20 Επαναληπτικές Ασκήσεις Άλγεβρας Α Λυκείου

1. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=2x^2-2(\lambda-5)x-(\lambda-5)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου ισούται με $\Delta=4(\lambda-5)(\lambda-3)$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν x_1,x_2 είναι οι άνισες ρίζες του τριωνύμου να δείξετε ότι ισχύει: $x_1^2+x_2^2=(\lambda-5)(\lambda-4)$.

δ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο $f(x)$ να είναι θετικό για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta=\beta^2-4a\gamma\Rightarrow\Delta=4(\lambda-5)^2+8(\lambda-5)=4(\lambda-5)(\lambda-5+2)=4(\lambda-5)(\lambda-3)$$

β. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει και αρκεί:

$$\Delta>0\Leftrightarrow(\lambda-5)(\lambda-3)>0\Leftrightarrow\lambda^2-8\lambda+15>0\Leftrightarrow(\lambda<3 \text{ ή } \lambda>5)$$

δηλαδή $\lambda\in(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

γ. Αν $\lambda\in(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$ και x_1,x_2 οι ρίζες του τριωνύμου τότε:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{a}\Rightarrow x_1+x_2=\lambda-5 \text{ και } x_1x_2=\frac{\gamma}{a}\Rightarrow x_1x_2=-\frac{\lambda-5}{2}$$

Είναι:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(\lambda-5)^2-2\left(-\frac{\lambda-5}{2}\right)=$$

$$=(\lambda-5)^2+(\lambda-5)=(\lambda-5)(\lambda-5+1)=(\lambda-5)(\lambda-4)$$

δ. Για να είναι το τριώνυμο θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επειδή $a=2>0$ αρκεί και πρέπει:

$$\Delta<0\Leftrightarrow4(\lambda-5)(\lambda-3)<0\Leftrightarrow3<\lambda<5$$

2. Έστω η εξίσωση $|a-1|x^2+|3-2a|x+|1-a|=0$ με $a\neq1$ ως προς x έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

α. Να βρεθεί σε ποιο διάστημα ανήκει το a.

β. Να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι αρνητικοί αριθμοί και η μια είναι αντίστροφη της άλλης.

γ. Αν η μια ρίζα (η ϱ_1) είναι τετραπλάσια της άλλης (της ϱ_2) να βρείτε τις ρίζες ϱ_1 και ϱ_2.

δ. Να υπολογίσετε τον αριθμό a, αν οι ρίζες είναι αυτές του τρίτου ερωτήματος.

Λύση

α. Παρατηρούμε ότι: $|1-a|=|a-1|$

Για να έχει η εξίσωση δυο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει και αρκεί:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow |3-2a|^2-4|1-a||a-1|\geq 0 \Leftrightarrow |3-2a|^2-4|a-1|^2\geq 0 \Leftrightarrow (3-2a)^2-4(a-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$9-12a+4a^2-4a^2+8a-4\geq 0 \Leftrightarrow -4a+5\geq 0 \Leftrightarrow a\leq \frac{5}{4}$$

Άρα $a\in(-\infty,1)\cup\left(1,\frac{5}{4}\right)$

β. Από Vietta έχω: $P=x_1x=\frac{\gamma}{a}=\frac{|1-a|}{|a-1|}=1>0$ άρα οι ρίζες είναι αντίστροφες και ομόσημες (διαφορετικά το γινόμενο τους θα ήταν αρνητικός αριθμός) και εφόσον $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{a}=-\frac{|3-2a|}{|a-1|}<0$ θα έχουμε ότι είναι και οι 2 αρνητικές.

γ. Έχω:

$$\left.\begin{matrix}\varrho_1=4\varrho_2\\ \varrho_1\varrho_2=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\varrho_1=4\varrho_2\\ 4\varrho_2\varrho_2=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\varrho_1=4\varrho_2\\ 4\varrho_2{}^2=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\varrho_1=4\varrho_2\\ \varrho_2{}^2=\frac{1}{4}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\varrho_1=4\varrho_2\\ \varrho_2=\frac{1}{2}\text{ απορ. ή }\varrho_2=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\varrho_1=-2\\ \varrho_2=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$$

δ. Ο αριθμός $\varrho_1=-2$ είναι ρίζα της εξίσωσης άρα την επαληθεύει.

Επομένως::

$$|a-1|(-2)^2+|3-2a|(-2)+|1-a|=0\Leftrightarrow 4|a-1|-2|3-2a|+|a-1|=0\Leftrightarrow 5|a-1|=2|3-2a|\Leftrightarrow$$

$$\frac{|3-2a|}{|a-1|}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{3-2a}{a-1}\right|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{3-2a}{a-1}=\frac{5}{2}\text{ ή }\frac{3-2a}{a-1}=-\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$(6-4a=5a-5\text{ ή }6-4a=-5a+5)\Leftrightarrow(11=9a\text{ ή }a=-1\text{ απορ.})\Leftrightarrow a=\frac{11}{9}$$

3. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+1=0$ με $a,\beta\in\mathbb{R}$ και $a<0$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με δεδομένο ότι ισχύει $|4a+2\beta+1|<|2a|$ να αποδείξετε ότι $|x_1-2|\cdot|x_2-2|<2$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,4)$.

