

Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Άλγεβρα

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 4}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να δείξετε ότι η παραπάνω συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^x + 4}$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 5 - \ln 3$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^x - 2}{e^x + 4} > 0 \\ e^x + 4 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (e^x - 2)(e^x + 4) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

$$\text{Άρα } A = (\ln 2, +\infty).$$

ii. Η συνάρτηση για $x \in A = (\ln 2, +\infty)$ γράφεται:

$$f(x) = x + \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 4} = \ln e^x + \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 4} = \ln \left(e^x \frac{e^x - 2}{e^x + 4} \right) = \ln \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^x + 4}$$

iii. Η εξίσωση $f(x) = \ln 5 - \ln 3$ ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in A = (\ln 2, +\infty)$.

Έτσι έχουμε:

$$f(x) = \ln 5 - \ln 3 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^x + 4} = \ln \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^x + 4} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - 6e^x = 5e^x + 20 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 11e^x - 20 = 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$3y^2 - 11y - 20 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 5 \text{ ή } y = -\frac{4}{3} \text{ απορ.} \right) \Leftrightarrow y = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (4^a + 2^{a+1})^x, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον αριθμό a αν το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f .

ii. Αν $a = 0$ να λύσετε την εξίσωση: $\ln \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 1004 \ln 3$

Λύση

- i. Το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f , αν και μόνο αν $f(1) = 3$.

$$\text{Έτσι έχουμε: } f(1) = 3 \Leftrightarrow (4^a + 2^{a+1})^1 = 3 \Leftrightarrow 4^a + 2^{a+1} = 3 \Leftrightarrow 2^{2a} + 2 \cdot 2^a - 3 = 0$$

Θέτω $2^a = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y = 1 \text{ ή } y = -3 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow 2^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

- ii. Με $a = 0$ η συνάρτηση είναι η $f(x) = (4^0 + 2^{0+1})^x = 3^x$.

Η εξίσωση για $x \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$\ln \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 1004 \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3^{\frac{x}{2}} = 1004 \ln 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \ln 3 = 1004 \ln 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1004 \Leftrightarrow x = 2008$$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left[2 - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right]$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

Λύση

- i. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν: $2 - \left(\frac{1}{2} \right)^x > 0 \Leftrightarrow 2 > \left(\frac{1}{2} \right)^x \Leftrightarrow 2 > 2^{-x} \Leftrightarrow 1 > -x \Leftrightarrow x > -1$

$$\text{Άρα } A = (-1, +\infty)$$

- ii. Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in A = (-1, +\infty)$.

Για $x \in A = (-1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln \left[2 - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] < \ln 1 \Leftrightarrow 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^x < 1 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{1}{2} \right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^0 < \left(\frac{1}{2} \right)^x \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα συναλθεύοντας και με το σύνολο ορισμού της ανίσωσης θα έχουμε $x \in (0, +\infty)$

4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

- ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Λύση

i. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} (1-x)(1+x) > 0 \\ x \neq -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 1-x^2 > 0 \\ x \neq -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x^2 < 1 \\ x \neq -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} |x| < 1 \\ x \neq -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -1 < x < 1 \\ x \neq -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

$$\text{Άρα } A = (-1, 1)$$

ii. Παρατηρώ ότι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς το 0.

$$\text{Πράγματι για κάθε } x \in (-1, 1) \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow 1 > -x > -1 \Leftrightarrow -x \in (-1, 1)$$

$$\text{Ακόμα για } x \in (-1, 1) \text{ έχουμε } f(-x) = \ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) > 0$.

Για $x \in (-1, 1)$ η ανίσωση γράφεται:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{1+x} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} > 1 \stackrel{1+x>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 1+x \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα η συνάρτηση f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν και μόνο όταν $x \in (-1, 0)$.

5. Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 6x - 5$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια

ii. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $g(e^x) = f(e^x)$.

Β. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln[g(e^x) - f(e^x)]$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h .

ii. Να λυθεί η ανίσωση $h(x) \geq \ln(\ln e^4)$

Λύση

Α.

Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

i. Παρατηρώ ότι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

Ακόμα για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Τότε ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow 6x_1 < 6x_2 \Rightarrow 6x_1 - 5 < 6x_2 - 5 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $g(e^x) = f(e^x) \Leftrightarrow 6e^x - 5 = (e^x)^2$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$6y - 5 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow (y - 5)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y = 5 \text{ ή } y = 1) \Leftrightarrow (e^x = 5 \text{ ή } e^x = 1) \Leftrightarrow (x = \ln 5 \text{ ή } x = 0)$$

B.

i. Η συνάρτηση h ορίζεται όταν και μόνο όταν: $g(e^x) - f(e^x) > 0 \Leftrightarrow 6e^x - 5 - (e^x)^2 > 0$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η ανίσωση γράφεται: $-y^2 + 6y - 5 > 0 \Leftrightarrow 1 < y < 5 \Leftrightarrow 1 < e^x < 5 \Leftrightarrow 0 < x < \ln 5$

.

Άρα $A_h = (0, \ln 5)$.

ii. Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in A_h = (0, \ln 5)$.

$$h(x) \geq \ln(\ln e^4) \Leftrightarrow \ln[g(e^x) - f(e^x)] \geq \ln(\ln e^4) \Leftrightarrow g(e^x) - f(e^x) \geq \ln e^4 \Leftrightarrow$$

$$6e^x - 5 - (e^x)^2 \geq 4 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

Άρα τελικά η λύση της ανίσωσης δεν είναι διάστημα, αλλά αριθμός.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 5)$ και $g(x) = \ln 5 + \ln(e^x - 1)$.

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

ii. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\ln 2$ και $\ln 5$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < g(x)$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$e^{2x} - 2e^x + 5 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 + 4 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ ως άθροισμα μη αρνητικού με θετικό.}$$

Ακόμα η συνάρτηση g ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Άρα } A_f = \mathbb{R} \text{ και } A_g = (0, +\infty).$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in A_f \cap A_g = (0, +\infty)$.

Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 5) = \ln 5 + \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 5) = \ln[5(e^x - 1)] \Leftrightarrow \\ e^{2x} - 2e^x + 5 = 5(e^x - 1) \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 5 = 5e^x - 5 \Leftrightarrow e^{2x} - 7e^x + 10 = 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow (y = 5 \text{ ή } y = 2) \Leftrightarrow (e^x = 5 \text{ ή } e^x = 2) \Leftrightarrow (x = \ln 5 \text{ ή } x = \ln 2)$$

iii. Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in A_f \cap A_g = (0, +\infty)$.

Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 5) > \ln 5 + \ln(e^x - 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow e^{2x} - 7e^x + 10 > 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$$y^2 - 7y + 10 > 0 \Leftrightarrow (y > 5 \text{ ή } y < 2) \Leftrightarrow (e^x > 5 \text{ ή } e^x < 2) \Leftrightarrow \\ (x > \ln 5 \text{ ή } x < \ln 2) \Leftrightarrow x \in (0, \ln 2) \cup (\ln 5, +\infty)$$

7.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \ln 2$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

Λύση

i. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 \\ e^x+5 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (e^{2x}-1)(e^x+5) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow e^{2x}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Άρα } A_f = (0, +\infty)$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in (0, +\infty)$.

Για $x \in (0, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = \ln 4 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = 4 \Leftrightarrow e^{2x}-1 = 4e^x+20 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-21=0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$y^2 - 4y - 21 = 0 \Leftrightarrow (y = 7 \text{ ή } y = -3 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$$

iii. Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in (0, +\infty)$.

