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

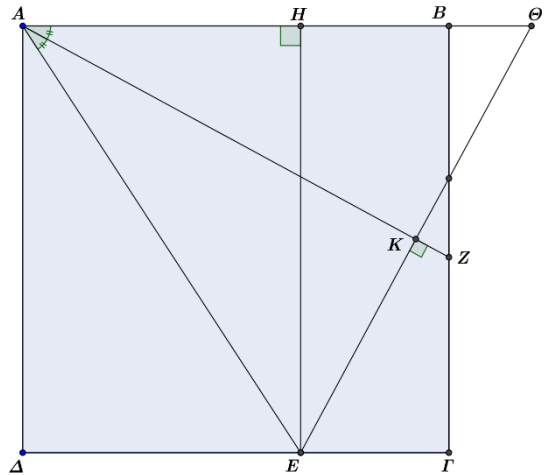


Δίνεται τετράγωνο  $ABΓΔ$  και τυχαίο σημείο  $E$  της πλευράς  $ΔΓ$ . Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας

20.  $BAE$  που τέμνει τη  $BΓ$  στο  $Z$  καθώς και  $EΚ \perp AZ$ ,  $EΗ \perp AB$ .

Αν η  $EΚ$  τέμνει την  $AB$  στο  $\Theta$  να δειχθεί ότι:

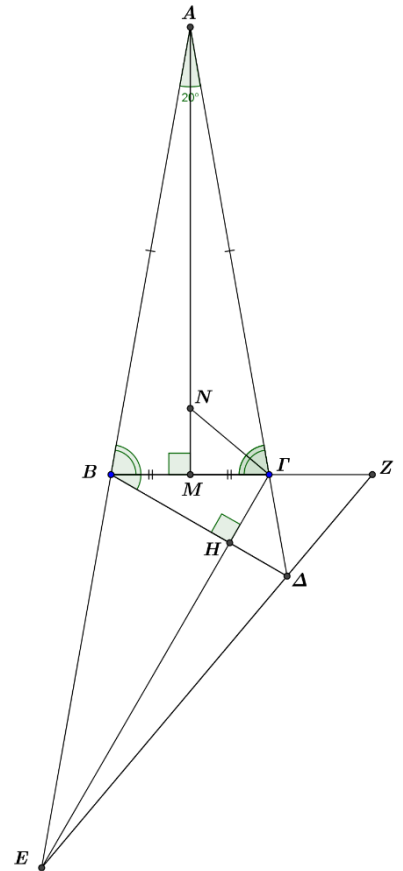
- α.  $AE = A\Theta$
- β. Τα τρίγωνα  $\Theta HE$ ,  $ABZ$  είναι ίσα.
- γ.  $AE = \Delta E + BZ$ .



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABΓ$  ( $AB = AΓ$ ) με  $\angle B A Γ = 20^\circ$ . Από το

21. σημείο  $B$  φέρνουμε ημιευθεία που σχηματίζει με τη  $BΓ$  γωνία  $30^\circ$  και τέμνει την προέκταση της  $AΓ$  στο  $\Delta$ . Από την κορυφή  $\Gamma$  φέρνουμε κάθετο στη  $B\Delta$  που τέμνει την  $B\Delta$  στο  $H$  και την  $AB$  στο  $E$ . Αν  $AM$  το ύψος του τριγώνου  $ABΓ$  και  $ΓN$  η διχοτόμος της γωνίας του  $\Gamma$ , να δειχθεί ότι:

- α.  $BΓ = 2ΓH$ .
- β. Τα τρίγωνα  $ΓMN$ ,  $ΓHΔ$  είναι ίσα.
- γ. Το τρίγωνο  $ΓAE$  είναι ισοσκελές.
- δ. Τα τρίγωνα  $ΝΓA$ ,  $\Delta ΓE$  είναι ίσα.
- ε. Η γωνία  $\Gamma ZE$  ισούται με  $50^\circ$ , όπου  $Z$  το σημείο τομής των  $E\Delta$ ,  $BΓ$ .