Λύση

α. Για να έχει η εξίσωση ρίζες πραγματικές και άνισες αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης να είναι θετικός αριθμός.

Πράγματι $\Delta=\beta^2-4a>0$ εφόσον $a<0\Rightarrow -4a>0$ οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Οι τύποι του Vietta δίνουν $x_1+x_2=-\frac{\beta}{a}$ και $x_1x_2=\frac{1}{a}$ οπότε για να δείξω ότι:

$$|x_1-2|\cdot|x_2-2|<2$$

αρκεί $|(x_1-2)(x_2-2)|<2$

αρκεί $|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|<2$

αρκεί $\left|\frac{1}{a}+2\frac{\beta}{a}+4\right|<2$

αρκεί $\left|\frac{1+2\beta+4a}{a}\right|<2$

αρκεί $\frac{|1+2\beta+4a|}{|a|}<2$

αρκεί $|1+2\beta+4a|<2|a|$

αρκεί $|1+2\beta+4a|<|2a|$ που ισχύει από υπόθεση

γ. Με την παραπάνω συνθήκη ισχύει $|x_1-2|\cdot|x_2-2|<2$ οπότε κάποιος από τους παράγοντες $|x_1-2|,|x_2-2|$ είναι γνήσια μικρότερος του 2 (διαφορετικά αν $|x_1-2|>2$ και $|x_2-2|>2$ τότε $|x_1-2|\cdot|x_2-2|>4$ άτοπο) ,οπότε αν θεωρήσουμε $|x_1-2|<2\Rightarrow -2<x_1-2<2\Rightarrow 0<x_1<4$.

Άρα η μια ρίζα ανήκει υποχρεωτικά στο διάστημα $(0,4)$ ενώ η δεύτερη θα είναι αρνητική εφόσον $P=-1<0$, άρα οι ρίζες θα είναι ετερόσημες.

4. **Α)**

α. Να λύσετε τις εξισώσεις $16-x^2=0$ και $x^4-2x^2+1=0$.

β. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+5x-7$.

Β) Έστω η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{|-x^2+5x-7|-3}{(16-x^2)(x^4-2x^2+1)}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες έχει νόημα ο τύπος της f.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

Λύση

Α.

α. Οι εξισώσεις ορίζονται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και γράφονται:

$$16-x^2=0\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm 4$$

$$x^4-2x^2+1=0\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

β. Για το τριώνυμο $-x^2+5x-7$ παρατηρώ ότι $\Delta=5^2-4(-1)(-7)=25-28=-3<0$ και επομένως το τριώνυμο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του α. Άρα $-x^2+5x-7<0$.

Β.

α. Η συνάρτηση έχει νόημα (ορίζεται) όταν και μόνο όταν:

$$\left(16-x^2\right)\left(x^4-2x^2+1\right)\ne 0\Leftrightarrow\left(16-x^2\ne 0 \text{ και } x^4-2x^2+1\ne 0\right)\Leftrightarrow\left(x\ne\pm 4 \text{ και } x\ne\pm 1\right)$$

Άρα $x\in\mathbb{R}-\{\pm 1,\pm 4\}$

β. Για $x\in\mathbb{R}-\{\pm 1,\pm 4\}$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\frac{\left|-x^2+5x-7\right|-3}{\left(16-x^2\right)\left(x^4-2x^2+1\right)}=\frac{x^2-5x+7-3}{(4-x)(4+x)\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-5x+4}{(4-x)(4+x)(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{(x-4)(x-1)}{(4-x)(4+x)(x-1)^2(x+1)^2}=-\frac{1}{(4+x)(x-1)(x+1)^2}$$

γ. Η ανίσωση ορίζεται για $x\in\mathbb{R}-\{\pm 1,\pm 4\}$ και γράφεται:

$$f(x)\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{(4+x)(x-1)(x+1)^2}\le 0\Leftrightarrow (4+x)(x-1)(x+1)^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+3x-4\right)(x+1)^2\ge 0\Leftrightarrow\left(x^2+3x-4\ge 0 \text{ ή } x+1\ne 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(x\le -4 \text{ ή } x\ge 1 \text{ ή } x\ne -1\right)\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$$

5. Έστω η εξίσωση $x^2+4\lambda x+2\lambda^2+2=0 \quad (1)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και x ο άγνωστος..

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

β. Αν η εξίσωση έχει 2 πραγματικές άνισες λύσεις και μία από αυτές είναι ο αριθμός -2, τότε να βρείτε την άλλη λύση και το $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 οι δύο άνισες λύσεις της εξίσωσης, τότε να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε να ισχύει $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<\lambda^2+1$.