Για $x \in (0, +\infty)$ η ανίσωση γράφεται:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 1 \Leftrightarrow e^{2x}-1 > e^x+5 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-6 > 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$$y^2 - y - 6 > 0 \Leftrightarrow (y > 3 \text{ ή } y < -2 \text{ αδύνατο.}) \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - \ln(x+3) \leq 2 \ln x$

Το ερώτημα ii) δεν μπορεί να λυθεί.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa \ln(20 - e^x) - \lambda \ln(e^x - 2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν η C_f περνάει από τα σημεία $M(\ln 3, \ln 17)$ και $N(\ln 19, -\ln 17)$ να βρείτε τα κ, λ .

$$\text{Αν } \kappa = 1, \lambda = 1$$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x - \ln 5$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{array}{l} 20 - e^x > 0 \\ e^x - 2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 20 > e^x \\ e^x > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \ln 20 > x \\ x > \ln 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ln 2 < x < \ln 20 \Leftrightarrow x \in (\ln 2, \ln 20)$$

$$\text{Άρα } A_f = (\ln 2, \ln 20).$$

ii. Η C_f διέρχεται από τα σημεία $M(\ln 3, \ln 17)$ και $N(\ln 19, -\ln 17)$ αν και μόνο αν:

$$\left. \begin{array}{l} f(\ln 3) = \ln 17 \\ f(\ln 19) = -\ln 17 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa \ln(20 - e^{\ln 3}) - \lambda \ln(e^{\ln 3} - 2) = \ln 17 \\ \kappa \ln(20 - e^{\ln 19}) - \lambda \ln(e^{\ln 19} - 2) = -\ln 17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} e^{\ln 3} = 3 \\ e^{\ln 19} = 19 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \kappa \ln(20 - 3) - \lambda \ln(3 - 2) = \ln 17 \\ \kappa \ln(20 - 19) - \lambda \ln(19 - 2) = -\ln 17 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa \ln 17 - \lambda \ln 1 = \ln 17 \\ \kappa \ln 1 - \lambda \ln 17 = -\ln 17 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \kappa \ln 17 = \ln 17 \\ -\lambda \ln 17 = -\ln 17 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa = 1 \\ \lambda = 1 \end{array} \right\}$$

Με $\kappa = 1, \lambda = 1$ η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \ln(20 - e^x) - \ln(e^x - 2)$

iii. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \in (\ln 2, \ln 20)$.

Για $x \in (\ln 2, \ln 20)$ έχουμε:

$$f(x) = 2x - \ln 5 \Leftrightarrow \ln(20 - e^x) - \ln(e^x - 2) = \ln e^{2x} - \ln 5 \Leftrightarrow \ln \frac{20 - e^x}{e^x - 2} = \ln \frac{e^{2x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{20 - e^x}{e^x - 2} = \frac{e^{2x}}{5} \Leftrightarrow e^{3x} - 2e^{2x} = 100 - 5e^x \Leftrightarrow e^{3x} - 2e^{2x} + 5e^x - 100 = 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται: $y^3 - 2y^2 + 5y - 100 = 0$

Με σχήμα Horner για $y = 5$ έχω:

$$y^3 - 2y^2 + 5y - 100 = 0 \Leftrightarrow (y - 5)(y^2 + 3y + 20) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$$

(το $y^2 + 3y + 20$ έχει αρνητική διακρίνουσα, άρα δεν μηδενίζεται)

iv. Η ανίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \in (\ln 2, \ln 20)$.

Για $x \in (\ln 2, \ln 20)$ έχουμε:

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(20 - e^x) - \ln(e^x - 2) < \ln e \Leftrightarrow \ln \frac{20 - e^x}{e^x - 2} = \ln e \Leftrightarrow$$

$$\frac{20 - e^x}{e^x - 2} < e \Leftrightarrow 20 - e^x < e^{2x} - 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 20 > 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$$y^2 - y - 20 > 0 \Leftrightarrow (y > 5 \text{ ή } y < -4) \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5.$$

Άρα λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(\ln 5, \ln 20)$

10.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 1}{2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να δείξετε ότι η f μπορεί να πάρει την μορφή: $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - e^x}{2}$.

iii. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $\frac{e^x - 1}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$$\text{Άρα } A_f = (0, +\infty)$$

ii. Για $x \in A_f = (0, +\infty)$ η f ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x) = x + \ln \frac{e^x - 1}{2} = \ln e^x + \ln \frac{e^x - 1}{2} = \ln e^x \frac{e^x - 1}{2} = \ln \frac{e^{2x} - e^x}{2}.$$

iii. Η C_f τέμνει τον $x'x$, σε κάποιο σημείο M του οποίου η τεταγμένη είναι 0 και η τετμημένη $x_0 \in (0, +\infty)$.

$$\text{Άρα } M(x_0, 0) \in C_f \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x_0} - e^{x_0}}{2} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x_0} - e^{x_0}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{2x_0} - e^{x_0} = 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x_0} - e^{x_0} - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^{x_0} = -1 \text{ απορ. ή } e^{x_0} = 2) \Leftrightarrow x_0 = \ln 2$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(\ln 2, 0)$.

iv. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ και γράφεται:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x} - e^x}{2} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^x}{2} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x > 2 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x < -1 \text{ απορ. ή } e^x > 2) \Leftrightarrow x > \ln 2$$

Άρα λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(\ln 2, +\infty)$

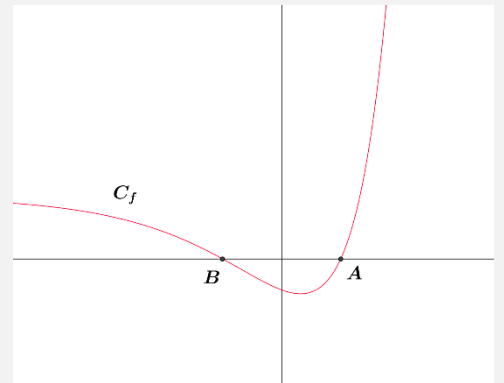
11. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

ii. Αν $g(x) = \ln f(x)$ να αποδείξετε ότι:

$$g(2) + g(3) - \ln 35 = 2 \ln 6.$$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - 2 = 5 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x$



Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $A_f = \mathbb{R}$.

Τα σημεία Α και Β είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$

Άρα οι τεταγμένες τους είναι 0, όπου το Β έχει αρνητική τετμημένη και το Α θετική Α.

Για να τα βρω επομένως τις τετμημένες τους, πρέπει και αρκεί να λύσω την εξίσωση $f(x) = 0$.

Για $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Θέτω $2^x = y, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 2 \text{ ή } y = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(2^x = 2 \text{ ή } 2^x = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

Άρα τα σημεία είναι $A(1, 0)$ και $B(-1, 0)$.

ii. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(2^x > 2 \text{ ή } 2^x < \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow (x > 1 \text{ ή } x < -1) \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Ισχύει:

$$\begin{aligned} g(2) + g(3) - \ln 35 &= \ln f(2) + \ln f(3) - \ln 35 = \ln \frac{f(2)f(3)}{35} = \\ &= \ln \frac{(2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 2^2 + 2)(2 \cdot 4^3 - 5 \cdot 2^3 + 2)}{35} = \ln \frac{14 \cdot 90}{35} = \ln 36 = \ln 6^2 = 2 \ln 6 \end{aligned}$$

iii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= 5 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 - 2 = 5 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} = 5 \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \\ \frac{5^{2x}}{2^{2x}} &= \frac{2}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(2^x + 1) + \ln(1 - 2^{-x})$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f μπορεί να πάρει την μορφή $f(x) = \ln(2^x - 2^{-x})$.

iii. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq \ln \frac{3}{2}$

Λύση

i. Η συνάρτηση f όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{array}{l} 2^x + 1 > 0 \\ 1 - 2^{-x} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ 1 > 2^{-x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 > 2^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Άρα } A_f = (0, +\infty)$$

ii. Για $x \in A_f = (0, +\infty)$ η f ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x) = \ln(2^x + 1) + \ln(1 - 2^{-x}) = \ln[(2^x + 1)(1 - 2^{-x})] = \ln(2^x + 1 - 1 - 2^{-x}) = \ln(2^x - 2^{-x})$$

iii. Πράγματι:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}^2 - 1}{\sqrt{2}} = \ln \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 2$$

iv. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και γράφεται:

$$f(x) \leq \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln(2^x - 2^{-x}) \leq \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^x - 2^{-x} \leq \frac{3}{2}$$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{\ln a - \ln 2}{\ln \beta - \ln a} \right)^x$ και $2 < a < \beta$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $a^2 < 2\beta$.

