Επαναληπτικές Ασκήσεις Άλγεβρας Α Λυκείου

1. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=2x^2-2(\lambda-5)x-(\lambda-5)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου ισούται με $\Delta=4(\lambda-5)(\lambda-3)$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν x_1,x_2 είναι οι άνισες ρίζες του τριωνύμου να δείξετε ότι ισχύει: $x_1^2+x_2^2=(\lambda-5)(\lambda-4)$.

δ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο $f(x)$ να είναι θετικό για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$.

2. Έστω η εξίσωση $|a-1|x^2+|3-2a|x+|1-a|=0$ με $a\neq 1$ ως προς x έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

α. Να βρεθεί σε ποιο διάστημα ανήκει το a.

β. Να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι αρνητικοί αριθμοί και η μια είναι αντίστροφη της άλλης.

γ. Αν η μια ρίζα (η ϱ_1) είναι τετραπλάσια της άλλης (της ϱ_2) να βρείτε τις ρίζες ϱ_1 και ϱ_2.

δ. Να υπολογίσετε τον αριθμό a, αν οι ρίζες είναι αυτές του τρίτου ερωτήματος.

3. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+1=0$ με $a,\beta\in\mathbb{R}$ και $a<0$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με δεδομένο ότι ισχύει $|4a+2\beta+1|<|2a|$ να αποδείξετε ότι $|x_1-2|\cdot|x_2-2|<2$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,4)$.

4. **A)**

α. Να λύσετε τις εξισώσεις $16-x^2=0$ και $x^4-2x^2+1=0$.

β. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+5x-7$.

B) Έστω η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{|-x^2+5x-7|-3}{(16-x^2)(x^4-2x^2+1)}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες έχει νόημα ο τύπος της f.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$.

5. Έστω η εξίσωση $x^2+4\lambda x+2\lambda^2+2=0 \quad (1)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και x ο άγνωστος..

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

β. Αν η εξίσωση έχει 2 πραγματικές άνισες λύσεις και μία από αυτές είναι ο αριθμός -2, τότε να βρείτε την άλλη λύση και το $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Αν x_1,x_2 οι δύο άνισες λύσεις της εξίσωσης, τότε να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε να ισχύει $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}<\lambda^2+1$.

6. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και είναι λύσεις της ανίσωσης $x^2 - 3x + 2 > 0$.

7. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ ώστε η σχέση $-3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{\lambda+1} \cdot x^2 + \sqrt{\lambda^2 + \lambda + 4} \cdot x + \sqrt{\lambda+1} = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει λύση στο $\mathbb{R}$.
β. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda > 3$ η εξίσωση έχει δύο αντίστροφες ρίζες.
γ. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα την $x_0 = -1$ και να δείξετε ότι αυτή είναι διπλή.

9. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)x^2 - 2(2\lambda-1)x + (2\lambda-1)(\lambda+2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να είναι δευτεροβάθμια με δύο ρίζες άνισες.
β. Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες να είναι:
  i. ομόσημες
  ii. αρνητικές
  iii. ετερόσημες, με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να απλοποιήσετε τον τύπο της .
β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \dfrac{f(3) - f(1)}{\sqrt{f(4)} - 2}$.
γ. Να λυθεί η εξίσωση $|f(4)x - 1| = |2 - f(3)x|$.

11. Έστω η εξίσωση $|a-1|x^2 + |3-2a|x + |1-a| = 0, a \neq 1$ η οποία έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες ως προς x.

α. Να βρεθεί σε ποιο διάστημα ανήκει το a.
β. Να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι αρνητικοί αριθμοί και η μια αντίστροφη της άλλης.
γ. Αν η μία ρίζα x_1 είναι τετραπλάσια της άλλης x_2 να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και το a.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2} + \sqrt{2x+1}$ και $g(x) = x - 5$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g.
β. Να αποδείξετε ότι $f(0) > \dfrac{12}{5}$.
γ. Να ρητοποιήσετε την παράσταση $A = \dfrac{2}{f(1) - 3} + \dfrac{1}{f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.
δ. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δεν τέμνονται.

13. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=-x^2-(\lambda-1)x+\lambda+2,\ \lambda\in\mathbb{R}$

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

β. Αν x_1,x_2 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το $x_1^2+x_2^2$ να γίνεται ελάχιστο.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}, x\in[-1,2]$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-3x+3$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ. Να βρείτε τα σημεία , στα οποία η γραφική παράσταση C_f τέμνει τους άξονες.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ε. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x+1}\right)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε οτι $f(x)=x^2-x-1$.

γ. Να δείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες τις x_1,x_2.

δ. Αν x_1 η θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, να αποδείξετε οτι οι αριθμοί x_1 και x_1-1 είναι αντίστροφοι.

ε. Να κατασκευάσετε εξίσωση με ρίζες $\varrho_1=2x_1+2x_2-5$ και $\varrho_2=2x_1x_2-3$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}+\dfrac{\varkappa}{\sqrt{|x|-1}}$.

α. Να λυθούν οι ανισώσεις $4-|x|>0$ και $|x|-1>0$.

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

γ. Αν το σημείο $A(3,-12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε οτι $\varkappa=0$.

δ. Για $\varkappa=0$, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|-x^2+x-2|-4}{x^2-6x+8}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-x^2+x-2<0$.

γ. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f απλοποιείται στη μορφή $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}, x\in A$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $x\cdot f(x)>-\dfrac{f(5)}{2}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\left|f(x)\right|=2$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0\le f(x)\le 2$.

19. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(|x|+\sqrt{x+1}\right)\left(|x|-\sqrt{x+1}\right)$.

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και αποδείξτε ότι $f(x)=x^2-x-1$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες τις οποίες και να υπολογίσετε.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^2\right)=11$,όπου x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

δ. Αν x_1,x_2 οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος Δ2, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}x_1\right)^{2012}\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}x_2\right)^{2012} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\sqrt[4024]{A}-3}+\frac{1}{\sqrt[4024]{A}+3}.$$

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2(m-4)x+36=0, m\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $m\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

β. Να βρείτε τα $m\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

γ. Να βρείτε τα $m\in\mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $x^2+2(m-4)x+36>0$ να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Να αποδείξετε ότι αν $m=-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

ε. Αν x_1,x_2 είναι δύο άνισες λύσεις της εξίσωσης, να λύσετε την ανίσωση $\left|x_1+x_2\right|\le x_1x_2$.

Οι παραπάνω ασκήσεις έχουν ως στόχο την καλύτερη προετοιμασία σας, για τις επερχόμενες εξετάσεις του Μαΐου. Σε καμία περίπτωση δεν θεωρούνται ότι είναι επαρκείς αλλά λειτουργούν συμπληρωματικά στις ασκήσεις που έχουμε κάνει στην τάξη.

Είναι μαζεμένες από το διαδίκτυο και κυρίως τον ιστότοπο www.mathematica.gr και τις έχουν προτείνει εξαιρετικοί συνάδελφοι όπως Μ. Στεργίου, Δ. Ιωάννου, Σ. Καπελίδης, Α. Κυριακόπουλος, Λ. Πρωτοπαπάς και άλλοι.