Λύση

α. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες όταν και μόνο όταν:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow (4\lambda)^2-4\left(2\lambda^2+2\right)>0 \Leftrightarrow 16\lambda^2-8\lambda^2-8>0 \Leftrightarrow 8\lambda^2-8>0 \Leftrightarrow 8\left(\lambda^2-1\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-1>0 \Leftrightarrow \lambda^2>1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2}>\sqrt{1} \Leftrightarrow |\lambda|>1 \Leftrightarrow (\lambda>1 \text{ ή } \lambda<-1)$$

Άρα $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

β. Ο αριθμός -2 είναι λύση της εξίσωσης, άρα θα την επαληθεύει.

Έτσι με $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$:

$$(-2)^2+4\lambda(-2)+2\lambda^2+2=0 \Leftrightarrow 4-8\lambda+2\lambda^2+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2-8\lambda+6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \Leftrightarrow (\lambda=1 \text{ απορ. ή } \lambda=3) \Leftrightarrow \lambda=3$$

Για $\lambda=3$ έχω την εξίσωση: $x^2+12x+20=0 \Leftrightarrow (x=-2 \text{ ή } x=-10)$

Άρα η άλλη λύση είναι $x=-10$

γ. Από τύπους Vieta, με $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και x_1, x_2 δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης έχω:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{a}=-\frac{4\lambda}{1}=-4\lambda \text{ και } P=x_1x_2=\frac{\gamma}{a}=2\lambda^2+2.$$

Η ανίσωση γράφεται:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow \frac{x_1{}^2}{x_1x_2}+\frac{x_2{}^2}{x_1x_2}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow \frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1x_2}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow \frac{(-4\lambda)^2-2\left(2\lambda^2+2\right)}{2\lambda^2+2}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16\lambda^2-4\lambda^2-4}{2\lambda^2+2}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow \frac{8\lambda^2-2\lambda^2-2}{\lambda^2+1}<\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$

$$6\lambda^2-2<\left(\lambda^2+1\right)^2 \Leftrightarrow 6\lambda^2-2<\lambda^4+2\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$

$$0<\lambda^4-4\lambda^2+3 \Leftrightarrow \left(\lambda^2<1 \text{ απορ. ή } \lambda^2>3\right) \Leftrightarrow |\lambda|>\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\lambda>\sqrt{3} \text{ ή } \lambda<-\sqrt{3}\right)$$

Άρα $\lambda \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

6. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4=0$ έχει ρίζες πραγματικές και είναι λύσεις της ανίσωσης $x^2-3x+2>0$.

Λύση

Η διακρίνουσα της δοσμένης εξίσωσης είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 16 = 4\left(\lambda^2 - 4\right)$

Ονομάζουμε x_1 και x_2 τις ρίζες της εξίσωσης, οπότε: $x_1 + x_2 = 2\lambda$ (1) και $x_1 x_2 = 4$ (2).

Τα ζητούμενα συμβαίνουν αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 > 0 \\ x_2^2 - 3x_2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 4 \geq 0 \\ \left(x_1^2 - 3x_1 + 2\right) + \left(x_2^2 - 3x_2 + 2\right) > 0 \\ \left(x_1^2 - 3x_1 + 2\right)\left(x_2^2 - 3x_2 + 2\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda^2 \geq 4 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 4 > 0 \\ x_1^2 x_2^2 - 3x_1^2 x_2 + 2x_1^2 - 3x_1 x_2^2 + 9x_1 x_2 - 6x_1 + 2x_2^2 - 6x_2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda^2 \geq 4 \\ \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2 - 3\left(x_1 + x_2\right) + 4 > 0 \\ \left(x_1 x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\left(x_1 + x_2\right) + 5x_1 x_2 - 6\left(x_1 + x_2\right) + 2\left(x_1 + x_2\right)^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |\lambda| \geq 2 \\ (2\lambda)^2 - 2\cdot 4 - 3\cdot 2\lambda + 4 > 0 \\ 4^2 - 3\cdot 4\cdot 2\lambda + 5\cdot 4 - 6\cdot 2\lambda + 2(2\lambda)^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\lambda| \geq 2 \\ 2\lambda^2 - 3\lambda - 2 > 0 \\ 2\lambda^2 - 9\lambda + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \geq 2 \text{ ή } \lambda \leq -2 \\ \lambda < -\dfrac{1}{2} \text{ ή } \lambda > 2 \\ \lambda < 2 \text{ ή } \lambda > \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda > \frac{5}{2}\right)$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι: $\lambda \in (-\infty, -2] \cup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

7. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ ώστε η σχέση $-3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Παρατηρώ ότι το τριώνυμο $x^2 - x + 1$, έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1 = -3 < 0$.

Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του a (συντελεστή του x^2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $x^2 - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \Leftrightarrow -3\left(x^2 - x + 1\right) < \left(x^2 - x + 1\right)\frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2\left(x^2 - x + 1\right) \Leftrightarrow$$
$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow$$
$$\left(-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 \text{ και } x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2\ \right) \Leftrightarrow$$
$$\left(0 < 4x^2 + (a-3)x + 1 \text{ και } 0 < x^2 - (2+a)x + 4\ \right)$$

Για να είναι και τα 2 τριώνυμα θετικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί να έχουν αρνητικές διακρίνουσες.

Έτσι πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (a-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0 \\ \left[-(2+a)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (a-3)^2 < 16 \\ (2+a)^2 < 16 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{matrix} |a-3| < 4 \\ |2+a| < 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -4 < a-3 < 4 \\ -4 < 2+a < 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -1 < a < 7 \\ -6 < a < 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -1 < a < 2$$

8. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{\lambda+1} \cdot x^2 + \sqrt{\lambda^2 + \lambda + 4} \cdot x + \sqrt{\lambda+1} = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda > 3$ η εξίσωση έχει δύο αντίστροφες ρίζες.

γ. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα την $x_0 = -1$ και να δείξετε ότι αυτή είναι διπλή.

Λύση

α. Η εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$ όταν και μόνο όταν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 4 - 4\lambda - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$$

Όμως για να είναι πραγματικοί αριθμοί οι ρίζες πρέπει και $\lambda \geq -1$

Άρα $\lambda \in [-1, 0] \cup [3, +\infty)$

(Για $\lambda = -1$ η εξίσωση είναι πρωτοβάθμια με λύση $x = 0$)

β. Είναι γνωστό ότι από το προηγούμενο ερώτημα ότι για $\lambda > 3$ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις.

Από τους τύπους του Vieta: $P = \dfrac{\sqrt{\lambda+1}}{\sqrt{\lambda+1}} = 1$

Άρα η εξίσωση έχει δύο αντίστροφες πραγματικές λύσεις αφού έχουν γινόμενο 1

γ. Η εξίσωση έχει ρίζα το $x_0 = -1$ αν και μόνο αν το $x_0 = -1$ την επαληθεύει. Επομένως:

$$\sqrt{\lambda^2+\lambda+4}=2\sqrt{\lambda+1} \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda+4=4\lambda+4 \Rightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=3)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην διακρίνουσα βλέπουμε ότι προκύπτει $\Delta=0$ και στις δύο περιπτώσεις, άρα η λύση είναι διπλή.

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(2\lambda-1)x+(2\lambda-1)(\lambda+2)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να είναι δευτεροβάθμια με δύο ρίζες άνισες.

β. Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες να είναι:

- **i.** ομόσημες
- **ii.** αρνητικές
- **iii.** ετερόσημες, με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική.

Λύση

α. Η εξίσωση θα έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες όταν και μόνο όταν :

$$\Delta>0 \Leftrightarrow \left[-2(2\lambda-1)\right]^2-4(2\lambda-1)(\lambda+2)>0 \Leftrightarrow 4(2\lambda-1)^2-4(2\lambda-1)(\lambda+2)>0 \Leftrightarrow$$

$$4(2\lambda-1)(2\lambda-1-\lambda-2)>0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)(\lambda-3)>0 \Leftrightarrow 2\lambda^2-7\lambda+3>0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left(\lambda<\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda>3\right)$$

(Στο $(*)$ βρίσκω τις λύσεις του τριωνύμου $\lambda=\frac{1}{2}$ ή $\lambda=3$ και από πινακάκι βρίσκω την λύση της ανίσωσης)

β. Με $\lambda\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$ έχω:

i. Οι ρίζες είναι ομόσημες αν και μόνο αν το γινόμενό τους είναι θετικός αριθμός.

Άρα αν και μόνο αν:

$$P>0 \Leftrightarrow x_1x_2>0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a}>0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)(\lambda+2)>0 \Leftrightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2>0 \Leftrightarrow \left(\lambda<-2 \text{ ή } \lambda>\frac{1}{2}\right)$$

Άρα $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

ii. Οι ρίζες θα είναι αρνητικές αν και μόνο αν $P>0$ και $S<0$.

Έτσι για $P>0$, άρα για $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$ θα έχω:

$$S<0 \Leftrightarrow x_1+x_2<0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{a}<0 \Leftrightarrow 2(2\lambda-1)<0 \Leftrightarrow 2\lambda-1<0 \Leftrightarrow \lambda<\frac{1}{2}$$

Άρα $\lambda\in(-\infty,-2)$.

iii. Με $\lambda \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$ οι ρίζες θα είναι αρνητικές με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική αν και μόνο αν: $P<0$ και $S<0$.

Επομένως αν και μόνο αν: $\lambda \in \left(-2,\frac{1}{2}\right)$ και $\lambda \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

Άρα $\lambda \in \left(-2,\frac{1}{2}\right)$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+2x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A=\dfrac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(4)}-2}$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $|f(4)x-1|=|2-f(3)x|$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x^2+2x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 0$ και $x\neq -2)$.