Αν $a = 4$ και $\beta = 32$ τότε:

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^x$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x+2) = 9\sqrt{3^{1-x}}$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι εκθετική.

Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως πρέπει και αρκεί:

$$0 < \frac{\ln a - \ln 2}{\ln \beta - \ln a} < 1 \stackrel{\substack{\ln \beta - \ln a > 0 \\ \text{εφόσον } \beta > a}}{\Leftrightarrow} 0 < (\ln \beta - \ln a) \frac{\ln a - \ln 2}{\ln \beta - \ln a} < \ln \beta - \ln a \Leftrightarrow$$

$$\ln a - \ln 2 < \ln \beta - \ln a \Leftrightarrow 2 \ln a < \ln \beta + \ln 2 \Leftrightarrow \ln a^2 < \ln 2\beta \Leftrightarrow a^2 < 2\beta$$

ii. Αν $a = 4$ και $\beta = 32$ τότε: η συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = \left(\frac{\ln 4 - \ln 2}{\ln 32 - \ln 4} \right)^x = \left(\frac{\ln \frac{4}{2}}{\ln \frac{32}{4}} \right)^x = \left(\frac{\ln 2}{\ln 8} \right)^x = \left(\frac{\ln 2}{\ln 2^3} \right)^x = \left(\frac{\ln 2}{3 \ln 2} \right)^x = \left(\frac{1}{3} \right)^x$$

iii. Η εξίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $3^{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση γράφεται:

$$f(x+2) = 9\sqrt{3^{1-x}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^{x+2} = 9\sqrt{3^{1-x}} \Leftrightarrow (3^{-1})^{x+2} = 9(3^{1-x})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-x-2} = 3^2 3^{\frac{1-x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$3^{-x-2} = 3^{\frac{1-x}{2}+2} \Leftrightarrow -x-2 = \frac{1-x}{2} + 2 \Leftrightarrow -2x-4 = 1-x+4 \Leftrightarrow -x=9 \Leftrightarrow x=-9$$

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln^3 x + 2 \ln^2 x + a \ln x + \beta$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ και $f(e) = 0$ να βρείτε τα a και β .

iii. Για $a = -1$ και $\beta = -2$ να δείξετε ότι $f(x) = (\ln^2 x - 1)(\ln x + 2)$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$. Άρα $A = (0, +\infty)$.

ii. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{e}\right) &= 0 \\ f(e) &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \ln^3 \frac{1}{e} + 2\ln^2 \frac{1}{e} + a\ln \frac{1}{e} + \beta &= 0 \\ \ln^3 e + 2\ln^2 e + a\ln e + \beta &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} (-1)^3 + 2(-1)^2 + a(-1) + \beta &= 0 \\ 1^3 + 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + \beta &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \\ \left. \begin{aligned} -1 + 2 - a + \beta &= 0 \\ 1 + 2 + a + \beta &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -a + \beta &= -1 \\ a + \beta &= -3 \end{aligned} \right\} &\stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \left. \begin{aligned} 2\beta &= -4 \\ -2a &= 2 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -2 \\ a &= -1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

iii. Για $a = -1$ και $\beta = -2$, και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η συνάρτηση f γράφεται:

$$f(x) = \ln^3 x + 2\ln^2 x - \ln x - 2 = \ln^2 x (\ln x + 2) - (\ln x + 2) = (\ln x + 2)(\ln^2 x - 1)$$

iv. Η ανίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \in (0, +\infty)$ και έχουμε:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\ln x + 2)(\ln^2 x - 1) > 0 \Leftrightarrow (\ln x + 2)(\ln x - 1)(\ln x + 1) > 0$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων για την συνάρτηση f .

Ισχύει:

	$-\infty$	0	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$\ln x + 2$			-	0	+	+
$\ln x - 1$			-	-	0	+
$\ln x + 1$			-	-	0	+
$f(x)$			-	+	-	+

$$\left. \begin{aligned} \ln x + 2 &> 0 \\ \ln x - 1 &> 0 \\ \ln x + 1 &> 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \ln x &> -2 \\ \ln x &> 1 \\ \ln x &> -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &> e^{-2} \\ x &> e \\ x &> e^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$$

Άρα

15.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -1$.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν

$$\left. \begin{matrix} x > 0 \\ 1 + \ln x \neq 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \neq -1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \neq \ln e^{-1} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$$

$$\text{Άρα } A = (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$ και γράφεται:

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1 + \ln x} = -1 \Leftrightarrow \ln x = -1 - \ln x \Leftrightarrow 2 \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

iii. Η γραφική παράσταση f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) > 0$.

$$\text{Για } x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty), \text{ έχουμε: } f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1 + \ln x} > 0 \Leftrightarrow \ln x (1 + \ln x) > 0$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων για το γινόμενο που προέκυψε.

Ισχύει:

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$$

$$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$\ln x$		—		—	+
$\ln x + 1$		—		+	+
$\ln x (\ln x + 1)$		+		—	+

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (1, +\infty)$$

Άρα

16.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

iii. Αν $x > 6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$.

Λύση

i. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{matrix} 3x-11 > 0 \\ x-5 > 0 \\ \ln(x-5) \neq 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 3x > 11 \\ x > 5 \\ \ln(x-5) \neq \ln 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > \frac{11}{3} \\ x > 5 \\ x-5 \neq 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > \frac{11}{3} \\ x > 5 \\ x \neq 6 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x \in (5, 6) \cup (6, +\infty)$$

$$\text{Άρα } A = (5, 6) \cup (6, +\infty).$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \in (5, 6) \cup (6, +\infty)$ και γράφεται:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)} = 2 \Leftrightarrow \ln(3x-11) = 2\ln(x-5) \Leftrightarrow$$

$$\ln(3x-11) = \ln(x-5)^2 \Leftrightarrow 3x-11 = (x-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$3x-11 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x=4 \text{ απορ. ή } x=9) \Leftrightarrow x=9$$

iii. Για $x > 6$ η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)} > 1 \stackrel{\ln(x-5) > 0}{\Leftrightarrow} \ln(3x-11) > \ln(x-5) \Leftrightarrow$$

$$3x-11 > x-5 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

Άρα λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(6, +\infty)$.

Ασκήσεις Επανάληψης (II)

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$. Να βρεθούν:

- α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- γ. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln(x^2 - 4) + \ln 5 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$.
- δ. Να λυθεί η ανίσωση $e^{f(6)-2f(4)} - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + \ln e^2$.
- ε. Να λυθεί η ανίσωση $2e^{f(6)-2f(4)} - e^x < e^{2x}$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 16x - 12 > 0 &\Leftrightarrow x^2(x-2) - 5x(x-2) + 6(x-2) > 0 \Leftrightarrow \\ (x-2)(x^2 - 5x + 6) > 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \\ (x-2)^2(x-3) > 0 &\Leftrightarrow (x \neq 2 \text{ και } x-3 > 0) \Leftrightarrow (x \neq 2 \text{ και } x > 3) \Leftrightarrow x > 3 \end{aligned}$$

(Η παραγοντοποίηση του πολωνώμου μπορεί να γίνει εύκολα με σχήμα Horner.)

Άρα $A = (3, +\infty)$

β. Έστω $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$ με $3 < x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} 3 < x_1 < x_2 &\Rightarrow 1 < x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow 1 < (x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \quad (*) \\ 3 < x_1 < x_2 &\Rightarrow 3 - 3 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow 0 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \quad \Rightarrow \\ (x_1 - 2)^2(x_1 - 3) &< (x_2 - 2)^2(x_2 - 3) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(3, +\infty)$.

