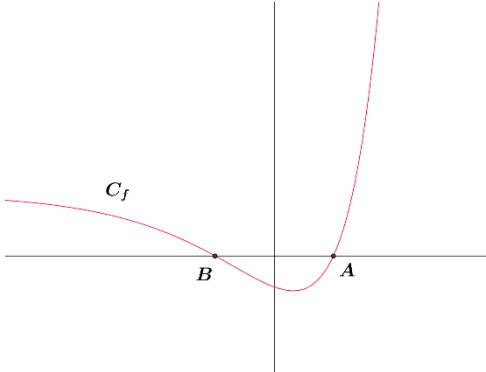


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

1.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 4}$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να δείξετε ότι η παραπάνω συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \ln \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^x + 4}$. iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 5 - \ln 3$
2.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (4^a + 2^{a+1})^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. i. Να βρείτε τον αριθμό a αν το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f. ii. Αν $a = 0$ να λύσετε την εξίσωση: $\ln \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 1004 \ln 3$
3.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left[2 - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right]$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$
4.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή. iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
5.	A. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 6x - 5$. i. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια ii. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. iii. Να λυθεί η εξίσωση $g(e^x) = f(e^x)$. B. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln [g(e^x) - f(e^x)]$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h. ii. Να λυθεί η ανίσωση $h(x) \geq \ln(\ln e^4)$
6.	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 5)$ και $g(x) = \ln 5 + \ln(e^x - 1)$. i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. ii. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\ln 2$ και $\ln 5$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < g(x)$

7.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \ln 2$ iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$
8.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - \ln(x+3) \leq 2 \ln x$
9.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x \ln(20 - e^x) - \ln(e^x - 2)$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Αν η C_f περνάει από τα σημεία $M(\ln 3, \ln 17)$ και $N(\ln 19, -\ln 17)$ να βρείτε τα κ, λ. Αν $\kappa = 1, \lambda = 1$ iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x - \ln 5$ iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$
10.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 1}{2}$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να δείξετε ότι η f μπορεί να πάρει την μορφή: $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - e^x}{2}$. iii. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$. iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$
11.	Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2$. i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. ii. Αν $g(x) = \ln f(x)$ να αποδείξετε ότι: $g(2) + g(3) - \ln 35 = 2 \ln 6.$ iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - 2 = 5 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x$ 
12.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(2^x + 1) + \ln(1 - 2^{-x})$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f μπορεί να πάρει την μορφή $f(x) = \ln(2^x - 2^{-x})$.

	iii. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$. iv. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq \ln \frac{3}{2}$
13.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{\ln a - \ln 2}{\ln 2 - \ln a}\right)^x$ και $2 < a < \beta$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. i. Να δείξετε ότι $a^2 < 2\beta$. Αν $a = 4$ και $\beta = 32$ τότε: ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x+2) = 9\sqrt{3^{1-x}}$
14.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln^3 x + 2\ln^2 x + a\ln x + \beta$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Αν $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ και $f(e) = 0$ να βρείτε τα a και β. iii. Για $a = -1$ και $\beta = -2$ να δείξετε ότι $f(x) = (\ln^2 x - 1)(\ln x + 2)$. iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
15.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -1$. iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
16.	Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$. iii. Αν $x > 6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$.

Ασκήσεις Επανάληψης (Mathematica και Προσωπικό Αρχείο)

17.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$. Να βρεθούν: α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. γ. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln(x^2 - 4) + \ln 5 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$. δ. Να λυθεί η ανίσωση $e^{f(6)-2f(4)} - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + \ln e^2$. ε. Να λυθεί η ανίσωση $2e^{f(6)-2f(4)} - e^x < e^{2x}$.
18.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^{\frac{1}{2}+x} \ln x - \frac{2^x}{\ln x}$ με $x \in \mathbb{R}$. α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. β. Ναδειχθεί ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. γ. Αν $f(e^2) = 15$ να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$. δ. Με $x = 1$ να λυθεί η ανίσωση $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 6$.
19.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$ α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 4)$ και $f(\ln 5)$. γ. Να λύσετε την ανισότητα $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$
20.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(e^x + 1)$. α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(10-x) = f(3\sqrt{x})$. δ. Να λυθεί η ανίσωση $f(2x) > f(x)$. ε. Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
21.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - ax^2 - 5x + 6, & \text{αν } x < 1 \\ x - 1 + \ln x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ α. Αν είναι $f(1) = f(-2)$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a. Για $a=2$ β. Ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$. γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