Άρα $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+2x}=\frac{x(x^2-4)}{x(x+2)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x+2)}=x-2$$

β. Έχω: $f(3)=3-2=1$, $f(1)=1-2=-1$ και $f(4)=4-2=2$. Έτσι η παράσταση γράφεται:

$$A=\frac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(4)}-2}=\frac{1-(-1)}{\sqrt{2}-2}=\frac{2}{\sqrt{2}-2}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}^2-2^2}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{2-4}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{-2}=-(\sqrt{2}+2)$$

γ. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και γράφεται:

$$|f(4)x-1|=|2-f(3)x| \Leftrightarrow |2x-1|=|2-x| \Leftrightarrow$$
$$(2x-1=2-x \text{ ή } 2x-1+2-x=0) \Leftrightarrow$$
$$(3x=3 \text{ ή } x=-1) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=-1)$$

11. Έστω η εξίσωση $|a-1|x^2+|3-2a|x+|1-a|=0, a\neq 1$ η οποία έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες ως προς x.

α. Να βρεθεί σε ποιο διάστημα ανήκει το a.

β. Να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι αρνητικοί αριθμοί και η μια αντίστροφη της άλλης.

γ. Αν η μία ρίζα x_1 είναι τετραπλάσια της άλλης x_2 να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και το a.

Είναι ίδια με την Άσκηση 2

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\sqrt{-x^2-x+2}+\sqrt{2x+1}$ και $g(x)=x-5$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f,g.

β. Να αποδείξετε ότι $f(0)>\frac{12}{5}$.

γ. Να ρητοποιήσετε την παράσταση $A=\frac{2}{f(1)-3}+\frac{1}{f\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

δ. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δεν τέμνονται.

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left.\begin{matrix}-x^2-x+2\geq 0\\ 2x+1\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-2\leq x\leq 1\\ x\geq -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq 1\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]. \text{ Άρα } A_f=\left[-\frac{1}{2},1\right]$$

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $A_g=\mathbb{R}$

β. Για να δείξω ότι: $f(0)>\frac{12}{5}$

αρκεί $\sqrt{2}+1>\frac{12}{5}$

αρκεί $\sqrt{2}>\frac{12}{5}-1$

αρκεί $\sqrt{2}>\frac{7}{5}$

αρκεί $\left(\sqrt{2}\right)^2>\left(\frac{7}{5}\right)^2$

αρκεί $2 > \frac{49}{25}$

αρκεί $50 > 49$ που ισχύει

γ. Έχω:

$$A = \frac{2}{f(1)-3} + \frac{1}{f\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-3} + \frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}-3} + \frac{2}{\sqrt{3}+3} = \frac{2\left(\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-3\right)}{\left(\sqrt{3}-3\right)\left(\sqrt{3}+3\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{-6} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

δ. Οι συναρτήσεις θα τέμνονται αν και μόνο αν υπάρχει $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ τέτοιο ώστε $f(x) = g(x)$.

Παρατηρώ ότι με $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} - 5 \le x - 5 \le 1 - 5 \Rightarrow -\frac{11}{2} \le g(x) \le -4 < 0$

Όμως $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων δεν είναι δυνατόν να τέμνονται.

13. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 - (\lambda-1)x + \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $x_1^2 + x_2^2$ να γίνεται ελάχιστο.

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ όταν και μόνο όταν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 λύσεις, αν και μόνο αν δηλαδή:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[-(\lambda-1)\right]^2 - 4(-1)(\lambda+2) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 8 > 0 \Leftrightarrow$$

$(\lambda+1)^2 + 8 > 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Από τύπους Vieta έχω: :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\lambda-1)}{-1} = -(\lambda-1) = -\lambda+1 \text{ και } P = x_1 + x_2 = \frac{\lambda+2}{-1} = -\lambda-2.$$

Ισχύει:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1-\lambda)^2 - 2(-\lambda-2) = 1-2\lambda+\lambda^2+2\lambda+4 = \lambda^2+5$$

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $x_1^2 + x_2^2 = \lambda^2+5$ είναι το 5 για $\lambda = 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2+2x+1}, x \in [-1,2]$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -3x+3$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση C_f τέμνει τους άξονες.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ε. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in [-1,2]$ και γράφεται:

$$f(x) = 2\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2+2x+1} = 2\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} =$$
$$= 2\underbrace{|x-2|}_{\text{μη θετικός}} - \underbrace{|x+1|}_{\text{μη αρνητικός}} = -2(x-2)-(x+1) = -2x+4-x-1 = -3x+3$$

β. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [-1,2]$ και γράφεται:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x+3 = 0 \Leftrightarrow -3x = -3 \Leftrightarrow x = 1$$

γ. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τεταγμένη 0.