γ. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\left. \begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 16x - 12 &> 0 \\ x^2 - 4 &> 0 \\ \frac{x-2}{x+2} &> 0 \\ x+2 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &> 3 \\ x^2 &> 4 \\ (x-2)(x+2) &> 0 \\ x &\neq -2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &> 3 \\ |x| &> 2 \\ x^2 - 4 &> 0 \\ x &\neq -2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x > 3$$

Για $x \in (3, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται:

$$\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln(x^2 - 4) + \ln 5 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln[(x-2)^2(x-3)] = \ln\left[5(x^2-4)\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2(x-3) = 5(x-2)\cancel{(x+2)}\left(\frac{x-2}{\cancel{x+2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{(x-2)}^2(x-3) = 5\cancel{(x-2)}^2 \Leftrightarrow (\text{μπορώ να απλοποιήσω εφόσον } x > 3 \Rightarrow x-2 \neq 0)$$

$$x-3=5 \Leftrightarrow x=8$$

δ. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχω: $f(6) - 2f(4) = \ln(6-2)^2(6-3) - 2\ln(4-2)^2(4-3) = \ln 48 - 2\ln 4 = \ln 48 - \ln 16 = \ln 3$

Άρα η ανίσωση γράφεται:

$$e^{f(6)-2f(4)} - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + \ln e^2 \Leftrightarrow e^{\ln 3} - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + 2 \Leftrightarrow$$

$$3 - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + 2 \Leftrightarrow e^{x^2} + e^{x+1} + e^x < 1$$

Όμως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} \geq 1$ και $e^{x+1} > 0$ και $e^x > 0$.

Προσθέτοντας τις 3 ανισότητες παίρνω: $e^{x^2} + e^{x+1} + e^x > 1$.

Άρα η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη.

ε. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται

$$2e^{f(6)-2f(4)} - e^x < e^{2x} \Leftrightarrow 2e^{\ln 3} - e^x < e^{2x} \Leftrightarrow 6 - e^x < e^{2x} \Leftrightarrow 0 < e^{2x} + e^x - 6$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$$0 < y^2 + y - 6 \Leftrightarrow (y > 3 \text{ ή } y < -2 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow y > 3 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$$

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(\ln 3, +\infty)$.

18.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^{\frac{1}{2}+x} \ln x - \frac{2^x}{\ln x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Ναδειχθεί ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

γ. Αν $f(e^2) = 15$ να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$.

δ. Με $x = 1$ να λυθεί η ανίσωση $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 6$.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \neq \ln 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Άρα $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

β. Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ παρατηρώ ότι και $\frac{1}{x} \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Άρα:

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln x - \frac{2^\kappa}{\ln x} + 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln \frac{1}{x} - \frac{2^\kappa}{\ln \frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln x - \frac{2^\kappa}{\ln x} + 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln x^{-1} - \frac{2^\kappa}{\ln x^{-1}} = \\ &= 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln x - \frac{2^\kappa}{\ln x} - 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln x + \frac{2^\kappa}{\ln x} = 0 \end{aligned}$$

γ. Ισχύει:

$$\begin{aligned} f(e^2) &= 15 \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln e^2 - \frac{2^\kappa}{\ln e^2} = 15 \Leftrightarrow (2^2)^{\frac{1}{2}+\kappa} \cdot 2 - \frac{2^\kappa}{2} = 15 \Leftrightarrow \\ 4 \cdot 2^{1+2\kappa} - 2^\kappa &= 30 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2\kappa} - 2^\kappa - 30 = 0 \end{aligned}$$

Θέτω $y = 2^\kappa, y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$8y^2 - y - 30 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 2 \text{ ή } y = \frac{-15}{8} \text{ απορ.} \right) \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow 2^\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

δ. Με $\kappa = 1$, η συνάρτηση είναι η: $f(x) = 4^{\frac{1}{2}+1} \ln x - \frac{2^1}{\ln x} = 8 \ln x - \frac{2}{\ln x}$

Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και γράφεται:

$$\begin{aligned} 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &\leq 6 \Leftrightarrow f(x) + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 6 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow 4 \ln x - \frac{1}{\ln x} \leq 3 \Leftrightarrow \\ \frac{4 \ln^2 x - 3 \ln x - 1}{\ln x} &\leq 0 \Leftrightarrow (4 \ln^2 x - 3 \ln x - 1) \ln x \leq 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(4 \ln x + 1) \ln x \leq 0 \end{aligned}$$

Φτιάχνω πίνακα προσήμων για το γινόμενο. Ισχύει:

$$(\ln x - 1)(4 \ln x + 1) \ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1 = 0 \text{ ή } 4 \ln x + 1 = 0 \text{ ή } \ln x = 0) \Leftrightarrow x = e \text{ ή } x = e^{-\frac{1}{4}} \text{ ή } x = 1$$

ε. και

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

$$4 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{4}}$$

στ.

	$-\infty$	0	$e^{-\frac{1}{4}}$	1	e	$+\infty$	
$\ln x$			−	0	−	+	+
$\ln x - 1$			−	−	−	0	+
$4\ln x + 1$			−	+	+	+	+
$\Gamma\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu o$			−	+	−	+	+

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{4}}\right] \cup (1, e]$

19. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$

- α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 4)$ και $f(\ln 5)$.
- γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$. Άρα $A = (\ln 3, +\infty)$.

β. Έχω:

$$f(\ln 4) = \ln 4 + \ln(e^{\ln 4} - 3) = \ln 4 + \ln(4 - 3) = \ln 4$$

$$f(\ln 5) = \ln 5 + \ln(e^{\ln 5} - 3) = \ln 5 + \ln(5 - 3) = \ln 5 + \ln 2 = \ln 10$$

Ισχύει ότι $4 < 10 \Rightarrow \ln 4 < \ln 10$ άρα $f(\ln 5) > f(\ln 4)$.

γ. Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \\ e^x - 2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in (\ln 3, +\infty) \\ e^x > 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in (\ln 3, +\infty) \\ x > \ln 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (\ln 3, +\infty)$$

Άρα για $x \in (\ln 3, +\infty)$ έχουμε ότι η ανίσωση γράφεται:

$$f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2) \Leftrightarrow x + \ln(e^x - 3) > \ln 2 + \ln(e^x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\ln e^x + \ln(e^x - 3) > \ln 2 + \ln(e^x - 2) \Leftrightarrow \ln[e^x(e^x - 3)] > \ln[2(e^x - 2)] \Leftrightarrow$$

$$e^x(e^x - 3) > 2(e^x - 2) \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x > 2e^x - 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$$

Θέτω $e^x = y, y > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$$y^2 - 5y + 4 > 0 \Leftrightarrow (y > 4 \text{ ή } y < 1) \Leftrightarrow (e^x > 4 \text{ ή } e^x < 1) \Leftrightarrow (x > \ln 4 \text{ ή } x < 0 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow x > \ln 4$$

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(\ln 4, +\infty)$

20. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

- α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(10-x) = f(3\sqrt{x})$.
- δ. Να λυθεί η ανίσωση $f(2x) > f(x)$.
- ε. Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

- α. Η συνάρτηση ορίζεται αν και μόνο αν $e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $A = \mathbb{R}$
- β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει:
- $$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \ln(e^{x_1} + 1) < \ln(e^{x_2} + 1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- γ. Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x \geq 0$ και $x \in A$. Άρα αν και μόνο αν $x \in [0, +\infty)$ και γράφεται:
- $$f(10-x) = f(3\sqrt{x}) \stackrel{f \text{ γν. αυξ. στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \stackrel{f \text{ "1-1"} }{10-x = 3\sqrt{x}}$$
- Θέτω $\sqrt{x} = y, y \geq 0$ και η εξίσωση γράφεται:
- $$10-y = 3y^2 \Leftrightarrow 3y^2 + y - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(y = -2 \text{ απορ. ή } y = \frac{5}{3} \right) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{25}{9}$$
- δ. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται: $f(2x) > f(x) \stackrel{f \text{ γν. αυξ. στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 2x > x \Leftrightarrow x > 0$
- ε. Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:
- $$f(-x) = \ln(e^{-x} + 1) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\frac{1+e^x}{e^x} = \ln(1+e^x) - \ln e^x = \ln(1+e^x) - x = f(x) - x$$

21.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - ax^2 - 5x + 6, & \text{αν } x < 1 \\ x - 1 + \ln x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

- α. Αν είναι $f(1) = f(-2)$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a .