	δ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$ για $x < 1$. ε. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = -x \ln 2$ για $x \leq 0$.
22.	Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (a^2 + \ln^4 a)x^3 - 3(a + \ln^3 a)x^2 + (a + \ln^2 a)x + 1 + \ln^3 a$ με $a, x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$. α. Να βρεθεί ο $a > 0$ ώστε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου να είναι 0 (μηδέν). Αν $a = 1$ τότε: β. Να γίνει η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$. γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(e^x + \sqrt{2}) = 0$.
23.	Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x - 1$ που έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x) = (1 - x)^2$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln(P(x))$. α. Να υπολογιστούν τα α και β. Για $a = -5$ και $\beta = 4$. β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. γ. Είναι $f(x) = 2\ln x - 1 + \ln(2x - 1)$ δ. Να λυθεί η εξίσωση $e^{P(x)+2} - e^{2x^3} = 0$.
24.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{5} + 1)^x + (\sqrt{5} - 1)^x$ α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$ δ. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12$ και $f(x) = 2$ ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x}) = f(x^2) + \ln x$
25.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln 2a \cdot x^3 - \ln(a + 1) \cdot x^2 - \ln 2 \cdot x + \ln 2$ με $a > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$. α. Να βρεθεί ο θετικός αριθμός a. β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$, $y'y$ γ. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$. δ. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την οριζόντια ευθεία $y = \frac{\ln 8 - \ln 2}{2}$ ε. Να δείξετε ότι $2e^{f(1)} = e^{\frac{\ln 8 - \ln 2}{2}}$

26.	Να αποδειχθεί ότι : α. το πολυώνυμο $P(x) = (3x-4)^{50} - (2x-1)^{83}$ διαιρείται με το $x-1$. β. οι αριθμοί 299^{50} και 201^{83} έχουν ίσα τα δύο τελευταία τους ψηφία (δηλαδή, τα ψηφία των μονάδων και των δεκάδων)
27.	Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1)$. α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 10$. β. Αν ρ είναι μια πραγματική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(P(x) + x - 10) - 10$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - \rho$.
28.	Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x-2)^{20} + (x-1)^{10} - 1$. α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-2)$. β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x(x-1)(x-2)$.
29.	Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές και οι αριθμοί $P(0)$ και $P(1)$ είναι περιττοί. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
30.	Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^{2004}$. α. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ και να βρείτε το υπόλοιπό της. β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa = 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ διαιρεί τον αριθμό $\lambda = 2003^{2004} - 2003^2$.
Θέματα ΟΕΦΕ	
31.	Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. α. Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. β. Για $\lambda = 1$ να βρεθεί το $P(x)$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $(1, -3)$. γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < -3$.
32.	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5^{\log x}$, $g(x) = x^{1085}$, $x \in (0, +\infty)$ Να αποδείξετε ότι: α. $f(x) = g(x)$ β. $f(xy) = f(x)f(y)$ γ. $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ δ. $f(x^v) = [f(x)]^v$, $v \in \mathbb{N}$

	ε. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = 5 + 4g(x)$ στ. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x) > f(x^2 - 4)$
33.	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2 \ln x + 1}{2 \ln x - 1}$ α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$. β. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$. γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$ για κάθε $x > 0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$. δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln f(e^{1000}) + \ln f(e^{1001}) + \ln f(e^{1002}) + \ln f(e^{1003}) + \ln f(e^{1004})$
34.	Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$, για την οποία ισχύουν: • Το υπόλοιπο της διαίρεσης της $f(x)$ δια $x + 2$ είναι 24. • Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 8)$. • Η $f(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$. α. Να δείξετε ότι: $a = 1$, $\beta = -10$ και $\gamma = 8$. β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$. γ. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x+4}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x) + f(-x) - 18}$.