Άρα θέτω $y = 0$ και λύνω την εξίσωση: $y = 0 \Leftrightarrow -3x+3 = 0 \Leftrightarrow -3x = -3 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο $(1,0)$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τετμημένη 0. Άρα θέτω $x = 0$ και έχω: $f(0) = -3 \cdot 0 + 3 = 3$.

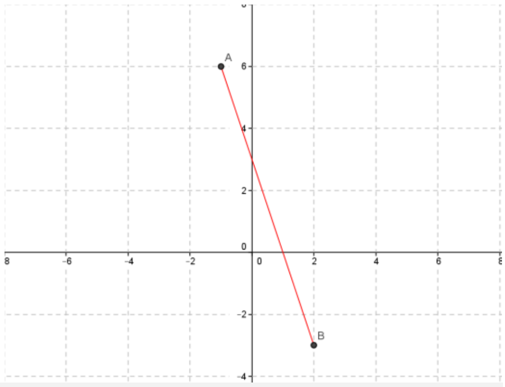
Άρα τέμνει τον $y'y$ στο $(0,3)$.

δ. Φτιάχνω πίνακα τιμών και έχω:

x	**-1**	**2**

y	**6**	**-3**

Άρα παριστάνει το διπλανό ευθύγραμμο τμήμα.



ε. Ο συντελεστής διεύθυνσης που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$ είναι ο -3.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x+1}\right)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε οτι $f(x)=x^2-x-1$.

γ. Να δείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες τις x_1, x_2.

δ. Αν x_1 η θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, να αποδείξετε οτι οι αριθμοί x_1 και x_1-1 είναι αντίστροφοι.

ε. Να κατασκευάσετε εξίσωση με ρίζες $\varrho_1=2x_1+2x_2-5$ και $\varrho_2=2x_1x_2-3$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$. Άρα $A=[-1,+\infty)$

β. Για $x\geq -1$ έχω: $f(x)=\left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)=x^2-\sqrt{x+1}^2=x^2-(x+1)=x^2-x-1$

γ. Η εξίσωση $f(x)=0$ ορίζεται για κάθε $x\in[-1,+\infty)$ και γράφεται:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Άρα έχει 2 ρίζες ετερόσημες.

(ασφαλώς μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\Delta=5>0$ άρα έχει δυο ρίζες και $P=-1$ άρα είναι ετερόσημες)

δ. Για να δείξω ότι οι αριθμοί x_1 και x_1-1 είναι αντίστροφοι αρκεί να δείξω ότι το γινόμενο τους είναι 1. Άρα αρκεί: $x_1(x_1-1)=1$ αρκεί $x_1{}^2-x_1=1$ αρκεί $x_1{}^2-x_1-1=0$ που ισχύει εφόσον το x_1 επαληθεύει την εξίσωση.

ε. Από τύπους Vieta έχω: : $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{a}=1$ και $P=x_1+x_2=\dfrac{\gamma}{a}=-1$.

Έτσι οι παραστάσεις γίνονται:

$\varrho_1=2x_1+2x_2-5=2(x_1+x_2)-5=-3$ και $\varrho_2=2x_1x_2-3=2(-1)-3=-5$.

Άρα το τριώνυμο που έχει ρίζες τις ϱ_1 και ϱ_2 είναι το:

$$x^2-(\varrho_1+\varrho_2)x+\varrho_1\varrho_2=0 \Leftrightarrow x^2-(-8)x+(-3)(-5)=0 \Leftrightarrow x^2+8x+15=0$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}+\dfrac{\varkappa}{\sqrt{|x|-1}}$.

α. Να λυθούν οι ανισώσεις $4-|x|>0$ και $|x|-1>0$.

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

γ. Αν το σημείο $A(3,-12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε οτι $\varkappa=0$.

δ. Για $\varkappa=0$, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση

α. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και γράφεται: $4-|x|>0 \Leftrightarrow 4>|x| \Leftrightarrow -4<x<4$

Ομοίως η $|x|-1>0$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και γράφεται: $|x|-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow (x>1 \text{ ή } x<-1)$

β. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν

$$\left.\begin{matrix}4-|x|>0\\ |x|-1>0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-4<x<4\\ x>1 \text{ ή } x<-1\end{matrix}\right\} \overset{\text{συναλήθευση}}{\Leftrightarrow} x\in(-4,-1)\cup(1,4)$$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A=(-4,-1)\cup(1,4)$

γ. Το σημείο $A(3,-12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:

$$f(3)=-12 \Leftrightarrow \frac{|3-2|-|3\cdot 3+4|}{\sqrt{4-|3|}}+\frac{\varkappa}{\sqrt{3-1}}=-12 \Leftrightarrow \frac{1-13}{1}+\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}=-12 \Leftrightarrow$$

$$-12+\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}=-12 \Leftrightarrow \frac{\varkappa}{\sqrt{2}}=0 \Leftrightarrow \varkappa=0$$

δ. Για $\varkappa=0$ η συνάρτηση γράφεται: $f(x)=\dfrac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}+\dfrac{0}{\sqrt{|x|-1}}=\dfrac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}$.