Για $a=2$

- β. Ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.
- γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.
- δ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$ για $x < 1$.
- ε. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = -x \ln 2$ για $x \leq 0$.

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει:

$$\begin{aligned} f(1) = f(-2) &\Leftrightarrow 1 - 1 + \ln 1 = (-2)^3 - a(-2)^2 - 5(-2) + 6 \Leftrightarrow \\ 0 &= -8 - 4a + 10 + 6 \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2 \end{aligned}$$

β. Άρα η συνάρτηση είναι η $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5x + 6, & \text{αν } x < 1 \\ x - 1 + \ln x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Για κάθε $x \geq 1$ ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} x \geq 1 &\Rightarrow x - 1 \geq 0 \\ x \geq 1 &\Rightarrow \ln x \geq \ln 1 \Rightarrow \ln x \geq 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} x - 1 + \ln x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

γ. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα ψάξω για λύσεις τις εξισώσεις και στα 2 διαστήματα που αυτή ορίζεται.

Για $x < 1$ έχω:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\text{παράγοντοποίηση με Horner με παράγοντα το } x - 1)$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ απορ. ή } x = -3 \text{ ή } x = 2 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow x = -3$$

Για $x \geq 1$ έχω:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + \ln x = 0$$

Παρατηρώ ότι $x = 1$ είναι λύση της εξίσωσης. Θα αποδείξω ότι είναι μοναδική.

Πράγματι για $x > 1$:

$$\left. \begin{aligned} x > 1 &\Rightarrow x - 1 > 0 \\ x > 1 &\Rightarrow \ln x > \ln 1 \Rightarrow \ln x > 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} x - 1 + \ln x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $x = -3$ και $x = 1$.

δ. Για $x < 1$ έχω: $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) < 0$

Φτιάχνω πίνακα προσήμων και έχω:

$$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$$

Όμως η ανίσωση ορίζεται μόνο για $x < 1$

, επομένως $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3)$.

	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 + x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x^2 + x - 6)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

ε. Για $x \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ είναι γν. φθίν στο } \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 1$.

Άρα θέτοντας $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y \Leftrightarrow x \ln \frac{1}{2} = \ln y \Leftrightarrow -x \ln 2 = \ln y \Leftrightarrow x = -\frac{\ln y}{\ln 2}$ με για $x \leq 0$ το $y \geq 1$.

Άρα η εξίσωση γράφεται:

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = -x \ln 2 \Leftrightarrow f(y) = -\left(-\frac{\ln y}{\ln 2}\right) \ln 2 \Leftrightarrow f(y) = \ln y \Leftrightarrow$$

$$y - 1 + \ln y = \ln y \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (a^2 + \ln^4 a)x^3 - 3(a + \ln^3 a)x^2 + (a + \ln^2 a)x + 1 + \ln^3 a$ με $a, x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$.

α. Να βρεθεί ο $a > 0$ ώστε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου να είναι 0 (μηδέν).

Αν $a = 1$ τότε:

β. Να γίνει η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(e^x + \sqrt{2}) = 0$.

Λύση

α. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου για να είναι 0 πρέπει και αρκεί:

$$(a^2 + \ln^4 a) - 3(a + \ln^3 a) + (a + \ln^2 a) + 1 + \ln^3 a = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + \ln^4 a - 3a - 3\ln^3 a + a + \ln^2 a + 1 + \ln^3 a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln^2 a (\ln^2 a - 2\ln a + 1) + (a^2 - 2a + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln^2 a (\ln a - 1)^2 + (a - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - 1 = 0 \text{ και} \\ \ln a = 0 \text{ ή } \ln a - 1 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a = 1 \text{ και} \\ a = 1 \text{ ή } a = e \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1$$

β. Με $a = 1$ το πολυώνυμο γράφεται:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

Κάνοντας σχήμα Horner με παράγοντα το $x - 1$ έχουμε:

$$\text{Άρα } P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 - 2x - 1).$$

γ. Η πολυωνυμική εξίσωση

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x = 1 \text{ ή } x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = 1 \text{ ή } x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 1 \pm \sqrt{2})$$

Έχω:

1	-3	1	1	1
	1	-2	-1	
1	-2	-1	0	

$$P(e^x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow (e^x + \sqrt{2} = 1 \text{ ή } e^x + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ ή } e^x + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$(e^x = 1 - \sqrt{2} \text{ απορ. ή } e^x = 1 \text{ ή } e^x = 1 - 2\sqrt{2} \text{ απορ.}) \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x - 1$ που έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x) = (1-x)^2$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln(P(x))$.

α. Να υπολογιστούν τα α και β .

Για $a = -5$ και $\beta = 4$.

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

γ. Είναι $f(x) = 2\ln|x-1| + \ln(2x-1)$

δ. Να λυθεί η εξίσωση $e^{P(x)+2} - e^{2x^3} = 0$.

Λύση

α. Το πολυώνυμο P έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x) = (1-x)^2 = (x-1)^2$.

Άρα υπάρχει πολυώνυμο $R(x) = \kappa x + \lambda$ τέτοιο ώστε:

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) \Leftrightarrow 2x^3 + ax^2 + \beta x - 1 = (x-1)^2 \cdot (\kappa x + \lambda) \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + ax^2 + \beta x - 1 = (x^2 - 2x + 1) \cdot (\kappa x + \lambda) \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + ax^2 + \beta x - 1 = \kappa x^3 + \lambda x^2 - 2\kappa x^2 - 2\lambda x + \kappa x + \lambda \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + ax^2 + \beta x - 1 = \kappa x^3 + (\lambda - 2\kappa)x^2 + (\kappa - 2\lambda)x + \lambda \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \beta = \kappa - 2\lambda \\ a = \lambda - 2\kappa \\ \kappa = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \beta = 4 \\ a = -5 \\ \kappa = 2 \end{cases}$$

Άρα $a = -5$ και $\beta = 4$.

(το θέμα ασφαλώς λύνεται και με Horner με παράγοντα το $x-1$ τόσο στο P , όσο και στο πηλίκο που θα προκύψει από την διαίρεση $P:(x-1)$)

Με $a = -5$ και $\beta = 4$ το πολυώνυμο γράφεται: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = \ln(P(x))$ ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x \neq 1 \text{ και } 2x-1 > 0) \Leftrightarrow \left(x \neq 1 \text{ και } x > \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \cup (1, +\infty)$$

Άρα το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \cup (1, +\infty)$

γ. Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \cup (1, +\infty)$ η συνάρτηση γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(P(x)) = \ln[(x-1)^2(2x-1)] = \\ &= \ln(x-1)^2 + \ln(2x-1) = \ln|x-1|^2 + \ln(2x-1) = 2\ln|x-1| + \ln(2x-1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται:

$$\begin{aligned} e^{P(x)+2} - e^{2x^3} &= 0 \Leftrightarrow e^{P(x)+2} = e^{2x^3} \Leftrightarrow P(x) + 2 = 2x^3 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 + 2 = 2x^3 \Leftrightarrow \\ -5x^2 + 4x + 1 &= 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

24.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{5}+1)^x + (\sqrt{5}-1)^x$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα
- γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$
- δ. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12$ και $f(x) = 2$
- ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x}) = f(x^2) + \ln x$

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} x_1 < x_2 &\xRightarrow[\substack{\sqrt{5}+1 > 1 \\ (\sqrt{5}+1)^x \text{ γν. αυξ στο } \mathbb{R}}]{\substack{\sqrt{5}-1 > 1 \\ (\sqrt{5}-1)^x \text{ γν. αυξ στο } \mathbb{R}}} \left(\sqrt{5}+1 \right)^{x_1} < \left(\sqrt{5}+1 \right)^{x_2} \\ x_1 < x_2 &\xRightarrow[\substack{\sqrt{5}-1 > 1 \\ (\sqrt{5}-1)^x \text{ γν. αυξ στο } \mathbb{R}}]{\substack{\sqrt{5}+1 > 1 \\ (\sqrt{5}+1)^x \text{ γν. αυξ στο } \mathbb{R}}} \left(\sqrt{5}-1 \right)^{x_1} < \left(\sqrt{5}-1 \right)^{x_2} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (+) \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\left(\sqrt{5}+1 \right)^{x_1} + \left(\sqrt{5}-1 \right)^{x_1} < \left(\sqrt{5}+1 \right)^{x_2} + \left(\sqrt{5}-1 \right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = (\sqrt{5}+1)^0 + (\sqrt{5}-1)^0 = 2$.