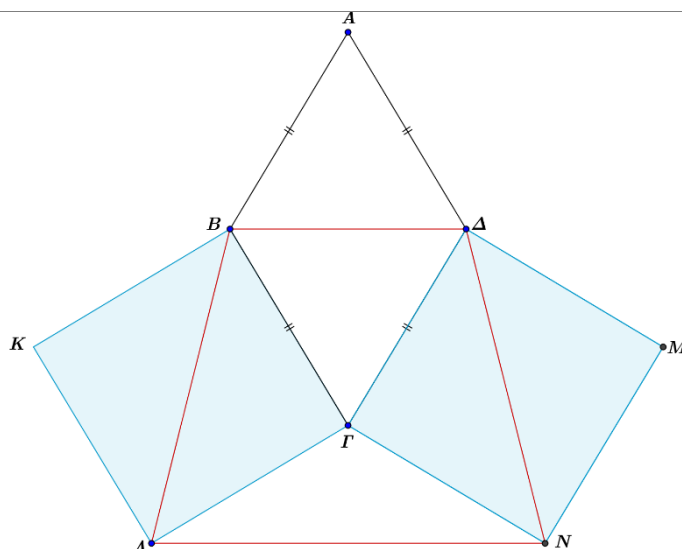


## Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Γεωμετρία Α Λυκείου

Δίνεται ρόμβος  $ABΓΔ$  με  $\hat{A} \neq 90^{\circ}$ .

22. Εξωτερικά του ρόμβου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα  $BΓΛΚ$  και  $ΓΔΜΝ$ .

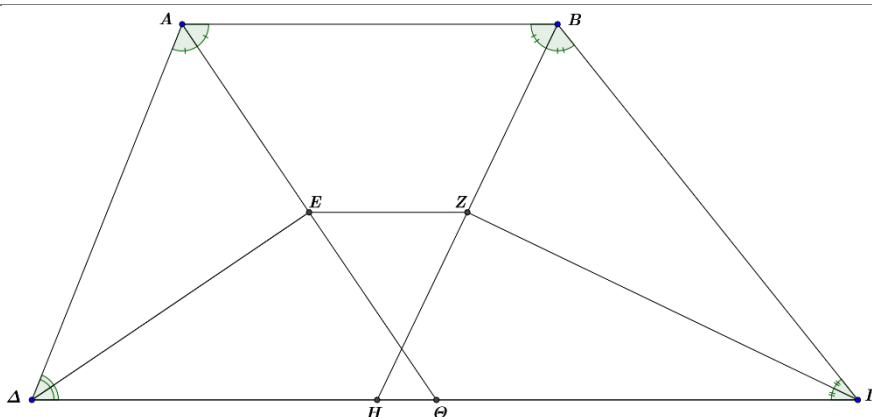
- Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $BΛΝΔ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Σε ποια περίπτωση το πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία  $A, B, \Lambda, N, \Delta$  είναι τρίγωνο;



Σε τραπέζιο  $ABΓΔ$ , οι

23. διχοτόμοι των γωνιών  $A$  και  $\Delta$  τέμνονται στο  $E$  και οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο  $Z$ . Αν οι προεκτάσεις των  $AE$  και  $BZ$  τέμνουν τη  $ΓΔ$  στα  $\Theta$  και  $H$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $AΔ\Theta$  και  $BΓH$  είναι ισοσκελή
- Τα  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $A\Theta$  και  $BH$  αντίστοιχα.
- $EZ // AB$



Οι Ασκήσεις 1-11 είναι από το βιβλίο του Α. Κυριακόπουλου «Γεωμετρία για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις του Λυκείου»

Οι Ασκήσεις 11-23 είναι επιλεγμένες από προσωπικές σημειώσεις και τον ιστότοπο [www.mathematica.gr](http://www.mathematica.gr).

Οι Ασκήσεις 14, 22 και 23 αναφέρονται στις παραγράφους 5.10 και 5.11 που ακόμα δεν έχετε διδαχθεί.

Οι παραπάνω ασκήσεις έχουν ως στόχο την καλύτερη προετοιμασία σας, για τις επερχόμενες εξετάσεις του Μαΐου.

Σε καμία περίπτωση δεν θεωρούνται ότι είναι επαρκείς αλλά λειτουργούν συμπληρωματικά στις ασκήσεις που έχουμε κάνει στην τάξη.