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in(-4,4)$ και γράφεται:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|-|3x+4|}{\sqrt{4-|x|}}=0 \Leftrightarrow |x-2|-|3x+4|=0 \Leftrightarrow |x-2|=|3x+4| \Leftrightarrow$$

$$(x-2=3x+4 \text{ ή } x-2+3x+4=0) \Leftrightarrow$$

$$(-6=2x \text{ ή } 4x=-2) \Leftrightarrow \left(x=-3 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}\right)$$

17.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left|-x^2+x-2\right|-4}{x^2-6x+8}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-x^2+x-2<0$.

γ. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f απλοποιείται στη μορφή $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}, x\in A$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $x\cdot f(x)>-\dfrac{f(5)}{2}$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x^2-6x+8\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 2 \text{ και } x\neq 4)$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A=(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$

β. Παρατηρώ ότι το τριώνυμο $-x^2+x-2$ έχει αρνητική Διακρίνουσα ($\Delta=1^2-4(-1)(-2)=-7$) άρα θα είναι ομόσημο του α για κάθε $x\in(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$. Άρα $-x^2+x-2<0$ για κάθε $x\in(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$.

γ. Για κάθε $x\in(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\frac{\left|-x^2+x-2\right|-4}{x^2-6x+8}=\frac{-\left(-x^2+x-2\right)-4}{x^2-6x+8}=\frac{x^2-x+2-4}{x^2-6x+8}=$$
$$=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+8}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x+1}{x-4}$$

δ. Παρατηρώ ότι: $f(5)=\dfrac{5+1}{5-4}=6$

Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$ και γράφεται:

$$x\cdot f(x)>-\frac{f(5)}{2}\Leftrightarrow x\cdot\frac{x+1}{x-4}>-\frac{6}{2}\Leftrightarrow\frac{x^2+x}{x-4}>-3$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

Αν $x-4>0\Leftrightarrow x>4$ η ανίσωση γράφεται:

$$\frac{x^2+x}{x-4}>-3\Leftrightarrow(x-4)\frac{x^2+x}{x-4}>-3(x-4)\Leftrightarrow x^2+x>-3x+12\Leftrightarrow$$
$$x^2+4x-12>0\Leftrightarrow(x<-6 \text{ ή } x>2)$$

Άρα $x\in(4,+\infty)$

Αν $x-4<0\Leftrightarrow x<4$ η ανίσωση γράφεται:

$$\frac{x^2+x}{x-4} > -3 \Leftrightarrow (x-4)\frac{x^2+x}{x-4} < -3(x-4) \Leftrightarrow x^2+x < -3x+12 \Leftrightarrow$$
$$x^2+4x-12<0 \Leftrightarrow -6<x<2$$

Άρα $x \in (-6,2)$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in (-6,2) \cup (4,+\infty)$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β. Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 2$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0 \le f(x) \le 2$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν: $x^2-4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 4)$.

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$ και η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x} = \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = \frac{x+4}{x}$$

β. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$ και γράφεται:

$$|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+4}{x}\right| = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+4}{x} = 2 \text{ ή } \frac{x+4}{x} = -2\right) \Leftrightarrow (x+4=2x \text{ ή } x+4=-2x) \Leftrightarrow$$
$$\left(x = 4 \text{ απορ. ή } x = -\frac{4}{3}\right)$$

γ. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$ και γράφεται:

$$0 \le f(x) \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x+4}{x} \le 2$$

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

Αν $x > 0$ η ανίσωση γράφεται:

$$0 \le \frac{x+4}{x} \le 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x \le x \cdot \frac{x+4}{x} \le 2x \Leftrightarrow 0 \le x+4 \le 2x \Leftrightarrow (0 \le x+4 \text{ και } x+4 \le 2x) \Leftrightarrow$$
$$(-4 \le x \text{ και } 4 \le x) \Leftrightarrow 4 \le x$$

Άρα για $x > 4$

Αν $x < 0$ η ανίσωση γράφεται:

$$0 \le \frac{x+4}{x} \le 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x \ge x \cdot \frac{x+4}{x} \ge 2x \Leftrightarrow 0 \ge x+4 \ge 2x \Leftrightarrow \left(0 \ge x+4 \text{ και } x+4 \ge 2x\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(-4 \ge x \text{ και } 4 \ge x\right) \Leftrightarrow -4 \ge x$$

19. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(|x| + \sqrt{x+1}\right)\left(|x| - \sqrt{x+1}\right)$.