Άρα η ανίσωση γράφεται: $f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x > 2$.

δ. Οι εξισώσεις που δίνονται ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $f(2) = (\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2 = 5 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 12$.

Η εξίσωση γράφεται: $f(x) = 12 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$.

Άρα το $x = 2$ είναι μια προφανής λύση η οποία είναι και μοναδική.

Πράγματι (εφόσον f είναι γνήσια αύξουσα) για $x < 2 \Rightarrow f(x) < f(2)$ και για $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2)$.

Άρα μοναδική λύση το $x = 2$.

Ομοίως $f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(0)$.

Η $x = 0$ είναι μια προφανής ρίζα, και είναι και η μοναδική (ομοίως με πριν).

ε. Η εξίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$ και μια προφανής ρίζα είναι η $x = 1$.

Για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει ότι

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} > x^2 \Rightarrow f(\sqrt{x}) > f(x^2) \\ 0 < x < 1 \Rightarrow 0 > \ln x \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(\sqrt{x}) > f(x^2) + \ln x$$

Για κάθε $x > 1$ ισχύει ότι:

$$\left. \begin{array}{l} 1 < x \Rightarrow \sqrt{x} < x^2 \Rightarrow f(\sqrt{x}) < f(x^2) \\ 1 < x \Rightarrow 0 < \ln x \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(\sqrt{x}) < f(x^2) + \ln x$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση δεν μπορεί να έχει άλλη ρίζα, επομένως μοναδική ρίζα είναι το $x = 1$.

25. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln 2a \cdot x^3 - \ln(a+1) \cdot x^2 - \ln 2 \cdot x + \ln 2$ με $a > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$.

α. Να βρεθεί ο θετικός αριθμός a .

β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

δ. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την οριζόντια ευθεία

$$y = \frac{\ln 8 - \ln 2}{2}$$

ε. Να δείξετε ότι $2e^{f(1)} = e^{\frac{\ln 8 - \ln 2}{2}}$

Λύση

α. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ αν και μόνο αν:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 2a \cdot 1^3 - \ln(a+1) \cdot 1^2 - \ln 2 \cdot 1 + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln 2a - \ln(a+1) - \ln 2 + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln 2a = \ln(a+1) \Leftrightarrow 2a = a+1 \Leftrightarrow a = 1$$

Για $a = 1$ η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \ln 2 \cdot x^3 - \ln 2 \cdot x^2 - \ln 2 \cdot x + \ln 2 = \ln 2(x^3 - x^2 - x + 1)$

β. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ σε κάποιο σημείο M με τετμημένη 0 ενώ τον $x'x$ σε σημείο N με τεταγμένη 0. Έτσι:

- τέμνει τον $y'y$ όταν $x = 0$:

Έτσι: $f(0) = \ln 2a \cdot 0^3 - \ln(a+1) \cdot 0^2 - \ln 2 \cdot 0 + \ln 2 = \ln 2$

- τέμνει τον $y'y$ όταν $y = 0$:

Έτσι: $0 = \ln 2(x^3 - x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $M(0, \ln 2)$, $N_1(1, 0)$ και $N_2(-1, 0)$.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ όταν και μόνο όταν $f(x) > 0$

Έχουμε επομένως:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln 2(x^3 - x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1 > 0 \text{ ή } x \neq -1) \Leftrightarrow (x > -1 \text{ ή } x \neq -1) \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

δ. Έστω ότι $K(x_0, y_0)$ το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την οριζόντια ευθεία

$$y = \frac{\ln 8 - \ln 2}{2}. \text{ Τότε υποχρεωτικά θα έχω } y_0 = \frac{\ln 8 - \ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2.$$

$$T_O \quad K(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \ln 2(x_0^3 - x_0^2 - x_0 + 1) = \ln 2 \Leftrightarrow x_0^3 - x_0^2 - x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1).$$

Άρα τα κοινά σημεία (σημεία τομής) είναι τα: $K_1(1, \ln 2)$ και $K_2(-1, \ln 2)$

26. Να αποδειχθεί ότι :

α. το πολυώνυμο $P(x) = (3x-4)^{50} - (2x-1)^{83}$ διαιρείται με το $x-1$.

- β. οι αριθμοί 299^{50} και 201^{83} έχουν ίσα τα δύο τελευταία τους ψηφία (δηλαδή, τα ψηφία των μονάδων και των δεκάδων)

Λύση

- α. Για να δείξω ότι το πολυώνυμο $P(x) = (3x-4)^{50} - (2x-1)^{83}$ διαιρείται με το $x-1$ αρκεί να δείξω ότι $P(1) = 0$.

Πράγματι: $P(1) = (3-4)^{50} - (2-1)^{83} = (-1)^{50} - 1^{83} = 1 - 1 = 0$

Εφόσον το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x) = (3x-4)^{50} - (2x-1)^{83}$, θα ισχύει ότι:

$P(x) = (x-1)\pi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης, που θα είναι πολυώνυμο με επίσης ακέραιους συντελεστές όπως το P .

- β. Για $x = 101$, η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$P(101) = (101-1)\pi(101) \Rightarrow (303-4)^{50} - (202-1)^{83} = 100\pi(101) \Leftrightarrow 299^{50} - 201^{83} = 100\rho,$$

όπου $\rho \in \mathbb{Z}$ εφόσον το πηλίκο έχει ακέραιους συντελεστές.

Άρα το 100 διαιρεί την διαφορά $299^{50} - 201^{83}$ και επομένως οι αριθμοί 299^{50} και 201^{83} έχουν ίσα τα δύο τελευταία τους ψηφία.

(ας παρατηρήσουμε ότι όταν τα τελευταία ψηφία 2 αριθμών είναι ίσα, τότε η διαφορά τους, έχει στην θέση των τελευταίων ψηφίων της τα 00, δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 100)

27. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1)$.

- α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 10$.

- β. Αν ρ είναι μια πραγματική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(P(x) + x - 10) - 10$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - \rho$.

Λύση

- α. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε $P(x) = 10 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1) = 10$.

Θέτω $x^2 + x + 1 = y, y > 0$ (ο περιορισμός αν δεν είναι προφανής μπορεί και να παραλειφθεί) και η εξίσωση γράφεται:

$$(y-3)y = 10 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow (y=5 \text{ ή } y=-2 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow y=5 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

β. Εφόσον ρ είναι μια πραγματική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, τότε θα ισχύει: $P(\rho) = 10$.

Το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι παράγοντας του $Q(x) = P(P(x) + x - 10) - 10$, αν και μόνο αν $Q(\rho) = 0$.

Πράγματι:

$$Q(\rho) = P(P(\rho) + \rho - 10) - 10 = P(10 + \rho - 10) - 10 = P(\rho) - 10 = 10 - 10 = 0$$

28. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x-2)^{20} + (x-1)^{10} - 1$.

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-2)$.

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x(x-1)(x-2)$.

Λύση

α. Για να βρω το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-2)$, θα γράψω την ταυτότητα της διαίρεσης. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $\pi(x)$ (το πηλίκο) και ένα πολυώνυμο $v(x)$ (το υπόλοιπο) με βαθμό μικρότερο από αυτόν του διαιρέτη, άρα το πολύ 1. Το υπόλοιπο θα είναι της μορφής $v(x) = ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αυτό σημαίνει ότι: $P(x) = (x-1)(x-2)\pi(x) + ax + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(1) = (1-1)(1-2)\pi(1) + a \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow (1-2)^{20} + (1-1)^{10} - 1 = a + \beta \Leftrightarrow a + \beta = 0 \quad (1)$$

Για $x = 2$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(2) = (2-1)(2-2)\pi(2) + a \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow (2-2)^{20} + (2-1)^{10} - 1 = 2a + \beta \Leftrightarrow 2a + \beta = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχω ότι:

$$\left. \begin{array}{l} a + \beta = 0 \\ 2a + \beta = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = -\beta \\ -2\beta + \beta = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right\}$$

Άρα το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα η διαίρεση είναι τέλεια.

β. Ομοίως με πριν, από την ταυτότητα της διαίρεσης θα υπάρχει κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$ (το πηλίκο) και ένα πολυώνυμο $v(x)$ (το υπόλοιπο) βαθμού το πολύ 2. Άρα θα είναι της μορφής $v(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Αυτό σημαίνει ότι: $P(x) = x(x-1)(x-2)\pi(x) + ax^2 + \beta x + \gamma$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(1) = 1(1-1)(1-2)\pi(1) + a \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma \Leftrightarrow (1-2)^{20} + (1-1)^{10} - 1 = a + \beta + \gamma \Leftrightarrow a + \beta + \gamma = 0 \quad (1)$$

Για $x=2$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(2) = 2(2-1)(2-2)\pi(2) + a \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma \Leftrightarrow (2-2)^{20} + (2-1)^{10} - 1 = 4a + 2\beta + \gamma \Leftrightarrow 4a + 2\beta + \gamma = 0 \quad (2)$$

Για $x=0$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(0) = 0(0-1)(0-2)\pi(0) + a \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma \Leftrightarrow (0-2)^{20} + (0-1)^{10} - 1 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 2^{20} \quad (3)$$

Από το σύστημα των (1), (2) και για $\gamma = 2^{20}$ έχω:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a + \beta + 2^{20} &= 0 \\ 4a + 2\beta + 2^{20} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 4a + 4\beta + 4 \cdot 2^{20} &= 0 \\ 4a + 2\beta + 2^{20} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2\beta + 4 \cdot 2^{20} &= 0 \\ 4a + 2\beta + 2^{20} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -2 \cdot 2^{20} \\ 4a + 2\beta + 2^{20} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \\ \left. \begin{aligned} \beta &= -2^{21} \\ 4a + 2(-2^{21}) + 2^{20} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -2^{21} \\ 4a - 2^{22} + 2^{20} &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -2^{21} \\ a &= 2^{20} - 2^{18} \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -2^{21} \\ a &= 3 \cdot 2^{18} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Άρα το υπόλοιπο είναι: $\nu(x) = 3 \cdot 2^{18} x^2 - 2^{21} x + 2^{20}$

29. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές και οι αριθμοί $P(0)$ και $P(1)$ είναι περιττοί.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση

Έστω ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα την $x = \rho$.

Τότε το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και επομένως η ταυτότητα της διαίρεσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι: $P(x) = (x - \rho)\pi(x)$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης, που θα είναι πολυώνυμο με επίσης ακέραιους συντελεστές όπως το P .

Για $x=0$ η ταυτότητα γράφεται: $P(0) = (0 - \rho)\pi(0) \Leftrightarrow P(0) = -\rho\pi(0)$ (1), όπου $\pi(0) \in \mathbb{Z}$

Για $x=1$ η ταυτότητα γράφεται: $P(1) = (1 - \rho)\pi(1)$ (2) που $\pi(1) \in \mathbb{Z}$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\underbrace{P(0)P(1)}_{\text{περιττός ως γινόμενο περιττών}} = - \underbrace{\rho(1-\rho)}_{\text{άρτιος ως γινόμενο διαδοχικών ακεραιών}} \cdot \underbrace{\pi(0)\pi(1)}_{\text{ακέραιος ως γινόμενο ακεραιών αριθμών}}$$

Αδύνατο εφόσον το γινόμενο άρτιου με ακέραιο είναι πάντα άρτιο.

Άρα η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

30.

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = (x-1)^{2004}$.

α. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ και να βρείτε το υπόλοιπό της.

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa = 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ διαιρεί τον αριθμό $\lambda = 2003^{2004} - 2003^2$.

Λύση

α. Ισχύει ότι: $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $P(x) = Q(x)\pi(x) + \nu(x)$ όπου $\pi(x)$ (το πηλίκο) και $\nu(x)$ (το υπόλοιπο) βαθμού το πολύ 2. Άρα θα είναι της μορφής $\nu(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Αυτό σημαίνει ότι: $P(x) = x(x-1)(x-2)\pi(x) + ax^2 + \beta x + \gamma$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x=1$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(1) = 1(1-1)(1-2)\pi(1) + a \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma \Leftrightarrow (1-1)^{2004} = a + \beta + \gamma \Leftrightarrow a + \beta + \gamma = 0 \quad (1)$$

Για $x=2$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(2) = 2(2-1)(2-2)\pi(2) + a \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma \Leftrightarrow (2-1)^{2004} = 4a + 2\beta + \gamma \Leftrightarrow 4a + 2\beta + \gamma = 1 \quad (2)$$

Για $x=0$ η ταυτότητα γράφεται:

$$P(0) = 0(0-1)(0-2)\pi(0) + a \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma \Leftrightarrow (0-1)^{2004} = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 1 \quad (3)$$

Από το σύστημα των (1), (2) και για $\gamma=1$ έχω:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a + \beta + 1 &= 0 \\ 4a + 2\beta + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} a + \beta &= -1 \\ 4a + 2\beta &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} a + \beta &= -1 \\ 2a + \beta &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2a + 2\beta &= -2 \\ 2a + \beta &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \\ \left. \begin{aligned} \beta &= -2 \\ 2a - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -2 \\ a &= 1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Άρα το υπόλοιπο είναι: $\nu(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) = x(x-1)(x-2)\pi(x) + (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Για $x=2004$ η ταυτότητα γράφεται:

$$\begin{aligned} P(2004) &= 2004(2004-1)(2004-2)\pi(2004) + (2004-1)^2 \Leftrightarrow \\ (2004-1)^{2004} &= 2004 \cdot 2003 \cdot 2002\pi(2004) + 2003^2 \Leftrightarrow \\ 2003^{2004} - 2003^2 &= 2004 \cdot 2003 \cdot 2002\pi(2004) \end{aligned}$$

Όμως το $\pi(2004) \in \mathbb{Z}$ εφόσον οι συντελεστές του $\pi(x)$ είναι ακέραιοι.

Άρα πράγματι ο αριθμός $n = 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ διαιρεί τον αριθμό $\lambda = 2003^{2004} - 2003^2$.

Θέματα ΟΕΦΕ

- 31.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α.** Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - β.** Για $\lambda = 1$ να βρεθεί το $P(x)$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $(1, -3)$.
 - γ.** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < -3$.

Λύση

- α.** Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι παραμετρικό ως προς $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Για $\lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 2 \text{ και } \lambda \neq -2)$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού.
- Για $\lambda = 0$ το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται: $P(x) = 0x^3 + 0x - 0 + 2 = 2$ και είναι μηδενικού βαθμού.
- Για $\lambda = 2$ το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται: $P(x) = 0x^3 + 0x - 2 + 2 = 0$ και είναι το μηδενικό πολυώνυμο για το οποίο δεν ορίζεται βαθμός.
- Για $\lambda = -2$ το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται: $P(x) = 0x^3 + 4x + 2 + 2 = 4x + 4$ και είναι 1^{ου} βαθμού.
- β.** Για $\lambda = 1$ το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται: $P(x) = -3x^3 - x - 1 + 2 = -3x^3 - x + 1$
- Για να δείξω ότι η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $(1, -3)$ αρκεί να δείξω ότι $P(1) = -3$.
- Πράγματι: $P(1) = -3 \cdot 1^3 - 1 + 1 = -3$.
- Άρα η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $(1, -3)$.
- γ.** Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται:
- $$P(x) < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 1 < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 3 + 1 < 0 \Leftrightarrow -3(x^3 - 1) - (x - 1) < 0 \Leftrightarrow$$
- $$(x^3 - 1) + (x - 1) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) > 0 \Leftrightarrow$$
- $$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι $x^2 + x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γιατί η διακρίνουσά του είναι $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$)
Άρα λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(1, +\infty)$.