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και αποδείξτε ότι $f(x) = x^2 - x - 1$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες τις οποίες και να υπολογίσετε.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^2\right) = 11$,όπου x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

δ. Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_1\right)^{2012} \cdot \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_2\right)^{2012} \text{ και } B = \frac{1}{\sqrt[4024]{A} - 3} + \frac{1}{\sqrt[4024]{A} + 3}.$$

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$. Άρα $A = [-1, +\infty)$

Για $x \ge -1$ έχω: $f(x) = \left(|x| + \sqrt{x+1}\right)\left(|x| - \sqrt{x+1}\right) = |x|^2 - \sqrt{x+1}^2 = x^2 - (x+1) = x^2 - x - 1$

β. Η εξίσωση $f(x) = 0$ ορίζεται για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ και γράφεται:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

γ. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ και γράφεται:

$$f\left(x^2\right) = 11 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - x^2 - 1 = 11 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

Θέτω $x^2 = y, y \ge 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$x^4 - x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 4 \text{ ή } y = -3 \text{ απορ}\right) \Leftrightarrow$$
$$y = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ή } x = -2 \text{ απορ}\right)$$

δ. Για τους x_1, x_2 ισχύουν οι τύποι Vieta, δηλαδή: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} = 1$ και $P = x_1 + x_2 = \frac{\gamma}{a} = -1$.

Έτσι οι παραστάσεις γίνονται:

$$A = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_1\right)^{2012} \cdot \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_2\right)^{2012} = \left[\left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_1\right)\left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_2\right)\right]^{2012} =$$
$$\left(8 + 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2\right)^{2012} = \left[8 + 4\left(x_1 + x_2\right) + 2x_1x_2\right]^{2012} = (8 + 4 \cdot 1 - 2)^{2012} = 10^{2012}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt[4024]{A}-3}+\frac{1}{\sqrt[4024]{A}+3}=\frac{1}{\sqrt[4024]{10^{2012}}-3}+\frac{1}{\sqrt[4024]{10^{2012}}+3}=\frac{1}{\sqrt{10}-3}+\frac{1}{\sqrt{10}+3}=$$
$$=\frac{\sqrt{10}+3+\sqrt{10}-3}{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}^2-3^2}=2\sqrt{10}$$

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2(m-4)x+36=0, m\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $m\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

β. Να βρείτε τα $m\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

γ. Να βρείτε τα $m\in\mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $x^2+2(m-4)x+36>0$ να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Να αποδείξετε ότι αν $m=-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

ε. Αν x_1, x_2 είναι δύο άνισες λύσεις της εξίσωσης, να λύσετε την ανίσωση $|x_1+x_2|\le x_1x_2$.

Λύση

Η Διακρίνουσα του τριωνύμου είναι η:

$$\Delta=\left[2(m-4)\right]^2-4\cdot1\cdot36=4(m-4)^2-144=4m^2-32m+64-144=$$
$$=4m^2-32m-80=0\Leftrightarrow 4\left(m^2-8m-20\right)$$

α. Η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα όταν και μόνο όταν :

$$\Delta=0\Leftrightarrow 4\left(m^2-8m-20\right)=0\Leftrightarrow m^2-8m-20=0\Leftrightarrow \left(m=10 \text{ ή } m=-2\right)$$

Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα όταν $m=10$ ή $m=-2$.

β. Η εξίσωση είναι αδύνατη όταν και μόνο όταν:

$$\Delta<0\Leftrightarrow 4\left(m^2-8m-20\right)<0\Leftrightarrow m^2-8m-20<0\Leftrightarrow -2<m<10$$

γ. Η ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν και μόνο όταν η Διακρίνουσα είναι αρνητική και ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου θετικός. Άρα όταν και μόνο

$$\Delta<0\Leftrightarrow 4\left(m^2-8m-20\right)<0\Leftrightarrow m^2-8m-20<0\Leftrightarrow -2<m<10$$

δ. Η ανίσωση έχει δυο ρίζες άνισες όταν και μόνο όταν

$$\Delta>0\Leftrightarrow 4\left(m^2-8m-20\right)>0\Leftrightarrow m^2-8m-20>0\Leftrightarrow m<-2 \text{ ή } m>10$$

Όμως $m=-\sqrt{3}-\sqrt{5}<-2$, άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.

ε. Από τύπους Vieta, και με βασική προϋπόθεση ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες έχω:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} = -\frac{2(m-4)}{1} = -2m + 8$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{a} = 36$$

Άρα η ανίσωση $|x_1 + x_2| \le x_1 x_2$ γράφεται:

$$|x_1 + x_2| \le x_1 x_2 \Leftrightarrow |-2m + 8| \le 36 \Leftrightarrow -36 \le -2m + 8 \le 36 \Leftrightarrow -36 - 8 \le -2m \le 36 - 8 \Leftrightarrow$$
$$-44 \le -2m \le 24 \Leftrightarrow 22 \ge m \ge -12$$

Άρα πρέπει $\left.\begin{array}{l} -12 \le m \le 22 \\ m \le -2 \text{ ή } m \ge 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow m \in [-12, -2] \cup [10, 22]$

Προσοχή:

1. Κάθε άσκηση μπορεί να λυθεί και με περισσότερους από έναν τρόπους.

2. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι και σωστή.