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5^{\log x}$, $g(x) = x^{\log 5}$, $x \in (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) = g(x)$

β. $f(xy) = f(x)f(y)$

γ. $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$

δ. $f(x^v) = [f(x)]^v$, $v \in \mathbb{N}$

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = 5 + 4g(x)$

στ. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x) > f(x^2 - 4)$

Λύση

α. Οι δυο συναρτήσεις έχουν το ίδιο σύνολο ορισμού, $A_f = A_g = (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) = 5^{\log x} = 10^{\log 5^{\log x}} = 10^{\log 5 \log x} = 10^{\log x^{\log 5}} = x^{\log 5} = g(x)$.

Άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β. Για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f(xy) = 5^{\log xy} = 5^{\log x + \log y} = 5^{\log x} 5^{\log y} = f(x)f(y)$

γ. Για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f\left(\frac{x}{y}\right) = 5^{\log \frac{x}{y}} = 5^{\log x - \log y} = \frac{5^{\log x}}{5^{\log y}} = \frac{f(x)}{f(y)}$

δ. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $v \in \mathbb{N}$ ισχύει: $f(x^v) = 5^{\log x^v} = 5^{v \log x} = (5^{\log x})^v = [f(x)]^v$.

ε. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και γράφεται:

$$f^2(x) = 5 + 4g(x) \Leftrightarrow f^2(x) = 5 + 4f(x) \Leftrightarrow (5^{\log x})^2 - 4 \cdot 5^{\log x} - 5 = 0$$

Θέτω $5^{\log x} = y$, $y > 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y = 5 \text{ ή } y = -1 \text{ απορ.}) \Leftrightarrow y = 5 \Leftrightarrow 5^{\log x} = 5 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$$

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log x_1 < \log x_2 \Rightarrow 5^{\log x_1} < 5^{\log x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

στ. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και γράφεται:

$$f(3x) > f(x^2 - 4) \Leftrightarrow 3x > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(0, 4)$.

33.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$ για κάθε $x > 0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$.

δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \ln f(e^{1000}) + \ln f(e^{1001}) + \ln f(e^{1002}) + \ln f(e^{1003}) + \ln f(e^{1004})$$

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$$\left. \begin{matrix} x > 0 \\ 2\ln x - 1 \neq 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ 2\ln x \neq 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \neq \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq e^{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x \in \left(0, e^{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$$

$$A = \left(0, e^{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$$

Άρα

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον $x'x$ σε κάποιο σημείο με τετμημένη x_0 και τεταγμένη $f(x_0) = 0$.

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x_0 + 1}{2\ln x_0 - 1} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$$

Άρα

Επομένως το σημείο τομής είναι το $M\left(e^{-\frac{1}{2}}, 0\right)$

β. Για κάθε $x > 0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln \frac{1}{x} + 1}{2\ln \frac{1}{x} - 1} = \frac{2\ln x^{-1} + 1}{2\ln x^{-1} - 1} = \frac{-2\ln x + 1}{-2\ln x - 1} = \frac{2\ln x - 1}{2\ln x + 1} = \left(\frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}\right)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

γ. Για κάθε $x > 0$ και $x \neq e^{\frac{1}{2}}, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$ η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 &\Leftrightarrow f(x) + \frac{2}{f(x)} = 3 \Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1} = 1 \text{ ή } \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1} = 2\right) \Leftrightarrow (2\ln x + 1 = 2\ln x - 1 \text{ ή } 2\ln x + 1 = 2(2\ln x - 1)) \Leftrightarrow \\ &(1 = -1 \text{ αδύνατο ή } 2\ln x + 1 = 4\ln x - 2) \Leftrightarrow 3 = 2\ln x \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

δ. Παρατηρώ ότι ισχύει: $\ln f(e^x) = \ln \frac{2\ln e^x + 1}{2\ln e^x - 1} = \ln \frac{2x + 1}{2x - 1}$.

Έτσι η παράσταση γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \ln f(e^{1000}) + \ln f(e^{1001}) + \ln f(e^{1002}) + \ln f(e^{1003}) + \ln f(e^{1004}) = \\ &= \ln \frac{2001}{1999} + \ln \frac{2003}{2001} + \ln \frac{2005}{2003} + \ln \frac{2007}{2005} + \ln \frac{2009}{2007} = \\ &= \ln \left(\frac{2001}{1999} \cdot \frac{2003}{2001} \cdot \frac{2005}{2003} \cdot \frac{2007}{2005} \cdot \frac{2009}{2007} \right) = \\ &= \ln \frac{2009}{1999} \end{aligned}$$

34.

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της $f(x)$ δια $x + 2$ είναι 24.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 8)$.
- Η $f(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

α. Να δείξετε ότι: $a = 1$, $\beta = -10$ και $\gamma = 8$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x+4}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x) + f(-x) - 18}$.

Λύση

α. Για την συνάρτηση f ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της $f(x)$ δια $x+2$ είναι 24 αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} f(-2) &= 24 \Leftrightarrow (-2)^3 + a(-2)^2 + \beta(-2) + \gamma = 24 \Leftrightarrow \\ -8 + 4a - 2\beta + \gamma &= 24 \Leftrightarrow 4a - 2\beta + \gamma = 32 \end{aligned}$$

- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,8)$ αν και μόνο αν:

$$f(0) = 8 \Leftrightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 8 \Leftrightarrow \gamma = 8$$

- Η $f(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ αν και μόνο αν

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 0 \Leftrightarrow a + \beta + \gamma = -1$$

Από το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων για $\gamma = 8$ παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} 4a - 2\beta + 8 &= 32 \\ a + \beta + 8 &= -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 4a - 2\beta &= 24 \\ a + \beta &= -9 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2a - \beta &= 12 \\ a + \beta &= -9 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 3a &= 3 \\ a + \beta &= -9 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} a &= 1 \\ \beta &= -9 - 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} a &= 1 \\ \beta &= -10 \end{aligned} \right\}$$

Άρα $a = 1$, $\beta = -10$ και $\gamma = 8$ και η συνάρτηση είναι η $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8, x \in \mathbb{R}$

- β.** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$

Εύκολα παρατηρούμε ότι το 1 είναι μια ρίζα της εξίσωσης και επομένως μπορούμε εύκολα να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο με σχήμα Horner.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 10x + 8 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow \\ (x-1)(x-2)(x+4) &= 0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-4) \end{aligned}$$

- γ.** Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον x όταν και μόνο όταν

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+4) < 0.$$

Ισχύει:

$$x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$$

Φτιάχνω πίνακα προσήμων και έχω:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2).$$

- δ.** Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν:

1	1	-10	8	1
	1	2	-8	
1	2	-8	0	

	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \neq 0 \\ f(x) + f(-x) - 18 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\} \\ x^3 + x^2 - 10x + 8 + (-x)^3 + (-x)^2 - 10(-x) + 8 - 18 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\} \\ x^3 + x^2 - 10x + 8 - x^3 + x^2 + 10x + 8 - 18 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\} \\ 2x^2 - 2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\} \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\} \\ x^2 \neq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{-4, 1, 2\} \\ x \neq \pm 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-4, -1, 1, 2\}$$

Η ανίσωση για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-4, -1, 1, 2\}$ γράφεται:

$$\frac{x+4}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x) + f(-x) - 18} \Leftrightarrow \frac{\cancel{x+4}}{(x-1)(x-2)(\cancel{x+4})} \leq \frac{2}{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq \frac{2}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1-2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+4}{(x^2-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x+5}{(x^2-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{(x^2-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-5)(x^2-1)(x-2) \geq 0$$

Φτιάχνω πίνακα προσήμων και έχω:

Άρα η ανίσωση έχει λύση τα $x \in (-1, 1) \cup (2, 5]$

	$-\infty$	-1		1		2		5	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+		+		+
$x - 2$	-		-		-	0	+		+
$x - 5$	-		-		-		-	0	+
Γινόμενο	+	0	-	0	+	0	-	0	+